Лекция 3

Линейна зависимост и линейна независимост на вектори

3.1 Пространство от решенията на хомогенна система от линейни уравнения

Множеството от всички вектори $\boldsymbol{x}$ от $\mathbb{R}^n$, които са решения на дадена хомогенна система A от линейни уравнения ще наричаме *пространство от решенията* на системата A.
Твърдение 2.2 от предишната лекция показва, че пространството от решения на една хомогенна система изпълнява трите условия, формулирани в следващото твърдение.

Твърдение 3.1. *Нека $U \subset \mathbb{R}^n$ е пространството от решения на хомогенна система от m линейни уравнения за n неизвестни. Тогава*

а) U съдържа нулевия вектор $\mathbf{0}$;

б) ако U съдържа векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то U съдържа тяхната сума $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$;

в) ако U съдържа вектора $\boldsymbol{x}$, то U съдържа вектора $\lambda\boldsymbol{x}$ за всяко реално число λ.

Всяка хомогенна система от линейни уравнения има тривиалното решение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Следващата проста, но много важна, лема ни дава достатъчно условие за съществуването на нетривиално решение $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ на дадена хомогенна система от линейни уравнения.

Лема 3.2 (Основна лема за хомогенни системи)**.** *Ако броят на уравненията в една хомогенна линейна система е по-малък от броят на неизвестните, то системата има решение $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.*

Доказателство. Можем да предполагаме без ограничение на общността, че системата е в ешелонна форма. Тогава броят на редовете на матрицата от коефициенти на системата е по-малък от броя на неизвестните. Следователно броят r на ненулевите редове в матрицата от коефициенти на системата е също по-малък от броя n на неизвестните. Тъй общото решение на системата зависи от $n - r > 0$ параметъра (виж Твърдение 1.3), системата има безброй решения. В частност системата има решение $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

3.2 Линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$. Линейна обвивка на множество от вектори

Определение 3.1 (Линейно подпространство)**.** Едно подмножество U на $\mathbb{R}^n$ е *линейно подпространство* на $\mathbb{R}^n$, когато изпълнява следните условия:

а) U съдържа нулевия вектор $\mathbf{0}$;

б) ако U съдържа векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то U съдържа тяхната сума $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$;

в) ако U съдържа вектора $\boldsymbol{x}$, то U съдържа вектора $\lambda \boldsymbol{x}$ за всяко реално число λ.

Според Твърдение 3.1,

пространството U от решения на една хомогенна система от m линейни уравнения за n неизвестни е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.2 (Линейна комбинация на вектори)**.** Нека $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ са реални числа, а $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ са вектори от $\mathbb{R}^n$. Векторът

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$$

се нарича *линейна комбинация* на векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$, с коефициенти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Пример 3.1. Нека векторите $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ от $\mathbb{R}^n$ са фундаментална система от решения на една хомогенна линейна система A. Тогава всяко решение на системата A е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$.

Твърдение 3.3. *Нека U е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$. Ако U съдържа векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$, то U съдържа всяка тяхна линейна комбинация $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$.*

Доказателство. Нека $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ са реални числа, а $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ са вектори от линейното подпространство U. Тогава от Определение 3.1 в) следва, че U съдържа векторите $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \lambda_2 \boldsymbol{x}_2, \dots, \lambda_k \boldsymbol{x}_k$. Да забележим, че ако U съдържа вектора $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_l \boldsymbol{x}_l$, то от Определение 3.1 б) следва, че U съдържа също вектора $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_{l+1} \boldsymbol{x}_{l+1} = (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_l \boldsymbol{x}_l) + \lambda_{l+1} \boldsymbol{x}_{l+1}$, който е сума на два вектора от U. Сега получаваме последователно, че U съдържа следните вектори

$$\begin{gathered}\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2, \\ \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{x}_3, \\ \vdots \\ \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k,\end{gathered}$$

което трябваше да се докаже.

Определение 3.3 (Линейна обвивка на множество от вектори)**.** *Линейната обвивка* на векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ от $\mathbb{R}^n$ е множеството от всички техни линейни комбинации. Линейната обвивка на векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ от $\mathbb{R}^n$ се означава с $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$.

Забележка. Линейната обвивка $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ на векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ съдържа всеки от тях, защото

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 &= 1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_k, \\
\boldsymbol{x}_2 &= 0 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_k, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{x}_k &= 0 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \cdots + 1 \cdot \boldsymbol{x}_k.
\end{aligned}$$

Забележка. Ако векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ се съдържат в някое линейно подпространство U на $\mathbb{R}^n$, то тяхната линейна обвивка $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ също се съдържа в U. Наистина Твърдение 3.3 показва, че линейното подпространство U съдържа всяка линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$. Следователно U съдържа цялото множество $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$.

Пример 3.2. Линейната обвивка $l(\boldsymbol{x})$ на един вектор $\boldsymbol{x} \neq 0$ се състои от всички вектори $\boldsymbol{y}$, които са колинеарни с вектора $\boldsymbol{x}$.

Пример 3.3. Нека $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ са два вектора, които не са колинеарни. Тогава линейната обвивка $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ се състои от всички вектори $\boldsymbol{y}$, които са компланарни с векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$.

