Лекция 11

Линейни оператори. Ядро и образ на линеен оператор

11.1 Определение на линеен оператор

Нека $V = \mathbb{R}^n$ е фиксирано линейно пространство.

Определение 11.1. Казваме, че изображението $\varphi : V \to V$ е линеен оператор, когато φ изпълнява следните условия:

а) $\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$ за всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ от V;

б) $\varphi(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$ за всяко число λ и всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от V.

От Определение 11.1 следва, че

$$\varphi(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k) = \lambda_1\varphi(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2\varphi(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + \lambda_k\varphi(\boldsymbol{x}_k) \tag{11.1}$$

за всички числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ и всички вектори $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ от $\mathbb{R}^n$.

Забележка. Тъй като $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0}) + \varphi(\mathbf{0})$, то $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ за всеки линеен оператор $\varphi : V \to V$. Също така, за всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ от V е в сила $\varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{y})$.

Пример 11.1. Нека $A = (a_{ij})$ е матрица с n реда и n стълба,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

и нека $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е изображението, зададено с

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

За да покажем, че φ е линеен оператор, да забележим, че

$$\varphi(X) = AX, \quad \text{където } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогава от свойствата на умножението на матрици получаваме:

а) $\varphi(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = \varphi(X) + \varphi(Y)$;

б) $\varphi(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda\varphi(X)$.

Тези тъждества показват, че изображението φ е линеен оператор. В следващия параграф ще установим (виж Твърдение 11.1), че всеки линеен оператор има аналогично представяне.

11.2 Матрица на линеен оператор в даден базис

Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е базис на V и нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор. Тогава векторите $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ се представят по единствен начин като линейни комбинации на базисните вектори $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{array}{l} \varphi(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(\boldsymbol{e}_n) = a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{array}.$$

Горните n равенства могат да се запишат като едно матрично равенство:

$$\left(\varphi(\boldsymbol{e}_1)\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)\ \dots\ \varphi(\boldsymbol{e}_n)\right) = \left(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \dots\ \boldsymbol{e}_n\right) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}.$$

Ясно е, че матрицата A се определя еднозначно от линейния оператор φ и базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$:

1-ви стълб на A: координати на $\varphi(\boldsymbol{e}_1)$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

2-ри стълб на A: координати на $\varphi(\boldsymbol{e}_2)$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

....

n-ти стълб на A: координати на $\varphi(\boldsymbol{e}_n)$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

Определение 11.2 (Матрица на линеен оператор в даден базис)**.** Матрицата $A \in M_n(\mathbb{R})$ се нарича *матрица на линейния оператор φ в базиса* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

Нека векторът $\boldsymbol{x}$ има координати $x_1, x_2, \dots, x_n$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Тогава според основното тъждество (11.1)

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = x_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + x_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \dots + x_n\varphi(\boldsymbol{e}_n).$$

Да запишем $\varphi(\boldsymbol{x})$ като произведение на ред и стълб:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_2) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Сега, използвайки матрицата A на φ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, получаваме:

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Формула (11.2) изразява координатите на вектора $\varphi(\boldsymbol{x})$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ чрез координатите на вектора $\boldsymbol{x}$ и елементите на матрицата A на φ в същия базис.

Твърдение 11.1. *Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е базис на линейното пространство V и нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с матрица $A = (a_{ij})$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Ако $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\varphi(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + y_n\boldsymbol{e}_n$, то*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказателство. Следва непосредствено от формула (11.2).

11.3 Действия с линейни оператори

11.3.1 Събиране на линейни оператори

Нека $\varphi, \psi : V \to V$ са линейни оператори и нека $\varphi + \psi : V \to V$ е изображението, зададено с

$$(\varphi + \psi)(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in V.$$

Тогава изображението $\varphi + \psi$ е линеен оператор. Наистина

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = [\varphi(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y})]+[\psi(\boldsymbol{x})+\psi(\boldsymbol{y})] = \\ &= [\varphi(\boldsymbol{x})+\psi(\boldsymbol{x})]+[\varphi(\boldsymbol{y})+\psi(\boldsymbol{y})] = (\varphi+\psi)(\boldsymbol{x})+(\varphi+\psi)(\boldsymbol{y}), \\ (\varphi+\psi)(\lambda\boldsymbol{x}) &= \varphi(\lambda\boldsymbol{x})+\psi(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})+\lambda\psi(\boldsymbol{x}) = \\ &= \lambda[\varphi(\boldsymbol{x})+\psi(\boldsymbol{x})] = \lambda[(\varphi+\psi)(\boldsymbol{x})]\end{aligned}$$

за всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ от V и всяко реално число λ.

