Лекция 13

Евклидови пространства. Метод на Грам и Шмид

13.1 Евклидови пространства

Нека $V = \mathbb{R}^n$ е линейно пространство.

Определение 13.1 (Евклидово скаларно произведение)**.** Казваме, че функцията

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x, y & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

е *евклидово скаларно произведение* във V, когато тя изпълнява следните условия:

а) *билинейност:* за всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ от V и всяко число λ е в сила

$$\begin{array}{ll} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}), & (\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}'), & (\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}); \end{array}$$

б) *симетричност:* за всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ от V е в сила $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$;

в) *положителна дефинитност:* за всеки вектор $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ е в сила $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$.

От билинейността на скаларното произведение следва, че

$$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}) = 0, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 0$$

за всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ от V. От положителната дефинитност на скаларното произведение следва, че $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ само когато $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Определение 13.2 (Евклидово пространство)**.** Линейно пространство V, в което е дефинирано евклидово скаларно произведение, се нарича *евклидово пространство*.

За всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от V нека $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$. Реалното число $|\boldsymbol{x}| \geq 0$ се нарича *дължина* на вектора $\boldsymbol{x}$. Ясно е, че $|\boldsymbol{x}| = 0$ само когато $\boldsymbol{x} = 0$.

Пример 13.1 (Стандартно скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$). Да дефинираме скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$ по следния начин:

ако $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ то

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{13.1}$$

Да проверим, че така дефинираната функция $V \times V \to \mathbb{R}$ е наистина евклидово скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$.

Билинейност: Нека

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ \boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n),\ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Тогава $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_n + x'_n)$, откъдето

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) &= (x_1 + x'_1)y_1 + (x_2 + x'_2)y_2 + (x_n + x'_n)y_n = \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n) = \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

По аналогичен начин се проверява, че $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')$ за всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ от $\mathbb{R}^n$.
Нека λ е реално число и $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогава $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$, $\lambda\boldsymbol{y} = (\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_n)$, откъдето

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (\lambda x_1)y_1 + (\lambda x_2)y_2 + \cdots + (\lambda x_n)y_n = \\ &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) &= x_1(\lambda y_1) + x_2(\lambda y_2) + \cdots + x_n(\lambda y_n) = \\ &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

Симетричност: Нека $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Тогава

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Положителна дефинитност: Нека $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогава

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0.$$

Ако $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, то $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, т.е. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
Следователно формула (13.1) определя евклидово скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$. Линейното пространство $\mathbb{R}^n$, разглеждано със стандартното скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$, е евклидово пространство. Да отбележим, че дължината на вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ се пресмята с добре известната формула

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Отсега нататък ще предполагаме, че V е евклидово пространство.

Твърдение 13.1 (Неравенство на Коши-Буняковски-Шварц)**.** *За всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ от V е в сила неравенството*

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|. \tag{13.2}$$

В (13.2) *се достига равенство тогава и само тогава, когато векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ са линейно зависими.*

Доказателство. Ако $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, то $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, $|\boldsymbol{x}| = 0$ и (13.2) е изпълнено.
Нека $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ и нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функцията зададена с

$$f(t) = (t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Функцията $f(t)$ е полином на t от втора степен:

$$\begin{aligned} f(t) &= (t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \\ &= (t\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \\ &= (t\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \\ &= t^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + t(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \\ &= t^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

Нека $a = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, $b = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $c = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$. Тогава $f(t) = at^2 + 2bt + c$, $t \in \mathbb{R}$. Тъй като $f(t) \geq 0$ за всяко реално число t, дискриминантата на полинома $f(t)$ е неположителна: $(2b)^2 \leq 4ac$, откъдето следва, че $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ или $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}\sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}$, което трябваше да се докаже.
Ако $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$, то $f(t_0) = (t_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = 0$ за някое реално число t_0, откъдето $t_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 0$, т.е. векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ са линейно зависими.

Нека $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ са вектори от евклидовото пространство V. Тогава

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} \leq 1$$

според неравенството на Коши-Буняковски-Шварц. Следователно съществува единствен ъгъл $0 \leq \alpha \leq \pi$, такъв че

$$\cos\alpha = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}.$$

Ъгълът α се нарича *ъгъл между векторите* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Ясно е, че $\alpha = \pi/2$ точно когато $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Определение 13.3 (Ортогонални вектори)**.** Казваме, че векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ от V са *ортогонални*, когато $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Да забележим, че нулевият вектор $\mathbf{0}$ е ортогонален на всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от V. Ако векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ са различни от нулевия вектор $\mathbf{0}$, то $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ са ортогонални, когато ъгълът между тях е равен на $\pi/2$.

