Лекция 12

Собствени стойности и собствени вектори на линеен оператор

12.1 Изоморфизми на линейно пространство

Нека $V = \mathbb{R}^n$ е фиксирано линейно пространство и нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор.

Определение 12.1. Казваме, че линейният оператор $\varphi : V \to V$ е *изоморфизъм*, когато φ е биективно изображение. Това означава, че φ изпълнява следните условия:

а) φ е инективно изображение: ако $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$, то $\varphi(\boldsymbol{x}_1) \neq \varphi(\boldsymbol{x}_2)$;

б) φ е сюрективно изображение: за всеки вектор $\boldsymbol{v}$ от V съществува вектор $\boldsymbol{x}$ от V, такъв че $\boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{x})$.

Забележка. Условия а) и б) са еквивалентни според Следствие 11.7.

Нека $\varphi : V \to V$ е изоморфизъм. Тогава от условия а) и б) следва, че за всеки вектор $\boldsymbol{v}$ от V съществува *единствен* вектор $\boldsymbol{x}$ от V, такъв че $\boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{x})$. Да определим изображение $\varphi^{-1} : V \to V$ по следния начин:

$$\boxed{\varphi^{-1}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}, \text{ където } \boldsymbol{x} \text{ е единственият вектор от } V, \text{ такъв че } \boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{x}).}$$

От определението на изображението φ^{-1} следва, че

$$\varphi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{v})) = \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}, \quad \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x} \tag{12.1}$$

за всички вектори $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}$ от V.

Лема 12.1. *Ако линейният оператор $\varphi : V \to V$ е изоморфизъм, то изображението $\varphi^{-1} : V \to V$ е линеен оператор. Нещо повече, φ^{-1} също е изоморфизъм.*

Доказателство. Трябва да покажем, че φ^{-1} е линеен оператор, който е изоморфизъм.
Нека $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ са вектори от V и нека $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ са единствените вектори от V, такива че $\boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{y})$. Тогава $\varphi^{-1}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}, \varphi^{-1}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y}$. Тъй като $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$, то $\varphi^{-1}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Следователно

$$\varphi^{-1}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{v}) + \varphi^{-1}(\boldsymbol{u})$$

за всички вектори $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ от V.
Нека $\boldsymbol{v}$ е вектор от V и нека $\boldsymbol{x}$ е единственият вектор от V, такъв че $\boldsymbol{v} = \varphi(x)$. Тъй като за всяко реално число λ е в сила $\lambda\boldsymbol{v} = \lambda\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\lambda\boldsymbol{x})$, то $\varphi^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{x}$. Следователно

$$\varphi^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{x} = \lambda\varphi^{-1}(\boldsymbol{v})$$

за всяко реално число λ и всеки вектор $\boldsymbol{v}$ от V.
Нека $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{u}$ са вектори от V. Тъй като $\varphi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{v})) = \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{u} = \varphi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{u}))$, то $\varphi^{-1}(\boldsymbol{v}) \neq \varphi^{-1}(\boldsymbol{u})$. Следователно линейният оператор φ^{-1} е инективен, откъдето следва, че φ^{-1} е изоморфизъм.

Забележка. Нека $\mathrm{id} : V \to V$ е тъждественото изображение на линейното пространство V, зададено с

$$\mathrm{id}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in V.$$

Изображението id е линеен оператор с матрица E_n във всеки базис на V. Обратно, ако $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с матрица E_n в някой базис на V, то $\varphi = \mathrm{id}$.

От равенства (12.1) и от определението на композиция на линейни оператори следва, че

$$\varphi\varphi^{-1} = \mathrm{id}, \quad \varphi^{-1}\varphi = \mathrm{id}.$$

Твърдение 12.2. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор и нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ е базис на V. Тогава φ е изоморфизъм, точно когато матрицата A на φ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ е обратима. Ако φ е изоморфизъм, то линейният оператор φ^{-1} има матрица A^{-1} в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.*

Доказателство. Нека φ е изоморфизъм и нека A (съотв. B) е матрицата на φ (съотв. φ^{-1}) в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Тогава AB е матрицата на композицията $\varphi\varphi^{-1}$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Тъй като $\varphi\varphi^{-1} = \mathrm{id}$, то $AB = E_n$. Аналогично, от $\varphi^{-1}\varphi = \mathrm{id}$ получаваме $BA = E_n$. Сега от равенствата $AB = BA = E_n$ следва, че A е обратима матрица и $B = A^{-1}$.
Обратно, нека матрицата A на оператора φ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ е обратима. Нека $\psi : V \to V$ е линейният оператор, който има матрица A^{-1} в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Тогава от равенствата $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ следва, че

$$\varphi\psi = \psi\varphi = \mathrm{id}.$$

В частност $\psi(\varphi(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$, за всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от V. Ако сега $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, то от $\psi(\varphi(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} = \psi(\varphi(\boldsymbol{y}))$ получаваме, че $\varphi(\boldsymbol{x}) \neq \varphi(\boldsymbol{y})$. Следователно φ е инективно изображение, откъдето следва, че φ е изоморфизъм.

