Лекция 1

Линейни системи. Метод на Гаус

1.1 Линейни системи

Определение 1.1. Система от m уравнения за n неизвестни $x_1, \ldots, x_n$ от вида

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{1.1}$$

се нарича *линейна система*.

Пример 1.1. Линейна система от 3 уравнения за 3 неизвестни:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

С всяка линейна система са асоциирани две матрици - *матрицата от коефициенти* на линейната система и *разширената матрица* на линейната система.
Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича *матрица от коефициентите* на линейната система (1.1).
Матрицата

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

се нарича стълб на константите на линейната система (1.1).
Матрицата

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

се нарича *разширена матрица* на линейната система (1.1).
Ясно е, че една линейна система се задава еднозначно от своята разширена матрица на коефициентите.
Матрицата от коефициентите на линейната система от Пример 1.1 е

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а разширената матрица на същата система е

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

1.2 Ешелонна форма на матрици и линейни системи

Нека е A е матрица с m реда и n стълба.

Определение 1.2 (Матрица в ешелонна форма)**.** Казваме, че матрицата A е в ешелонна форма, когато

1. Всеки ненулев ред на A започва с повече нули от предишния ред.

2. Първият различен от 0 коефициент във всеки ред на A е равен на 1.

Определение 1.3. Казваме, че една линейна система е в ешелонна форма, когато нейната матрица от коефициенти е в ешелонна форма.

Когато една линейна система е в ешелонна форма, неизвестните $x_1, \dots, x_n$ се разбиват на две групи: *водещи неизвестни* и *свободни неизвестни*. *Водещите неизвестни* съответстват на първите различни от нула коефициенти във всеки ред на матрицата A. Всички останали неизвестни (ако има такива) се наричат *свободни неизвестни*.

За да решим системата, приравняваме всички свободни неизвестни на параметри, след което изразяваме водещите неизвестни чрез тези параметри.

Както веднага се вижда, линейната система от Пример 1.1

$$\left|\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

е в ешелонна форма, като всички неизвестни са водещи неизвестни. Да решим тази система като намерим водещите неизвестни в обратен ред:

$$\begin{aligned}
&x_3 = 1\\
&x_2 = 2 + 4x_3 = 2 + 4 \cdot 1 = 6\\
&x_1 = 3 + 2x_2 - 3x_3 = 3 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 = 12.
\end{aligned}$$

Следователно $x_1 = 12$, $x_2 = 6$, $x_3 = 1$. Ще записваме решението като наредена тройка числа $x = (12, 6, 1)$.

Пример 1.2. Да се реши линейната система:

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7\\
 & & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 1\\
 & & & & & & x_4 & = & 3
\end{array}\right.$$

Решение. Матрицата от коефициентите на системата и разширената матрица на системата са съответно

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Ясно е, че системата е в ешелонна форма, като x_1, x_2, x_4 са водещи неизвестни, а x_3 е свободна неизвестна. Полагаме $x_3 = p$, след което намираме последователно водещите неизвестни в обратен ред:

$$\begin{aligned}
&x_3 = p\\
&x_4 = 3\\
&x_2 = 1 + x_3 + 2x_4 = 1 + p + 2 \cdot 3 = 7 + p\\
&x_1 = 7 + x_2 - x_3 - x_4 = 7 + (7 + p) - p - 3 = 11
\end{aligned}$$

Следователно $x_1 = 11$, $x_2 = 7+p$, $x_3 = p$, $x_4 = 3$. Тъй като за всяка стойност на параметъра p получаваме решение, тази линейна система има безброй решения. Записваме общото решение на системата като наредена четворка числа: $x = (11, 7 + p, p, 3)$.

1.3 Елементарни преобразувания

Ние ще решаваме линейни системи, като ги преобразуваме до линейни системи в ешелонна форма. Преобразуванията, които се използват за тази цел, се наричат елементарни преобразувания.

Определение 1.4 (Елементарни преобразувания на линейна система)**.** *Елементарните преобразувания* на една линейна система са:

1. Размяна на местата на две от уравненията.