Твърдение 11.2. *Ако φ (съотв. ψ) има матрица A (съотв. B) в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то $\varphi + \psi$ има матрица $A + B$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.*

Доказателство. Използвайки определението на $\varphi + \psi$, получаваме

$$\begin{aligned}&\big(\,(\varphi+\psi)(\boldsymbol{e}_1)\ (\varphi+\psi)(\boldsymbol{e}_2)\ \ldots\ (\varphi+\psi)(\boldsymbol{e}_n)\,\big) = \\ &= \big(\,\varphi(\boldsymbol{e}_1)+\psi(\boldsymbol{e}_1)\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)+\psi(\boldsymbol{e}_2)\ \ldots\ \varphi(\boldsymbol{e}_n)+\psi(\boldsymbol{e}_n)\,\big) = \\ &= \big(\,\varphi(\boldsymbol{e}_1)\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)\ \ldots\ \varphi(\boldsymbol{e}_n)\big) + \big(\,\psi(\boldsymbol{e}_1)\ \psi(\boldsymbol{e}_2)\ \ldots\ \psi(\boldsymbol{e}_n)\,\big) = \\ &= \big(\,\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n\,\big)A + \big(\,\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n\,\big)B = \big(\,\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n\,\big)(A+B).\end{aligned}$$

11.3.2 Умножение на линеен оператор с число

Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор и нека α е реално число. Нека $\alpha\varphi : V \to V$ е изображението, зададено с

$$(\alpha\varphi)(\boldsymbol{x}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in V.$$

Тогава изображението $\alpha\varphi$ е линеен оператор. Наистина

$$\begin{aligned}(\alpha\varphi)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \alpha\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y}) = (\alpha\varphi)(\boldsymbol{x})+(\alpha\varphi)(\boldsymbol{y}), \\ (\alpha\varphi)(\lambda\boldsymbol{x}) &= \alpha[\varphi(\lambda\boldsymbol{x})] = \alpha[\lambda\varphi(\boldsymbol{x})] = \lambda[\alpha\varphi(\boldsymbol{x})] = \lambda(\alpha\varphi)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

за всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ от V и всяко реално число λ.

Твърдение 11.3. *Ако φ има матрица A в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то $\alpha\varphi$ има матрица αA в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.*

Доказателство. Използвайки определението на $\alpha\varphi$, получаваме

$$\begin{aligned}&\big(\,(\alpha\varphi)(\boldsymbol{e}_1)\ (\alpha\varphi)(\boldsymbol{e}_2)\ \ldots\ (\alpha\varphi)(\boldsymbol{e}_n)\,\big) = \big(\,\alpha\varphi(\boldsymbol{e}_1)\ \alpha\varphi(\boldsymbol{e}_2)\ \ldots\ \alpha\varphi(\boldsymbol{e}_n)\,\big) = \\ &= \alpha\big(\,\varphi(\boldsymbol{e}_1)\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)\ \ldots\ \varphi(\boldsymbol{e}_n)\,\big) = \alpha\left[\big(\,\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n\,\big)A\right] = \big(\,\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n\,\big)(\alpha A).\end{aligned}$$

11.3.3 Композиция на линейни оператори

Нека $\varphi, \psi : V \to V$ са линейни оператори и нека $\varphi\psi : V \to V$ е изображението, зададено с

$$(\varphi\psi)(\boldsymbol{x}) = \varphi(\psi(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} \in V.$$

Тогава изображението $\varphi\psi$ е линеен оператор. Наистина

$$\begin{aligned}\varphi\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \varphi(\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = \varphi(\psi(\boldsymbol{x})+\psi(\boldsymbol{y})) = \\ &= \varphi(\psi(\boldsymbol{x}))+\varphi(\psi(\boldsymbol{y})) = \varphi\psi(\boldsymbol{x})+\varphi\psi(\boldsymbol{y}), \\ \varphi\psi(\lambda\boldsymbol{x}) &= \varphi(\psi(\lambda\boldsymbol{x})) = \varphi(\lambda\varphi(\boldsymbol{x})) = \lambda\varphi(\psi(\boldsymbol{x})) = \lambda\varphi\psi(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

за всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ от V и всяко реално число λ.
Линейният оператор $\varphi\psi$ се нарича *композиция* на операторите φ и ψ.

