Лекция 4

Ранг и размерност

4.1 Свойства на линейно зависимите и линейно независимите вектори

Смисълът на условието за линейна зависимост на вектори може би става по-ясен, когато го формулираме по следния начин:

Твърдение 4.1. *а) Векторът $\boldsymbol{x}$ е линейно зависим тогава и само тогава, когато $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.*

б) Векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$, $k \geq 2$, са линейно зависими тогава и само тогава, когато някой от тях е линейна комбинация на останалите.

Доказателство. а) Тъй като $1 \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, векторът $\boldsymbol{0}$ е линейно зависим.

Обратно, ако векторът $\boldsymbol{x}$ е линейно зависим, то съществува число $\lambda \neq 0$, такова че $\lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. След като умножим двете страни на това равенство с $\dfrac{1}{\lambda}$, получаваме $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

б) Ако векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$, $k \geq 2$, са линейно зависими, то съществуват числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, *не всички от които са равни на нула*, такива че

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}.$$

Тогава $\lambda_i \neq 0$ за някой индекс $1 \leq i \leq k$. След като запишем горното равенство по следния начин:

$$\lambda_i \boldsymbol{x}_i = (-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + \dots + (-\lambda_{i-1})\boldsymbol{x}_{i-1} + (-\lambda_{i+1})\boldsymbol{x}_{i+1} + \dots + (-\lambda_k)\boldsymbol{x}_k$$

и умножим двете страни с $\dfrac{1}{\lambda_i}$, получаваме

$$\boldsymbol{x}_i = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)\boldsymbol{x}_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)\boldsymbol{x}_{i-1} + \left(-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)\boldsymbol{x}_{i+1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)\boldsymbol{x}_k,$$

т.е. векторът $\boldsymbol{x}_i$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k$.

Обратно, да предположим, че за някой индекс $1 \leq i \leq k$ векторът $\boldsymbol{x}_i$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k$. Тогава съществуват числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_k$, такива че

$$\boldsymbol{x}_i = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \lambda_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} + \lambda_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1} + \dots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k.$$

Следователно

$$(-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (-\lambda_{i-1})\boldsymbol{x}_{i-1} + 1 \cdot \boldsymbol{x}_i + (-\lambda_{i+1})\boldsymbol{x}_{i+1} + \cdots + (-\lambda_k)\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

Тъй като коефициентът на $\boldsymbol{x}_i$ в горната линейна комбинация е различен от 0, то векторите $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са линейно зависими.

Твърдение 4.2. *Нека $S = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ е система от вектори от $\mathbb{R}^n$. Тогава*

а) ако системата S е линейно независима, то всяка подсистема на S е също линейно независима;

б) ако системата S е линейно зависима, то всяка система от вектори, която съдържа системата S, е също линейно зависима.

Доказателство. а) Нека $1 \le l \le k$ и нека $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_l\boldsymbol{x}_l = \mathbf{0}$. Тогава

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_l\boldsymbol{x}_l + 0 \cdot \boldsymbol{x}_{l+1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

Тъй като векторите $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са линейно независими, то $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_l = 0$.

б) Следва непосредствено от подточка а).

Твърдение 4.3. *Всяка система от вектори S, която съдържа нулевия вектор $\mathbf{0}$, е линейно зависима.*

Доказателство. Ако S се състои от само от нулевия вектор $\mathbf{0}$, то както вече видяхме, S е линейно зависима система. Общият случай следва от подточка б) на Твърдение 4.2, защото S съдържа линейно зависимата система $\{\mathbf{0}\}$.

Твърдение 4.4. *Нека $S = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ е линейно зависима система от вектори. Ако векторите $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са линейно независими, векторът $\boldsymbol{x}$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$.*

Доказателство. Тъй като векторите $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са линейно зависими, съществуват числа $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не всички от които са равни на 0, такива че

$$\lambda\boldsymbol{x} + \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}. \tag{4.1}$$

Да се убедим, че $\lambda \neq 0$: ако $\lambda = 0$, то $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$, откъдето следва, че $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$, защото векторите $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ са линейно независими. Но това е невъзможно, защото поне един от коефициентите $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ трябва да е различен от 0. Следователно $\lambda \neq 0$ и от (4.1) получаваме

$$\boldsymbol{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)\boldsymbol{x}_k,$$

т.е. векторът $\boldsymbol{x}$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$.

4.2 Ранг на система от вектори

Определение 4.1 (Максимална линейно независима подсистема на система от вектори)**.** Нека S е система от вектори от $\mathbb{R}^n$. Казваме, че системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r\} \subseteq S$ е *максимална линейно независима подсистема* на системата S, когато $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r\}$ изпълнява следните условия:

- системата $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ е линейно независима;
- за всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от S, системата $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ е линейно зависима.