13.2 Ортогононални и ортонормирани системи от вектори

Нека $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са вектори от евклидовото пространство V.

Определение 13.4 (Ортогонална система от вектори)**.** Системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ се нарича *ортогонална система от вектори*, когато $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 0$ за всички $1 \leq i \neq j \leq k$.

Ако $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ е ортогонална система от вектори, то ъгълът между всеки два различни вектора от тази система е равен на $\pi/2$.

Определение 13.5 (Ортонормирана система от вектори)**.** Ортогоналната система от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ се нарича *ортонормирана система от вектори*, когато $|\boldsymbol{x}_i| = 1$ за всички $i = 1, \ldots, k$.

Пример 13.2. Нека V е евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ със стандартното скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$. Тогава стандартният базис

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{e}_1 & = & (1, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 & = & (0, 1, \ldots, 0), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{e}_n & = & (0, 0, \ldots, 1). \end{array}$$

на $\mathbb{R}^n$ е ортонормирана система от вектори.

Твърдение 13.2. *Всяка ортогонална система $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ от ненулеви вектори е линейно независима.*

Доказателство. Нека $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots \lambda_k$ са реални числа, такива че

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_i \boldsymbol{x}_i + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}.$$

Да умножим скаларно горното равенство с вектора $\boldsymbol{x}_i$ за $i = 1, \ldots, k$:

$$\lambda_1 \underbrace{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i)}_{0} + \underbrace{\lambda_2 (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_i)}_{0} + \cdots + \lambda_i (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) + \cdots + \lambda_k \underbrace{(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_i)}_{0} = 0.$$

Следователно $\lambda_i (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) = 0$ за $i = 1, \ldots, k$. Тъй като $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$, то $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) > 0$, откъдето получаваме $\lambda_i = 0$ за всички $i = 1, \ldots, k$. Твърдението е доказано.

От Твърдение 13.2 следва, че всяка ортонормирана система от вектори е линейно независима. Особено важен е случаят, когато ортонормираната система от вектори е базис на V.

Определение 13.6 (Ортогонален базис)**.** Базисът $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ на V се нарича *ортогонален базис* на V, когато $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ е ортогонална система от вектори.

Определение 13.7 (Ортонормиран базис)**.** Базисът $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ на V се нарича *ортонормиран базис* на V, когато $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ е ортонормирана система от вектори.

Забележка. Както показва Твърдение 13.2, всяка ортонормирана система от вектори, състояща се от $n = \dim V$ на брой вектора, е ортонормиран базис на V.

Лема 13.3. *Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ е ортонормиран базис на V и нека $\boldsymbol{x}$ е вектор от V. Тогава*

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n.$$

Доказателство. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ са координатите на $\boldsymbol{x}$ в ортонормирания базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e} + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_i \boldsymbol{e}_i + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n.$$

Да умножим скаларно горното равенство с вектора $\boldsymbol{e}_i$ за $i = 1, \dots, n$:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i) = x_1 \underbrace{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i)}_{0} + x_2 \underbrace{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_i)}_{0} + \dots + x_i \underbrace{(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)}_{1} + \dots + x_n \underbrace{(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i)}_{0}.$$

Следователно $x_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$, което трябваше да се докаже.

Твърдение 13.4. *Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е ортонормиран базис на V и нека*

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e} + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n, \quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e} + y_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + y_n\boldsymbol{e}_n.$$

Тогава $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$.

Доказателство. Да умножим скаларно равенството

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_n + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

с вектора $\boldsymbol{y}$. Получаваме

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{y}) + x_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{y}) + \dots + x_n(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{y}).$$

Сега да забележим, че от симетричността на скаларното произведение и Лема 13.3 следва, че

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_1) = y_1,\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_2) = y_2,\ \dots,\ (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_n) = y_n.$$

Следователно $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, което трябваше да се докаже.

13.3 Метод на Грам и Шмид

Ние знаем, че всяко линейно подпространство на линейното пространство V притежава базис. В този параграф ще покажем, че всяко линейно подпространство на V притежава *ортонормиран* базис. Да забележим, че ако векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ образуват ортогонален базис на линейното подпространство U, то векторите

$$\boldsymbol{c}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|},\ \boldsymbol{c}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_1|},\ \dots,\ \boldsymbol{c}_k = \frac{\boldsymbol{b}_k}{|\boldsymbol{b}_k|}$$

образуват ортонормиран базис на U. Затова е достатъчно да докажем, че всяко линейно подпространство на V притежава ортогонален базис. За тази цел ще използваме така наречения метод на Грам и Шмид.