Твърдение 11.4. *Ако φ (съотв. ψ) има матрица A (съотв. B) в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, то $\varphi\psi$ има матрица AB в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$.*

Доказателство. Нека $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Тогава

$$\begin{array}{l} \psi(\boldsymbol{e}_1) = b_{11}\boldsymbol{e}_1 + b_{21}\boldsymbol{e}_2 + \dots + b_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \psi(\boldsymbol{e}_2) = b_{12}\boldsymbol{e}_1 + b_{22}\boldsymbol{e}_2 + \dots + b_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi(\boldsymbol{e}_n) = b_{1n}\boldsymbol{e}_1 + b_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \dots + b_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{array}.$$

Прилагайки линейния оператор φ към горните равенства, получаваме:

$$\begin{array}{l} \varphi\psi(\boldsymbol{e}_1) = b_{11}\varphi(\boldsymbol{e}_1) + b_{21}\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \dots + b_{n1}\varphi(\boldsymbol{e}_n) \\ \varphi\psi(\boldsymbol{e}_2) = b_{12}\varphi(\boldsymbol{e}_1) + b_{22}\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \dots + b_{n2}\varphi(\boldsymbol{e}_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi\psi(\boldsymbol{e}_n) = b_{1n}\varphi(\boldsymbol{e}_1) + b_{2n}\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \dots + b_{nn}\varphi(\boldsymbol{e}_n) \end{array},$$

откъдето

$$\big(\, \varphi\psi(\boldsymbol{e}_1)\ \varphi\psi(\boldsymbol{e}_2)\ \dots\ \varphi\psi(\boldsymbol{e}_n) \,\big) = \big(\, \varphi(\boldsymbol{e}_1)\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)\ \dots\ \varphi(\boldsymbol{e}_n) \,\big) B.$$

Следователно

$$\begin{aligned} \big(\, \varphi\psi(\boldsymbol{e}_1)\ \varphi\psi(\boldsymbol{e}_2)\ \dots\ \varphi\psi(\boldsymbol{e}_n) \,\big) &= \big(\, \varphi(\boldsymbol{e}_1)\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)\ \dots\ \varphi(\boldsymbol{e}_n) \,\big) B = \\ &= \big[\big(\, \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \dots\ \boldsymbol{e}_n \,\big) A \big]\, B = \\ &= \big(\, \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \dots\ \boldsymbol{e}_n \,\big) AB, \end{aligned}$$

което трябваше да се докаже.

11.4 Смяна на базиса

Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$ са два базиса на V и нека T е матрицата на преход от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ към базиса $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$:

$$\big(\, \boldsymbol{e}'_1\ \boldsymbol{e}'_2\ \dots\ \boldsymbol{e}'_n \,\big) = \big(\, \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \dots\ \boldsymbol{e}_n \,\big) T, \quad \big(\, \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \dots\ \boldsymbol{e}_n \,\big) = \big(\, \boldsymbol{e}'_1\ \boldsymbol{e}'_2\ \dots\ \boldsymbol{e}'_n \,\big) T^{-1}.$$

Твърдение 11.5 (Смяна на базиса)**.** *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с матрица A в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Тогава φ има матрица $T^{-1}AT$ в базиса $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$.*

Доказателство. Нека $T = (t_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Тогава

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{e}'_1 = t_{11}\boldsymbol{e}_1 + t_{21}\boldsymbol{e}_2 + \dots + t_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}'_2 = t_{12}\boldsymbol{e}_1 + t_{22}\boldsymbol{e}_2 + \dots + t_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{e}'_n = t_{1n}\boldsymbol{e}_1 + t_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \dots + t_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{array}.$$