Да забележим, че *всяка система от вектори $S \subseteq \mathbb{R}^n$ съдържа поне една максимална линейно независима подсистема.* Наистина, тъй като всеки $n+1$ вектора от $\mathbb{R}^n$ са линейно зависими (Теорема 3.6), то съществува число $r \leq n$, което удовлетворява следните две условия

- S съдържа r линейно независими вектора $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r$.
- Всеки $r+1$ вектора от S са линейно зависими.

Тогава $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ ще бъде максимална линейно независима подсистема на системата S.

Пример 4.1. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ са следните вектори от $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl}\boldsymbol{e}_1 &=& (1,0,\dots,0),\\ \boldsymbol{e}_2 &=& (0,1,\dots,0),\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ \boldsymbol{e}_n &=& (0,0,\dots,1).\end{array}$$

Тогава $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ е максимална линейно независима подсистема на $\mathbb{R}^n$, защото векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ са линейно независими, а всеки $n+1$ вектора от $\mathbb{R}^n$ са линейно зависими.

Лема 4.5. *Ако $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ е максимална линейно независима подсистема на системата от вектори S, то всеки вектор $\boldsymbol{x} \in S$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r$.*

Доказателство. Нека $\boldsymbol{x}$ е произволен вектор от S. Тогава системата от вектори $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ е линейно зависима. Тъй като системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ е линейно независима, то от Твърдение 4.4 следва, че векторът $\boldsymbol{x}$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r$.

Теорема 4.1. *Ако $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ и $\{\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_s\}$ са две максимални линейно независими подсистеми на системата от вектори S, то $r = s$.*

Доказателство. От Лема 4.5 следва, че

- всеки един от векторите $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_s$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r$; тъй като векторите $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_s$ са линейно независими, от основната лема на линейната алгебра (Лема 3.5) следва, че $s \leq r$;
- всеки един от векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_s$; тъй като векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r$ са линейно независими, от основната лема на линейната алгебра (Лема 3.5) следва, че $r \leq s$.

Окончателно, от неравенствата $s \leq r$ и $r \leq s$ получаваме $r = s$, което трябваше да се докаже.

Теорема 4.1 показва, че следващото определение е коректно.

Определение 4.2 (Ранг на система от вектори)**.** Нека S е система от вектори от $\mathbb{R}^n$. Броят на векторите във всяка максимална линейно независима подсистема на системата S се нарича нарича *ранг* на системата S и се означава с $\mathrm{rk}(S)$.

Пример 4.2. Ако S е система от вектори от $\mathbb{R}^n$, то $\mathrm{rk}(S) = 0$ тогава и само тогава, когато всеки вектор от S съвпада с нулевия вектор $\mathbf{0}$.

Пример 4.3. Ако S е система от вектори от $\mathbb{R}^n$, то $\mathrm{rk}(S) = 1$ тогава и само тогава, когато S съдържа вектор $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ и всеки вектор $\boldsymbol{y}$ от S е пропорционален на вектора $\boldsymbol{x}$, т.е. $\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}$ за някое число λ.

Пример 4.4. Рангът на $\mathbb{R}^n$ е равен на n, защото системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ от Пример 4.1 е максимална линейно независима подсистема на $\mathbb{R}^n$.

Пример 4.5. Нека системата S се състои от векторите

$$\boldsymbol{x}_1 = (4, 3, 1, 0), \ \boldsymbol{x}_2 = (2, 1, 0, 2), \ \boldsymbol{x}_3 = (6, 4, 1, 2).$$

Тогава системата S е линейно зависима, защото $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$. Тъй като векторите $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ са линейно независими, то $\mathrm{rk}(S) = 2$.

Твърдение 4.6. *Ако S' е подсистема на системата от вектори S, то*

$$\mathrm{rk}(S') \leq \mathrm{rk}(S).$$

Доказателство. Нека $\{\boldsymbol{x}'_1, \dots, \boldsymbol{x}'_l\}$ е максимална линейно независима подсистема на S' и нека $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ е максимална линейно независима подсистема на S. Тогава според Лема 4.5, всеки един от векторите $\boldsymbol{x}'_1, \dots, \boldsymbol{x}'_l$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$. Тъй като векторите $\boldsymbol{x}'_1, \dots, \boldsymbol{x}'_l$ са линейно независими, от основната лема на линейната алгебра (Лема 3.5) получаваме, че $l \leq k$, т.е. $\mathrm{rk}(S') \leq \mathrm{rk}(S)$.

Пример 4.6. Нека S е система от вектори от $\mathbb{R}^n$. Тогава $\mathrm{rk}(S) \leq n$, защото S е подсистема на $\mathbb{R}^n$ и $\mathrm{rk}(\mathbb{R}^n) = n$.

4.3 Базис и размерност на линейно пространство

Определение 4.3 (Базис на линейно пространство)**.** Нека U е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$. Всяка максимална линейно независима подсистема на U се нарича *базис* на U.

Пример 4.7. Нека $U \subset \mathbb{R}^2$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$|\ x_1 - x_2 = 0.$$

Тогава векторът $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1)$ е базис на U. Пространството от решения U има безброй много базиси, защото за всяко число $\lambda \neq 0$ векторът $\lambda\boldsymbol{a}_1 = (\lambda, \lambda)$ също е базис на U.