Пример 3.4. Нека векторите $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ от $\mathbb{R}^n$ са фундаментална система от решения на една хомогенна линейна система A. Тогава множеството $l(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ съвпада с пространството от решения на системата A, защото всяко решение на A е линейна комбинация на решенията $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

Пример 3.5. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ са следните вектори от $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\
\boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

В този случай, множеството $l(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ съвпада с цялото пространство $\mathbb{R}^n$. Наистина, нека $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е произволен вектор от $\mathbb{R}^n$. Тогава

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, x_n) \\
&= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \\
&= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n.
\end{aligned}$$

Следователно всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от $\mathbb{R}^n$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, т.е. $l(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \mathbb{R}^n$.

Твърдение 3.4. *Нека $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са вектори от $\mathbb{R}^n$. Тогава линейната обвивка $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ на векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.*

Доказателство. Да проверим, че множеството $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ изпълнява условия а), б) и в) на Определение 3.1.

а) множеството $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ съдържа нулевия вектор $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_k.$$

б) ако $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ съдържа векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ съдържа тяхната сума $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$:

Ако $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ съдържа векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k,$$
$$\boldsymbol{y} = \mu_1 \boldsymbol{x}_1 + \mu_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \mu_k \boldsymbol{x}_k,$$

където $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ са реални числа. Тогава

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\lambda_1 + \mu_1)\boldsymbol{x}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + (\lambda_k + \mu_k)\boldsymbol{x}_k.$$

Тъй като $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$, то $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ съдържа сумата $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ на векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

в) ако $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ съдържа вектора $\boldsymbol{x}$, то $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ съдържа вектора $\lambda \boldsymbol{x}$ за всяко реално число λ:

Ако $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ съдържа вектора $\boldsymbol{x}$, то

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k,$$

където $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ са реални числа. Нека λ е реално число. Тогава

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda\lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + (\lambda\lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + (\lambda\lambda_k)\boldsymbol{x}_k.$$

Тъй като $\lambda \boldsymbol{x}$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$, то $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ съдържа вектора $\lambda \boldsymbol{x}$.

Тъй като множеството $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ изпълнява условия а), б) и в) на Определение 3.1, то е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.

3.3 Линейна зависими и линейно независими вектори

Определение 3.4 (Линейно независими вектори)**.** Нека $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са вектори от $\mathbb{R}^n$. Казваме, че $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са *линейно независими вектори*, ако

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0},$$

само когато $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Определение 3.5 (Линейно зависими вектори)**.** Нека $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са вектори от $\mathbb{R}^n$. Казваме, че $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са *линейно зависими вектори*, ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не всички от които са равни на 0, такива че

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

Пример 3.6. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ са векторите от $\mathbb{R}^n$, които разгледахме в Пример 3.5:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{e}_1 & = & (1, 0, \dots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 & = & (0, 1, \dots, 0), \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \boldsymbol{e}_n & = & (0, 0, \dots, 1). \end{array}$$

Да забележим първо, че $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$.
Ако $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0}$, то $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \boldsymbol{0}$, откъдето получаваме $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Следователно $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0}$, само когато $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, т.е. векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ са линейно независими.

Пример 3.7. Векторите $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, 1)$ и $\boldsymbol{x}_3 = (2, 1)$ от $\mathbb{R}^2$ са линейно зависими: $2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + (-1)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$.

Пример 3.8. Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ е фундаментална система решения на хомогенна система от линейни уравнения A. Тогава векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ са линейно независими. Наистина от равенствата

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k, \\ \boldsymbol{0} &= 0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{a}_k, \end{aligned}$$

следва, че $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, защото нулевото решение на A трябва да се изразява по *единствен начин* чрез решенията $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$.

Лема 3.5 (Основна лема на ЛА). *Нека векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ се съдържат в линейната обвивка на векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m$. Ако $n > m$, векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ са линейно зависими.*

Доказателство. Тъй като векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ се съдържат в линейната обвивка на векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m$, то всеки от векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m$:

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel \\ a_{11}\boldsymbol{b}_1 & a_{12}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{b}_1 \\ + & + & & + \\ a_{21}\boldsymbol{b}_2 & a_{22}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{b}_2 \\ + & + & & + \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ + & + & & + \\ a_{m1}\boldsymbol{b}_m & a_{m2}\boldsymbol{b}_m & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{b}_m \end{array}$$

(Векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ са записани вертикално.)

Тогава

$$\begin{aligned} \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n \;=\; & \ (a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1n}\lambda_n)\boldsymbol{b}_1 \\ & + (a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n)\boldsymbol{b}_2 \\ & \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_n)\boldsymbol{b}_m. \end{aligned}$$

Сега е ясно, че за всеки вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, който е решение на хомогенната система от линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1n}\lambda_n = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_n = 0 \end{array} \right. , \tag{3.1}$$

е в сила $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$. Тъй като $n > m$, то според основната лема за хомогенни системи (Лема 3.2), системата (3.1) има решение $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$. Следователно векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ са линейно зависими, което трябваше да се докаже.

Както видяхме в Пример 3.5, линейното пространство $\mathbb{R}^n$ съвпада с линейната обвивка на векторите

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{e}_1 & = & (1, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 & = & (0, 1, \ldots, 0), \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ \boldsymbol{e}_n & = & (0, 0, \ldots, 1), \end{array}$$

които са n на брой. Сега от Лема 3.5 непосредствено следва важното

Твърдение 3.6. *Ако $k > n$, всеки k вектора в $\mathbb{R}^n$ са линейно зависими.*

В частност, всеки $n + 1$ вектора в $\mathbb{R}^n$ са линейно зависими.