12.2 Детерминанта на линеен оператор

Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$ са два базиса на V и нека T е матрицата на преход от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ към базиса $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$. Нека A (съотв. A') е матрицата на φ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ (съотв. $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$). Тогава $A' = T^{-1}AT$, според Твърдение 11.5. Следователно

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det(T^{-1}AT) = \det(T^{-1})\det(A)\det(T) = \\ &= \frac{1}{\det(T)}\det(A)\det(T) = \det(A). \end{aligned}$$

Ние виждаме, че детерминантата на матрицата на φ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ съвпада с детерминантата на матрицата на φ в базиса $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n$. Това ни позволява да дадем следното определение:

Определение 12.2 (Детерминанта на линеен оператор)**.** Детерминантата на матрицата на линейния оператор $\varphi : V \to V$ в някой/всеки базис на V се нарича *детерминанта на линейния оператор* φ и се означава с $\det(\varphi)$.

Твърдение 12.3. *Линейният оператор $\varphi : V \to V$ е изоморфизъм, точно когато* $\det(\varphi) \neq 0$.

Доказателство. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е базис на V. Според Твърдение 12.2 φ е изоморфизъм, точно когато матрицата A на φ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е обратима. Тъй като според Твърдение 10.5 матрицата A е обратима, точно когато $\det(A) \neq 0$, доказателството на твърдението е завършено.

Следствие 12.4. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор. Тогава следните условия са еквивалентни:*

а) $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{\mathbf{0}\}$;

б) $\operatorname{Im}\varphi \subsetneqq V$;

в) $\det(\varphi) = 0$.

Доказателство. Достатъчно е да забележим, че всяко от тези три условия се изпълнява тогава и само тогава, когато φ *не е* изоморфизъм.

12.3 Собствени вектори и собствени стойности на линеен оператор

Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор.

Определение 12.3 (Собствен вектор на линеен оператор)**.** Казваме, че векторът $\boldsymbol{x}$ от V е *собствен вектор на линейния оператор* φ, когато $\boldsymbol{x}$ изпълнява следните две условия:

а) $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$;

б) $\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ за някое число λ.

Числото λ се нарича *собствена стойност* на собствения вектор $\boldsymbol{x}$.

Забележка. Ако $\boldsymbol{x}$ е собствен вектор на линейния оператор φ, то $\boldsymbol{x}$ има само една собствена стойност. Наистина, от $\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} = \lambda' \boldsymbol{x}$ следва, че $(\lambda - \lambda')\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, откъдето $\lambda - \lambda' = 0$, защото $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Определение 12.4 (Собствена стойност на линеен оператор)**.** Казваме, че числото λ е *собствена стойност на линейния оператор* φ, когато съществува собствен вектор $\boldsymbol{x}$ на φ със собствена стойност λ.

Теорема 12.1. *Числото λ е собствена стойност на линейния оператор φ, точно когато* $\det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$.

Доказателство. Ясно е, че равенството $\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ е в сила тогава и само тогава, когато $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Следователно числото λ е собствена стойност на φ, точно когато съществува вектор $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, такъв че $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, т.е. точно когато $\mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\}$. Според Следствие 12.4, $\mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\}$ тогава и само тогава, когато $\det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$, което трябваше да се докаже.

Твърдение 12.5. *Функцията $\chi_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$ е полином на λ от степен n, където $n = \dim V$.*

Доказателство. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е базис на V и нека $A = (a_{ij})$ е матрицата на φ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Тъй като линейният оператор $\lambda\,\mathrm{id}$ има матрица

$$\lambda E_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, линейният оператор $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ има матрица

$$A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Следователно функцията

$$\chi_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

е полином на λ. Степента на полинома $\chi_\varphi(\lambda)$ е равна на n, защото събираемото от най-висока степен на λ в развитието на детерминантата е произведението на диагоналните елементи $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$.

Определение 12.5 (Характеристичен полином на линеен оператор)**.** Полиномът $\chi_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$ се нарича *характеристичен полином на линейния оператор φ*.

Следствие 12.6. *Собствените стойности на оператора φ са корените на характеристичния полином $\chi_\varphi(\lambda)$.*

Доказателство. Това следва непосредствено от определението на характеристичния полином $\chi_\varphi(\lambda)$ и Теорема 12.1.

12.4 Диагонализируеми линейни оператори

Определение 12.6 (Диагонална матрица)**.** Матрицата $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}^n)$ се нарича *диагонална*, когато $a_{ij} = 0$ за $i \neq j$.

Всяка диагонална матрица A изглежда по следния начин:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Определение 12.7 (Диагонализируем оператор)**.** Казваме, че линейният оператор $\varphi : V \to V$ е *диагонализируем*, когато съществува базис на V, в който матрицата на φ е диагонална.

