Лекция 2

Пространство на n-мерните вектори. Хомогенни системи от линейни уравнения

2.1 Линейното пространство $\mathbb{R}^n$

Нека n е фиксирано естествено число. Да забележим, че всяко решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на една система от m линейни уравнения за n неизвестни е наредена n-орка от реални числа.
Ще означаваме множеството на всички наредени n-орки реални числа с $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n = \{\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \,\},$$

и ще наричаме елементите на $\mathbb{R}^n$ (n-мерни) *вектори*.
За даден вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, реалните числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се наричат *координати* на $\boldsymbol{x}$. Наредената n-орка $(0, 0, \ldots, 0)$ се означава с $\mathbf{0}$ и се нарича *нулев вектор*: $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Ако $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то с $-\boldsymbol{x}$ се означава векторът $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, който се нарича *противоположен вектор* на вектора $\boldsymbol{x}$.
В множеството $\mathbb{R}^n$ въвеждаме следните две операции:

Събиране на вектори

Нека $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
Тогава $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

Умножение на вектор с число

Нека $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Тогава $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Непосредствено се проверява, че така дефинираните операции притежават следните свойства:

1. Събирането е асоциативно, т.е. за всеки три вектора $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ от $\mathbb{R}^n$ е в сила
$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}).$$

2. Събирането е комутативно, т.е. за всеки два вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ е изпълнено
$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}.$$

3. Нулевият вектор $\mathbf{0}$ е неутрален относно операцията събиране, т.е.
$$\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$$
за всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от $\mathbb{R}^n$.

4. Сумата на всеки вектор и неговият противоположен вектор е равна на нулевия вектор, т.е.
$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$$
за всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от $\mathbb{R}^n$.

5. За всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от $\mathbb{R}^n$ е изпълнено
$$1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}.$$

6. За всеки две реални числа λ и μ и за всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от $\mathbb{R}^n$ е изпълнено
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}.$$

7. За всяко реално число λ и за всеки два вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ от $\mathbb{R}^n$ е изпълнено
$$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}.$$

8. За всеки две реални числа λ и μ и за всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от $\mathbb{R}^n$ е изпълнено
$$\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}.$$

Забележка. За всеки два вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ от $\mathbb{R}^n$ ще пишем $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ вместо $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})$ и ще наричаме вектора $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ *разлика* на векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. От свойствата на събирането на вектори следва, че
$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}.$$

Пример 2.1. а) Векторното пространство $\mathbb{R}^1$ се отъждествява естествено с числовата права $\mathbb{R}$. Събирането на вектори в $\mathbb{R}^1$ съответствува на събирането на реални числа. Умножението на вектора $\boldsymbol{x}$ от $\mathbb{R}^1$ с числото λ съответствува на умножението на числата λ и $\boldsymbol{x}$.
б) Векторното пространство $\mathbb{R}^2$ се отъждествява естествено с равнината. Събирането на вектори в $\mathbb{R}^2$ съответствува на събирането на вектори в равнината по правилото на успоредника.
в) Векторното пространство $\mathbb{R}^3$ се отъждествява естествено с тримерното пространството. Събирането на вектори в $\mathbb{R}^3$ съответствува на събирането на вектори в тримерното пространство по правилото на успоредника.

Пример 2.2. Матрица R, която има само един ред се нарича *вектор-ред*:

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Всеки такъв вектор-ред R ще бъде разглеждан като вектор от $\mathbb{R}^n$.
Матрица C, която има само един стълб се нарича *вектор-стълб*:

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Всеки такъв вектор-стълб C ще бъде разглеждан като вектор от $\mathbb{R}^m$.

Пример 2.3. Нека A е матрица с m реда и n стълба:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Тогава матрицата A е съставена от m вектор-реда

$$\begin{array}{lcl} R_1 & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}, \\ R_2 & = & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ R_m & = & \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \end{array}$$

всеки от които е вектор от $\mathbb{R}^n$.
Матрицата A е също така съставена от n вектор-стълба

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \dots, \ C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

всеки от които е вектор от $\mathbb{R}^m$.

2.2 Хомогенни системи от линейни уравнения

Определение 2.1 (Линеен функционал)**.** Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са реални числа. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ от вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

се нарича *линеен функционал*.

Твърдение 2.1. *Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е линеен функционал. Тогава*

а) $f(\mathbf{0}) = 0$.

б) $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ *за всеки два вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ от $\mathbb{R}^n$.*

в) $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$ *за всяко число* λ *и всеки вектор* $\boldsymbol{x}$ *от* $\mathbb{R}^n$.