Твърдение 13.5 (Метод на Грам и Шмид)**.** *Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ е базис на линейното подпространство U. Тога съществува ортогонален базис $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ на U, такъв че $l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_i) = l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_i)$ за всяко $i = 1, \dots, k$.*

Доказателство. Полагаме $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$. Да предположим, че вече сме намерили векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_i$, т.е. $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_i$ е ортогонална система от вектори, такава че $l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_i) = l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_i)$. Тогава $\dim l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_i) = i$, откъдето следва, че векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_i$ са линейно независими. В частност никой от тях не е равен на нулевия вектор: $\boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}_2 \neq \boldsymbol{0}, \dots, \boldsymbol{b}_i \neq \boldsymbol{0}$.

Ще търсим вектора $\boldsymbol{b}_{i+1}$ във вида

$$\boldsymbol{b}_{i+1} = \boldsymbol{a}_{i+1} + \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_i \boldsymbol{b}_i,$$

като ще искаме той да е ортогонален на векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_i$:

$$(\boldsymbol{b}_{i+1}, \boldsymbol{b}_1) = 0,\ (\boldsymbol{b}_{i+1}, \boldsymbol{b}_2) = 0,\ \ldots,\ (\boldsymbol{b}_{i+1}, \boldsymbol{b}_i) = 0.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{b}_{i+1}, \boldsymbol{b}_1) &= (\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{b}_1) + \alpha_1 (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) + \alpha_2 \underbrace{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1)}_{0} + \cdots + \alpha_i \underbrace{(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_1)}_{0} = 0 \\
(\boldsymbol{b}_{i+1}, \boldsymbol{b}_2) &= (\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{b}_2) + \alpha_1 \underbrace{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)}_{0} + \alpha_2 (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) + \cdots + \alpha_i \underbrace{(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_2)}_{0} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(\boldsymbol{b}_{i+1}, \boldsymbol{b}_i) &= (\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{b}_i) + \alpha_1 \underbrace{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_i)}_{0} + \alpha_2 \underbrace{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_i)}_{0} + \cdots + \alpha_i (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) = 0
\end{aligned}.$$

Следователно

$$\begin{array}{l}
(\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{b}_1) + \alpha_1 (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 0 \\
(\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{b}_2) + \alpha_2 (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{b}_i) + \alpha_1 (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) = 0
\end{array}, \quad \text{откъдето} \quad
\begin{array}{l}
\alpha_1 = (\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{b}_1)/(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) \\
\alpha_2 = (\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{b}_2)/(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_i = (\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{b}_i)/(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i)
\end{array}.$$

Остава да покажем, че $l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{i+1}) = l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{i+1})$. За тази цел да забележим, че от $\boldsymbol{b}_{i+1} = \boldsymbol{a}_{i+1} + \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_i \boldsymbol{b}_i$ следва, че

$$\boldsymbol{b}_{i+1} \in l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}) = l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}),$$

откъдето $l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{i+1}) \subseteq l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{i+1})$. От друга страна

$$\boldsymbol{a}_{i+1} = \boldsymbol{b}_{i+1} - \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 - \alpha \boldsymbol{b}_2 - \cdots - \alpha_i \boldsymbol{b}_i,$$

т.е. $\boldsymbol{a}_{i+1} \in l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{i+1})$, откъдето $l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{i+1}) \subseteq l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{i+1})$. Следователно $l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{i+1}) = l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{i+1})$ и доказателството е завършено.

Забележка. Ако векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ образуват ортогонален базис на линейното подпространство U, то от формулите за коефициентите $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ се вижда, че $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k$. Следователно, ако приложим метода на Грам и Шмид към ортогонален базис на U, ще получим същия базис на U.

Следствие 13.6. *Всяко линейно подпространство U на евклидово пространство V притежава ортонормиран базис.*

Доказателство. Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ е базис на U. След прилагането на метода на Грам и Шмид към базиса $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ получаваме ортогонален базис $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ на U. Тогава векторите

$$\boldsymbol{c}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|},\ \boldsymbol{c}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_1|},\ \ldots,\ \boldsymbol{c}_k = \frac{\boldsymbol{b}_k}{|\boldsymbol{b}_k|}$$

образуват ортонормиран базис на U.