2. Умножение на някое от уравненията с различно от нула число.

3. Прибавяне към някое от уравненията на някое друго уравнение умножено с число.

Размяната на местата на i-тото и j-тото уравнение на една линейна система ще означаваме с T_{ij} и ще записваме по следния начин:

$$\text{Система } A \quad \xrightarrow{T_{ij}} \quad \text{Система } B.$$

Умножението на i-тото уравнение с числото $a \neq 0$ ще означаваме с aR_i и ще записваме по следния начин:

$$\text{Система } A \quad \xrightarrow{aR_i} \quad \text{Система } B.$$

Прибавянето към i-тото уравнение на j-тото уравнение умножено с числото a ще означаваме с $R_i + aR_j$ и ще записваме по следния начин:

$$\text{Система } A \quad \xrightarrow{R_i+aR_j} \quad \text{Система } B.$$

Да забележим, че

ако системата B се получава от системата A чрез елементарно преобразуване, то всяко решение на системата A е решение на системата B.

Да забележим също, че ако системата B се получава от системата A чрез елементарно преобразуване, то е вярно и обратното: системата A се получава от системата B чрез елементарно преобразуване. Наистина, непосредствено се вижда, че

$$\begin{array}{lllll}
A & \xrightarrow{T_{ij}} & B & \xrightarrow{T_{ji}} & A, \\
A & \xrightarrow{aR_i} & B & \xrightarrow{a^{-1}R_i} & A, \ a \neq 0, \\
A & \xrightarrow{R_i+aR_j} & B & \xrightarrow{R_i-aR_j} & A, \ i \neq j.
\end{array}$$

Тъй като системата A може да получи обратно от системата B чрез елементарно преобразуване, то

всяко решение на системата B е решение на системата A.

Току що установихме следното важно

Твърдение 1.1. *Ако линейната система B се получава от линейната система A чрез елементарно преобразуване, то множеството от решения на системата B съвпада с множеството от решения на системата A.*

Следствие 1.1. *Ако линейната система B се получава от линейната система A чрез последователност от елементарни преобразувания, то множеството от решения на системата B съвпада с множеството от решения на системата A.*

В 1.4 ще опишем алгоритъм за преобразуването на произволна линейна система до линейна система в ешелонна форма чрез последователност от елементарни преобразувания. Този алгоритъм се нарича *метод на Гаус* и с негова помощ можем да намерим решенията на всяка линейна система.
Нека първо демонстрираме как метода на Гаус се прилага за намиране на решенията на конкретна линейна система. За да пишем по-малко, да забележим, че елементарните преобразувания на една линейна система съответстват на преобразувания на редовете на нейната разширена матрица.

Определение 1.5 (Елементарни преобразувания на редовете на матрица). *Елементарните преобразувания* на редовете на една матрица са:

1. Размяна на местата на два от редовете.
2. Умножение на някой от редовете с различно от нула число.
3. Прибавяне към някой от редовете на някой друг ред умножен с число.

Елементарните преобразувания на редовете на една матрица се означават по същия начин, по който се означават елементарните преобразувания на една линейна система.

Пример 1.3. Да се реши линейната система

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array} \right. \tag{1.2}$$

с метода на Гаус.

Решение. Преобразуваме разширената матрица на системата:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1,\ R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + 12R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Последната матрица е разширената матрица на следната линейна система в ешелонна форма:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & & & x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

След като намерим последователно неизвестните x_3, x_2, x_1, получаваме единственото решение $x = (2, -3, -1)$ на линейната система (1.2).

1.4 Метод на Гаус

Методът на Гаус е алгоритъм за преобразуването на произволна матрица до матрица в ешелонна форма чрез елементарни преобразувания на редовете.

Нека матрицата A има m реда и n стълба.

Метод на Гаус

1 случай. *Всички коефициенти в първия стълб на A са равни на* 0.

Тогава матрицата A изглежда по следния начин

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array} \right)$$

и методът на Гаус се прилага към матрицата B, която има $n-1$ стълба.