Доказателство. а) $f(\mathbf{0}) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = 0$.

б) Нека $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогава

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Следователно

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= a_1(x_1+y_1) + a_2(x_2+y_2) + \cdots + a_n(x_n+y_n) = \\ &= (a_1x_1 + a_1y_1) + (a_2x_2 + a_2y_2) + \cdots + (a_nx_n + a_ny_n) = \\ &= (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) + (a_1y_1 + a_2x_2 + \cdots + a_ny_n) = \\ &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

в) Нека λ е реално число и $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогава

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Следователно

$$\begin{aligned} f(\lambda \boldsymbol{x}) &= a_1(\lambda x_1) + a_2(\lambda x_2) + \cdots + a_n(\lambda x_n) = \\ &= \lambda(a_1x_1) + \lambda(a_2x_2) + \cdots + \lambda(a_nx_n) = \\ &= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) = \\ &= \lambda f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Определение 2.2 (Хомогенна линейна система)**.** Система от линейни уравнения система от вида

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

се нарича *хомогенна* линейна система.

Нека $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ са следните линейни функционали:

$$\begin{array}{l} f_1(\boldsymbol{x}) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ f_2(\boldsymbol{x}) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(\boldsymbol{x}) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{array}$$

Ясно е, че векторът $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ е решение на системата (2.1) тогава и само тогава, когато

$$\left| \begin{array}{l} f_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ f_2(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \dots\dots \\ f_m(\boldsymbol{x}) = 0. \end{array} \right.$$

Твърдение 2.2. *Нека* A *е хомогенна система от* m *линейни уравнения за* n *неизвестни. Тогава*

а) Векторът $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ *е решение на* A.

б) Ако векторите $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *от* $\mathbb{R}^n$ *са решения на* A*, то тяхната сума* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ *също е решение на* A.

в) Ако векторът $\boldsymbol{x}$ *от* $\mathbb{R}^n$ *е решение на* A*, то векторът* $\lambda \boldsymbol{x}$ *също е решение на* A *за всяко реално число* λ.

Доказателство. Нека A е системата (2.1).
а) Според Твърдение 2.1 а)

$$\left| \begin{array}{ll} f_1(\mathbf{0}) & = 0 \\ f_2(\mathbf{0}) & = 0 \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ f_m(\mathbf{0}) & = 0, \end{array} \right.$$

т.е. нулевият вектор е решение на системата A.

б) Ако векторите $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ са решения на A, то

$$\left| \begin{array}{ll} f_1(\boldsymbol{x}) & = 0 \\ f_2(\boldsymbol{x}) & = 0 \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ f_m(\boldsymbol{x}) & = 0 \end{array} \right. \qquad \text{и} \qquad \left| \begin{array}{ll} f_1(\boldsymbol{y}) & = 0 \\ f_2(\boldsymbol{y}) & = 0 \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ f_m(\boldsymbol{y}) & = 0. \end{array} \right.$$

Според Твърдение 2.1 б)

$$\left| \begin{array}{lllll} f_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) & = & f_1(\boldsymbol{x})+f_1(\boldsymbol{y}) & = 0+0 = & 0 \\ f_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) & = & f_2(\boldsymbol{x})+f_2(\boldsymbol{y}) & = 0+0 = & 0 \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ f_m(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) & = & f_m(\boldsymbol{x})+f_m(\boldsymbol{y}) & = 0+0 = & 0, \end{array} \right.$$

т.е. векторът $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ е решение на системата A.

в) Ако векторът $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ е решение на A, то

$$\left| \begin{array}{ll} f_1(\boldsymbol{x}) & = 0 \\ f_2(\boldsymbol{x}) & = 0 \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ f_m(\boldsymbol{x}) & = 0. \end{array} \right.$$

Нека λ е реално число. Според Твърдение 2.1 в)

$$\left| \begin{array}{lll} f_1(\lambda\boldsymbol{x}) & = \lambda f_1(\boldsymbol{x}) & = \lambda \cdot 0 = 0 \\ f_2(\lambda\boldsymbol{x}) & = \lambda f_2(\boldsymbol{x}) & = \lambda \cdot 0 = 0 \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ f_m(\lambda\boldsymbol{x}) & = \lambda f_m(\boldsymbol{x}) & = \lambda \cdot 0 = 0, \end{array} \right.$$

т.е. векторът $\lambda\boldsymbol{x}$ е решение на системата A.