Следствие 13.7. *Всяка ортонормирана система от вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ в евклидовото пространство V може да се допълни до ортонормиран базис $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ на V.*

Доказателство. Тъй като векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ са линейно независими, те могат да се допълнят до базис $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}'_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ на V (вижте Твърдение 7.5). След като приложим метода на Грам и Шмид към базиса $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}'_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ на V, ще получим ортогонален базис

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$$

на V. Заменяйки векторите $\boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ с векторите

$$\boldsymbol{a}_{k+1} = \frac{\boldsymbol{b}_{k+1}}{|\boldsymbol{b}_{k+1}|}, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \frac{\boldsymbol{b}_n}{|\boldsymbol{b}_n|}$$

получаваме ортонормиран базис $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ на V.

13.4 Ортогонално допълнение на линейно подпространство

Нека U е линейно подпространство на евклидовото пространство V. Ще казваме, че векторът $\boldsymbol{x}$ от V е *ортогонален на* линейното подпространство U, когато $\boldsymbol{x}$ е ортогонален на всеки вектор $\boldsymbol{u}$ от U.

Лема 13.8. *Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ са вектори от V и $U = l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$. Тогава векторът $\boldsymbol{x}$ от V е ортогонален на линейното подпространство U точно когато $\boldsymbol{x}$ е ортогонален на всеки от векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.*

Доказателство. Ако векторът $\boldsymbol{x}$ е ортогонален на U, то $\boldsymbol{x}$ е ортогонален на всеки от векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, защото $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in U$. Обратно, нека векторът $\boldsymbol{x}$ от V е ортогонален на всеки от векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ и нека $\boldsymbol{u}$ е произволен вектор от U. Тогава $\boldsymbol{u}$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_k$,

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k.$$

Умножавайки скаларно горното равенство по $\boldsymbol{x}$ получаваме

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1 \underbrace{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x})}_{0} + \lambda_k \underbrace{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x})}_{0} + \cdots + \lambda_k \underbrace{(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{x})}_{0} = 0,$$

т.е. векторът $\boldsymbol{x}$ е ортогонален на вектора $\boldsymbol{u}$. Следователно $\boldsymbol{x}$ е ортогонален на всеки вектор u от U, което трябваше да се докаже.

Определение 13.8 (Ортогонално допълнение на подпространство)**.** Нека U е линейно подпространство на евклидовото пространство V. Множеството на всички вектори $\boldsymbol{x}$ от V, които са ортогонални на U, се нарича *ортогонално допълнение на* U и се означава с $U^{\perp}$:

$$U^{\perp} = \{\, \boldsymbol{x} \in V \,:\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0 \text{ за всеки } \boldsymbol{u} \in U \,\}.$$

Твърдение 13.9. *Нека U е линейно подпространство на евклидовото пространство V. Тогава $U^{\perp}$ също е линейно подпространство на V и $V = U \oplus U^{\perp}$.*

Доказателство. Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ е ортонормиран базис на U. Според Лема 13.8 множеството $U^{\perp}$ се състои от всички вектори $\boldsymbol{x}$ от V, такива че $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1) = 0, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_2) = 0, \ldots, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_k) = 0$. Да допълним $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ до ортонормиран базис $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ на V. Тогава $U^{\perp} = l(\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. Наистина, ако $\boldsymbol{x} \in U^{\perp}$, то от Лема 13.3 получаваме

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \underbrace{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1)}_{0} \boldsymbol{a}_1 + \underbrace{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_2)}_{0} \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \underbrace{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_k)}_{0} \boldsymbol{a}_k + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_{k+1}) \boldsymbol{a}_{k+1} + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_n) \boldsymbol{e}_n \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_{k+1}) \boldsymbol{a}_{k+1} + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_n) \boldsymbol{e}_n, \end{aligned}$$

т.е. $\boldsymbol{x} \in l(\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. Следователно $U^{\perp} \subseteq l(\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.
Обратно, нека $\boldsymbol{x} = \lambda_{k+1} \boldsymbol{a}_{k+1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$ е вектор от $l(\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. Тогава от равенствата

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1) \boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_2) \boldsymbol{a}_2 + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_k) \boldsymbol{a}_k + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_{k+1}) \boldsymbol{a}_{k+1} + \cdots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_n) \boldsymbol{e}_n \\ &= 0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{a}_k + \lambda_{k+1} \boldsymbol{a}_{k+1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n \end{aligned}$$

получаваме $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1) = 0, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_2) = 0, \ldots, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_k) = 0$, т.е. $\boldsymbol{x} \in U^{\perp}$.
Следователно $U^{\perp} = l(\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, което показва, че $U^{\perp}$ е линейно подпространство на V. Тъй като $V = l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) \oplus l(\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, според Пример 7.1, то $V = U \oplus U^{\perp}$.