Прилагайки линейния оператор φ към горните равенства, получаваме:

$$\begin{array}{l} \varphi(\boldsymbol{e}'_1) = t_{11}\varphi(\boldsymbol{e}_1) + t_{21}\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \dots + t_{n1}\varphi(\boldsymbol{e}_n) \\ \varphi(\boldsymbol{e}'_2) = t_{12}\varphi(\boldsymbol{e}_1) + t_{22}\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \dots + t_{n2}\varphi(\boldsymbol{e}_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(\boldsymbol{e}'_n) = t_{1n}\varphi(\boldsymbol{e}_1) + t_{2n}\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \dots + t_{nn}\varphi(\boldsymbol{e}_n) \end{array}.$$

откъдето

$$\big(\,\varphi(\boldsymbol{e}'_1)\ \varphi(\boldsymbol{e}'_2)\ \dots\ \varphi(\boldsymbol{e}'_n)\,\big) = \big(\,\varphi(\boldsymbol{e}_1)\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)\ \dots\ \varphi(\boldsymbol{e}_n)\,\big)T.$$

Следователно

$$\begin{aligned}\big(\,\varphi(\boldsymbol{e}'_1)\ \varphi(\boldsymbol{e}'_2)\ \dots\ \varphi(\boldsymbol{e}'_n)\,\big) &= \big(\,\varphi(\boldsymbol{e}_1)\ \varphi(\boldsymbol{e}_2)\ \dots\ \varphi(\boldsymbol{e}_n)\,\big)T = \\ &= \big(\,\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \dots\ \boldsymbol{e}_n\,\big)AT = \\ &= \big(\,\boldsymbol{e}'_1\ \boldsymbol{e}'_2\ \dots\ \boldsymbol{e}'_n\,\big)T^{-1}AT.\end{aligned}$$

което трябваше да се докаже.

Пример 11.2. Нека линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е зададен с формулата

$$\varphi(x_1, x_2) = (11x_1 - 4x_2, 30x_1 - 11x_2)$$

и нека $\boldsymbol{e}_1 = (1,0),\ \boldsymbol{e}_2 = (0,1)$ е стандартният базис на $\mathbb{R}^2$. Тогава

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \varphi(1,0) = (11,30) &= 11\boldsymbol{e}_1 + 30\boldsymbol{e}_2, \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) = \varphi(0,1) = (-4,-11) &= -4\boldsymbol{e}_1 - 11\boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

Следователно линейният оператор φ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$$

в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

Нека $\boldsymbol{e}'_1 = (2,5),\ \boldsymbol{e}'_2 = (1,3)$. Тогава

$$\big(\,\boldsymbol{e}'_1\ \boldsymbol{e}'_2\,\big) = \big(\,\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\,\big)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}_{T}.$$

Следователно линейният оператор φ има матрица

$$\begin{aligned}A' = T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

в базиса $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$.

11.5 Ядро и образ на линеен оператор

Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор.

Определение 11.3 (Ядро на линеен оператор)**.** Множеството от всички вектори $\boldsymbol{x} \in V$, такива че $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, се нарича *ядро* на линейния оператор φ и се означава с $\operatorname{Ker}\varphi$:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{\,\boldsymbol{x} \in V\ :\ \varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\,\}.$$

Да покажем, че ядрото $\operatorname{Ker}\varphi$ на всеки линеен оператор φ е линейно подпространство на V:

а) $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, откъдето $\mathbf{0} \in \operatorname{Ker}\varphi$;

б) ако $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, откъдето $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}\varphi$;

в) ако λ е реално число и $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, откъдето $\lambda\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}\varphi$.

Използвайки ядрото на един линеен оператор φ, ние можем да установим дали φ е инективно изображение:

Твърдение 11.6. *Линейният оператор* $\varphi : V \to V$ *е инективно изображение тогава и само тогава, когато* $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

Доказателство. Нека φ е инективно изображение. Тогава от $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ следва, че $\varphi(\boldsymbol{x}) \neq \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Следователно $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ само за $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, т.е. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$. Обратно, нека $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$. Ако $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{y})$, то $\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$. Тогава $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}\varphi$ и тъй като $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Следователно, ако $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, то $\varphi(\boldsymbol{x}) \neq \varphi(\boldsymbol{y})$, т.е. φ е инективно изображение.

