СУ "Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика
Специалност "Математика"

Писмен Изпит по "Висша Алгебра II"
Примерни Задачи

Задача 1. Да се пресметне симетричната функция Σ от корените x_1, x_2, x_3 на полинома f:

(а) $f = x^3 + 2x + 2$, $\Sigma = \dfrac{x_1^2}{2 + x_2x_3} + \dfrac{x_2^2}{2 + x_1x_3} + \dfrac{x_3^2}{2 + x_1x_2}$;

(б) $f = x^3 - 2x^2 + 1$, $\Sigma = \dfrac{1}{1 - 3x_1x_2 - 3x_1x_3} + \dfrac{1}{1 - 3x_2x_3 - 3x_2x_1} + \dfrac{1}{1 - 3x_3x_1 - 3x_3x_2}$;

(в) $f = x^3 + x + 1$, $\Sigma = 2x_1^5 + 2x_2^5 + 2x_3^5 + x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 + x_1x_2^3 + x_2x_3^3 + x_3x_1^3$;

(г) $f = x^3 - x - 1$, $\Sigma = \dfrac{1}{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2} + \dfrac{1}{x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2} + \dfrac{1}{x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2}$.

Задача 2. Да се пресметне дискриминантата $D(f)$ на полинома f:

(а) $f = x^3 + x^2 + x + 1$;

(б) $f = x^3 + 2x^2 + 1$;

(в) $f = 5x^9 - 9x^5 - 4$;

(г) $f = x^6 - 2x^3 + 1$.

Задача 3. Да се намерят всички стойности на естествените числа n и m, за които полиномът $g(x) = (x^2 + 1)^2$ дели полинома $f(x) = x^{2n} + 2x^m + 1$.

Задача 4. Да се намерят всички стойности на λ, за които полиномите $f = x^3 + \lambda x + 18$ и $g(x) = x^2 + \lambda x + 6$ имат общ корен.

Задача 5. Нека $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

(а) Да се докаже, че $[K : \mathbb{Q}] = 4$ и числата 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ образуват базис на K над $\mathbb{Q}$.

(б) Да се намери примитивен елемент θ на разширението $\mathbb{Q} < K$ и минималният полином на θ над $\mathbb{Q}$. Да се изразят числата $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ чрез базиса 1, θ, θ^2, θ^3 на K над $\mathbb{Q}$.

Задача 6. Нека K е полето на разлагане на полинома $f = (x^2 + 1)(x^2 + 3)$ над полето на рационалните числа.

(а) Да се докаже, че полето K съдържа числото $\sqrt{3}$.

(б) Да се докаже, че числата 1, $\sqrt{3}$, i, $\sqrt{3}i$ образуват базис на K над $\mathbb{Q}$.

(в) Да се намери примитивен елемент θ на разширението $\mathbb{Q} < K$ и минималният полином на θ над $\mathbb{Q}$. Да се представи всяко от числата 1, $\sqrt{3}$, i, $\sqrt{3}i$ като линейна комбинация на 1, θ, θ^2, θ^3 с коефициенти в $\mathbb{Q}$.

Задача 7. Да се намери броят на неразложимите унитарни полиноми от
(а) степен 9 над $\mathbb{Z}_2$; (б) степен 6 над $\mathbb{Z}_3$; (в) степен 4 над $\mathbb{Z}_5$.

Задача 8. Да се разложи на неразложими множители над $\mathbb{Z}_2$ полинома $f = x^{16} - x \in \mathbb{Z}_2[x]$.

Задача 9. Да се разложи на неразложими множители над $\mathbb{Z}_3$ полинома $f = x^9 - x \in \mathbb{Z}_3[x]$.

Задача 10. Да се докаже, че G има нормална силова подгрупа, ако:
(а) $|G| = 80$; (б) $|G| = 132$; (в) $|G| = 280$.