Пример 4.8. Векторите

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{e}_1 & = & (1, 0, \dots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 & = & (0, 1, \dots, 0), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{e}_n & = & (0, 0, \dots, 1). \end{array}$$

образуват базис на $\mathbb{R}^n$, защото $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ е максимална линейно независима подсистема на $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.2. *Нека U е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$. Системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\} \subseteq U$ е базис на U тогава и само тогава, когато всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от U се представя по единствен начин като линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$.*

Доказателство. Нека $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е максимална линейно независима подсистема на U. Тогава според Лема 4.5 всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от U е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$. Ако

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{x} = \mu_1 \boldsymbol{e}_1 + \mu_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \mu_k \boldsymbol{e}_k$$

са две представяния на вектора $\boldsymbol{x}$ от U като линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, то

$$(\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (\lambda_k - \mu_k)\boldsymbol{e}_k = \mathbf{0}.$$

Тогава $\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \cdots = \lambda_k - \mu_k = 0$, защото векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ са линейно независими. Следователно $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, $\ldots$, $\lambda_k = \mu_k$, което показва, че векторът $\boldsymbol{x}$ се представя по единствен начин като линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$.

Обратно, нека всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от U се представя по единствен начин като линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$. Ще докажем, че $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е максимална линейно независима подсистема на U.
Нека първо установим, че системата $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е линейно независима. Да забележим, че

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{e}_k \tag{4.2}$$

е представяне на нулевия вектор $\mathbf{0}$ от U като линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$. Ако числата $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ са такива, че

$$\mathbf{0} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k, \tag{4.3}$$

то (4.2) и (4.3) трябва да съвпадат, защото нулевият вектор $\mathbf{0} \in U$ се представя по единствен начин като линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$. Следователно $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, т.е. системата $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е линейно независима.
Нека сега покажем, че системата от вектори $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е линейно зависима за всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от U. Наистина, тъй като векторът $\boldsymbol{x}$ се представя като линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, то от Твърдение 4.1 следва, че векторите $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ са линейно зависими.
Тъй като системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е линейно независима и тъй като за всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от U системата от вектори $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е линейно зависима, то $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е максимална линейно независима подсистема на линейното подпространство U.

Пример 4.9. Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ е фундаментална система решения на хомогенна система от линейни уравнения A. Тогава системата от вектори $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ е базис на пространството от решения на A, защото всяко решение на A се записва по единствен начин като линейна комбинация на решенията $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

Определение 4.4 (Размерност на линейно пространство)**.** Нека U е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$. Броят на векторите във всеки базис на U се нарича *размерност* на U и се означава с $\dim U$.

Пример 4.10. Нека $U \subset \mathbb{R}^2$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$| \; x_1 - x_2 = 0.$$

Тогава размерността на U е равна на 1, защото U има базис, който се състои от един вектор $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1)$.

Пример 4.11. Размерността на $\mathbb{R}^n$ е равна на n, защото векторите

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{e}_1 & = & (1, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 & = & (0, 1, \ldots, 0), \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \boldsymbol{e}_n & = & (0, 0, \ldots, 1). \end{array}$$

образуват базис на $\mathbb{R}^n$.

Твърдение 4.7. *Нека U е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$ с размерност k. Тогава всеки $k+1$ вектора от U са линейно зависими.*

Доказателство. Нека системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е базис на U. Тогава $U = l(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$ и от основната лема на линейната алгебра (Лема 3.5) следва, че всеки $k+1$ вектора от U са линейно зависими.

Твърдение 4.8. *Нека W и U са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$, такива че W се съдържа в U. Тогава*

а) $\dim W \leq \dim U$;

б) ако $\dim W = \dim U$, *то W съвпада с U.*

Доказателство. а) Да забележим, че $\dim W = \operatorname{rk}(W)$ и $\dim U = \operatorname{rk}(U)$. Тъй като W е подсистема на U, то Твърдение 4.6 показва, че $\dim W \leqq \dim U$.

б) Да предположим, че $\dim W = \dim U = k$. За да установим, че $W = U$, ще покажем, че всеки вектор $\boldsymbol{u}$ от U принадлежи на W. Нека $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ е базис на W и нека $\boldsymbol{u}$ е произволен вектор от U. Тъй като $\dim U = k$, от Твърдение 4.7 следва, че векторите $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$, които са $k+1$ на брой, са линейно зависими. Сега от линейната независимост на векторите $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ получаваме, че векторът $\boldsymbol{u}$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ (Твърдение 4.4). Следователно векторът $\boldsymbol{u}$ принадлежи на W, защото според Твърдение 3.3, всяка линейна комбинация на вектори от линейното подпространство W се съдържа във W. Сега можем да заключим, че W съвпада с U, защото всеки вектор $\boldsymbol{u}$ от U принадлежи на W.