Определение 11.4 (Образ на линеен оператор)**.** Множеството от всички вектори $\boldsymbol{v}$ от V, такива че $\boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{x})$ за някой вектор $\boldsymbol{x} \in V$, се нарича *образ* на линейния оператор φ и се означава с $\operatorname{Im}\varphi$:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\, \boldsymbol{v} \in V \;:\; \boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{x}) \text{ за някой } \boldsymbol{x} \in V \,\}.$$

Да покажем, че образът $\operatorname{Im}\varphi$ на всеки линеен оператор φ е линейно подпространство на V:

а) $\mathbf{0} = \varphi(\mathbf{0})$, откъдето $\mathbf{0} \in \operatorname{Im}\varphi$;

б) ако $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \operatorname{Im}\varphi$, то $\boldsymbol{v} = \varphi(x)$, $\boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{y})$ за някои $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Тогава $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$, откъдето $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \in \operatorname{Im}\varphi$;

в) ако λ е реално число и $\boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im}\varphi$, то $\lambda\boldsymbol{v} = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\lambda\boldsymbol{x})$, откъдето $\lambda\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im}\varphi$.

Между размерностите на линейните подпространства $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ съществува следната зависимост:

Теорема 11.1. *Нека* $\varphi : V \to V$ *е линеен оператор. Тогава*

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V.$$

Доказателство. Нека $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ е базис на $\operatorname{Ker}\varphi$. Да допълним линейно независимата система $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ до базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ на V (виж Твърдение 7.5).

Тогава векторите $\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ образуват базис на $\operatorname{Im}\varphi$. За да докажем това, нека установим, че:

а) всеки вектор $\boldsymbol{v}$ от $\operatorname{Im}\varphi$ е линейна комбинация на $\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$;

Нека $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im}\varphi$. Тогава $\boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{x})$ за някой вектор $\boldsymbol{x} \in V$. Тъй като $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е базис на V, векторът $\boldsymbol{x}$ е линейна комбинация на $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{e}_k + x_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Следователно

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{x}) &= x_1 \underbrace{\varphi(\boldsymbol{e}_1)}_{\mathbf{0}} + \cdots + x_k \underbrace{\varphi(\boldsymbol{e}_k)}_{\mathbf{0}} + x_{k+1}\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}) + \cdots + x_n\varphi(\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_{k+1}\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}) + \cdots + x_n\varphi(\boldsymbol{e}_n),\end{aligned}$$

т.е. векторът $\boldsymbol{v}$ е линейна комбинация на $\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$.

б) векторите $\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ са линейно независими.

Нека реалните числа $x_{k+1}, \dots, x_n$ са такива, че

$$x_{k+1}\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}) + \cdots + x_n\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \mathbf{0}.$$

Тогава

$$\varphi(x_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_{k+1}\varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}) + \cdots + x_n\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \mathbf{0},$$

откъдето $x_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тъй като $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ е базис на $\operatorname{Ker}\varphi$, то съществуват реални числа $x_1, \dots, x_k$, такива че

$$x_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{e}_k.$$

Записвайки последното равенство като

$$(-x_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (-x_k)\boldsymbol{e}_k + x_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0},$$

виждаме, че

$$x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0,$$

защото $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n$ са линейно независими вектори. Следователно векторите $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ са линейно независими.

Сега $\dim\operatorname{Ker}\varphi = k$, $\dim\operatorname{Im}\varphi = n - k$ и $\dim V = n$, откъдето следва твърдението на теоремата.

Следствие 11.7. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор. Тогава следните условия са еквивалентни:*

а) изображението φ е инективно;

б) изображението φ е сюрективно;

в) изображението φ е биективно.

Доказателство. Едно изображение φ е биективно, точно когато φ е инективно и сюрективно изображение. Затова е достатъчно да докажем, че условия а) и б) са еквивалентни.
Според Твърдение 11.6 φ е инективно изображение, когато $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 0$. Изображението $\varphi : V \to V$ е сюрективно, когато $\operatorname{Im} \varphi = V$, т.е. когато $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$ (вижте подточка б) на Твърдение 4.8). Сега от равенството $\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$ следва, че $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 0$ тогава и само тогава, когато $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$, т.е. условия а) и б) са еквивалентни.