2 случай. *Първият стълб на A съдържа различен от* 0 *коефициент.*

В този случай извършваме следната последователност от елементарни преобразувания на редовете:

1. Избираме коефициент $a_{i1} \neq 0$ в първия стълб на A и разменяме местата на първия ред и i-тия ред:
$$A \xrightarrow{T_{1i}} A',$$
$$A' = \left(\begin{array}{c|c} a & a'_{12} \dots a'_{1n} \\ \hline a'_{21} & \\ \vdots & B' \\ a'_{m1} & \end{array} \right),$$
където $a = a_{i1} \neq 0$.

2. Умножаваме първия ред на A' с a^{-1}:
$$A' \xrightarrow{a^{-1}R_1} A'',$$
$$A'' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & a''_{12} \dots a''_{1n} \\ \hline a'_{21} & \\ \vdots & B' \\ a'_{m1} & \end{array} \right).$$

3. За всяко $i = 2, \dots, m$, умножаваме първия ред на A'' с $-a'_{i1}$ и го прибавяме към i-тия ред:
$$A'' \xrightarrow{R_2 - a'_{21}R_1,\ \dots,\ R_i - a'_{i1}R_1} A''',$$
$$A''' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & a''_{12} \dots a''_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & B''' \\ 0 & \end{array} \right).$$

4. Прилагаме метода на Гаус към матрицата B''', която има $n-1$ стълба.

Да забележим, че матрицата B в първия случай и матрицата B''' във втория случай имат един стълб по-малко от матрицата A. Затова прилагането на метода на Гаус ще доведе до матрица в ешелонна форма след не повече от n стъпки.

От метода на Гаус следва

Теорема 1.1. *Всяка матрица може да се преобразува до матрица в ешелонна форма с последователност от елементарни преобразувания на редовете.*

1.5 Брой на решенията на линейна система

Тривиалният пример

$$| \ 0 \cdot x_1 = 1$$

показва, че не всяка линейна система има решение. Линейна система, която няма решение се нарича *несъвместима*. По-общо, всяка линейна система, която съдържа уравнение от вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n \ = \ b \,, \quad b \neq 0, \tag{1.3}$$

е несъвместима. Ясно е, че една линейна система съдържа уравнение от вида (1.3) тогава и само тогава, когато нейната разширена матрица съдържа ред от вида

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & b \end{array} \right), \quad b \neq 0. \tag{1.4}$$

Ясно е също, че една линейна система в ешелонна форма, която не съдържа уравнение от вида (1.3), е съвместима, т.е. има поне едно решение.
Нека A е матрица в ешелонна форма с m реда и n стълба. Да означим с r броя на ненулевите редове на A. Тогава $r \leq n$, защото всеки ненулев ред започва с повече нули от предишния ред.

Твърдение 1.2. *Нека $(A \mid B)$ е разширената матрица на линейна система в ешелонна форма. Нека r е броят на ненулевите редове на матрицата на коефициентите A и нека r' е броят на ненулевите редове на разширената матрица $(A \mid B)$. Тогава*

а) ако $r < r'$, системата е несъвместима;

б) ако $r = r' = n$, системата има единствено решение;

в) ако $r = r' < n$, системата има безброй решения, като общото решение на системата зависи от $n - r$ параметъра.

Доказателство. а) Всеки ненулев ред на A увеличава r и r' с 1. Всеки ред на $(A \mid B)$ от вида (1.4) не променя r и увеличава r' с 1. Следователно $r = r'$ тогава и само тогава, когато $(A \mid B)$ не съдържа редове от вида (1.4).

б) Броят на ненулевите редове r на A е равен на броя на водещите неизвестни. Ако $r = r' = n$, всички неизвестни са водещи неизвестни и решението на линейната система е единствено.

в) Тъй като броят на водещите неизвестни е r, броят на свободните неизвестни е $n - r$. Следователно общото решение зависи от $n - r$ параметъра. Ако $r = r' < n$, то поне една от неизвестните е свободна, а общото решение зависи от поне един параметър. □