Лема 12.7. *Линейният оператор $\varphi : V \to V$ е диагонализируем, тогава и само тогава, когато съществува базис на V, който се състои от собствени вектори на φ.*

Доказателство. Нека матрицата A на φ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е диагонална:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тъй като стълбовете на A са координатите на векторите $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, то

$$\begin{array}{l} \varphi(\boldsymbol{e}_1) = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + 0\,\boldsymbol{e}_2 + \dots + 0\,\boldsymbol{e}_n = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) = 0\,\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + 0\,\boldsymbol{e}_n = \lambda_2\boldsymbol{e}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(\boldsymbol{e}_n) = 0\,\boldsymbol{e}_1 + 0\,\boldsymbol{e}_2 + \dots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \lambda_n\boldsymbol{e}_n \end{array}.$$

Следователно $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ са собствени вектори на φ със собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ съответно.
Обратно, ако базисът $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ се състои от собствени вектори на φ, то

$$\begin{array}{l} \varphi(\boldsymbol{e}_1) = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + 0\,\boldsymbol{e}_2 + \dots + 0\,\boldsymbol{e}_n \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) = \lambda_2\boldsymbol{e}_2 = 0\,\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + 0\,\boldsymbol{e}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(\boldsymbol{e}_n) = \lambda_n\boldsymbol{e}_n = 0\,\boldsymbol{e}_1 + 0\,\boldsymbol{e}_2 + \dots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n \end{array}.$$

След като запишем координатите на векторите $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ като стълбове, виждаме че матрицата на оператора φ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

т.е. матрицата на φ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е диагонална.

Забележка. Съществуват линейни оператори, които не са диагонализируеми. Например, линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, зададен с

$$\varphi(x_1, x_2) = (0, x_1), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

не е диагонализируем, т.е. не съществува базис на $\mathbb{R}^2$, който се състои от собствени вектори на φ.

Нека векторът $\boldsymbol{x} \in V$ е такъв, че $\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ за някое число λ. Тогава за всяко число μ е в сила $(\varphi - \mu\,\mathrm{id})(\boldsymbol{x}) = \varphi(x) - \mu\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} - \mu\boldsymbol{x} = (\lambda - \mu)\boldsymbol{x}$. Следователно за всички числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ е в сила

$$(\varphi - \mu_1\,\mathrm{id})(\varphi - \mu_2\,\mathrm{id})\ldots(\varphi - \mu_k\,\mathrm{id})(\boldsymbol{x}) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)\ldots(\lambda - \mu_s)\boldsymbol{x}. \tag{12.2}$$

Лема 12.8. *Нека $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са собствени вектори на φ със собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Ако $\lambda_i \neq \lambda_j$ за $i \neq j$, векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са линейно независими.*

Доказателство. Нека $\varphi_i : V \to V$ е линейният оператор, зададен с

$$\varphi_i = \frac{(\varphi - \lambda_1)\ldots\widehat{(\varphi - \lambda_i)}\ldots(\varphi - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_1)\ldots\widehat{(\lambda_i - \lambda_i)}\ldots(\lambda_i - \lambda_k)}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Тогава от (12.2) следва (проверете това!), че

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}_j) = \begin{cases} \boldsymbol{x}_i, & \text{когато } i = j. \\ \boldsymbol{0}, & \text{когато } i \neq j. \end{cases} \tag{12.3}$$

Нека сега $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k$ са реални числа, такива че

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_i\boldsymbol{x}_i + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}.$$

Тогава за всяко $i = 1, \ldots, k$ е в сила

$$\varphi_i(\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_i\boldsymbol{x}_i + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k) = \varphi_i(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0},$$

откъдето следва, че

$$\alpha_1 \underbrace{\varphi_i(\boldsymbol{x}_1)}_{\boldsymbol{0}} + \cdots + \alpha_i \underbrace{\varphi_i(\boldsymbol{x}_i)}_{\boldsymbol{x}_i} + \cdots + \alpha_k \underbrace{\varphi_i(\boldsymbol{x}_k)}_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Прилагайки (12.3), получаваме $\alpha_i\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$, $i = 1, \ldots, k$, откъдето $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Доказателството на лемата е завършено.

Твърдение 12.9. *Нека линейният оператор $\varphi : V \to V$ има n различни собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, където $n = \dim V$. Тогава φ е диагонализируем.*

Доказателство. Нека $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ са собствени вектори на φ със собствени стойности съответно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогава векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ са линейно независими според Лема 12.8. Следователно $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ е базис на V, който се състои от собствени вектори на φ, т.е. φ е диагонализируем линеен оператор.

Забележка. Съществуват линейни оператори, които са диагонализируеми, но не изпълняват условието на Твърдение 12.9. Когато $\dim V > 1$, тъждественото изображение $\mathrm{id} : V \to V$ е пример на такъв линеен оператор,