Лекция 5

Ранг на матрица. Теорема на Руше

5.1 Размерност на линейната обвивка на система от вектори

Лема 5.1. *Нека* $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ *е система от вектори от* $\mathbb{R}^n$. *Тогава следните условия са еквивалентни:*

а) Системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ *е максимална линейно независима подсистема на системата от вектори* $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$.

б) Системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ *е линейно независима и*

$$l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r) = l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k).$$

в) Системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ *е базис на линейното подпространство* $l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k)$.

Доказателство. а) $\Rightarrow$ б) От определението на линейна обвивка на система от вектори следва непосредствено, че

$$l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r) \subseteq l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k). \tag{5.1}$$

Тъй като $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r\}$ е максимална линейно независима подсистема на системата $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$, то всеки вектор $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r$. Следователно всички вектори $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k$ се съдържат в $l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r)$, а тъй като $l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r)$ е линейно подпространство, то всички линейни комбинации на векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k$ също се съдържат в $l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r)$. Формулирано по друг начин:

$$l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r) \supseteq l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k). \tag{5.2}$$

Сега от (5.1) и (5.2) получаваме $l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{x}_k) = l(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r)$.

б) $\Rightarrow$ в) Системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r\}$ е базис на линейното подпространство $l(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r\}$, защото е линейно независима и всеки $r+1$ вектора от $l(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r)$ са линейно зависими. Тъй като

$$l(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r) = l(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k),$$

системата $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r\}$ е базис на $l(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$.

в) $\Rightarrow$ а) Тъй като всеки от векторите $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ е линейна комбинация на линейно независимите вектори $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$, векторите $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ образуват максимална линейно независима подсистема на системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$.

Теорема 5.1. *Нека $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ е система от вектори от $\mathbb{R}^n$. Тогава*

$$\operatorname{rk}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = \dim l(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k).$$

Доказателство. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_r\}$, $r \leq k$, е максимална линейно независима подсистема на системата $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$. Тогава, според Лема 5.1 в), векторите $\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_r$ образуват базис на линейното подпространство $l(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$. Следователно

$$\dim l(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = r = \operatorname{rk}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k).$$

5.2 Елементарни преобразувания на система от вектори

Определение 5.1 (Елементарни преобразувания на система от вектори)**.** Нека $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ е система от вектори от $\mathbb{R}^n$. *Елементарни преобразувания* на системата $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ са:

1. Размяна на местата на два от векторите от системата;
2. Умножение на някой от векторите от системата с различно от нула число;
3. Прибавяне към някой от векторите на системата на друг вектор от системата, умножен с число.

Размяната на местата на векторите $\boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{x}_j$ ще означаваме с T_{ij}. Умножението на вектора $\boldsymbol{x}_i$ с числото $a \neq 0$ ще означаваме с $a\boldsymbol{x}_i$. Прибавянето към вектора $\boldsymbol{x}_i$ на вектора $\boldsymbol{x}_j$, умножен с числото a, ще означаваме с $\boldsymbol{x}_i + a\boldsymbol{x}_j$, $i \neq j$.
Елементарните преобразувания на система от вектори са *обратими*: ако системата $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k\}$ се получава от системата $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ чрез елементарно преобразување, то системата $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ може да се възстанови обратно от системата $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k\}$ чрез елементарно преобразувание:

$$\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\} \xrightarrow{T_{ij}} \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k\} \xrightarrow{T_{ji}} \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\},\\
&\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\} \xrightarrow{a\boldsymbol{x}_i} \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k\} \xrightarrow{a^{-1}\boldsymbol{y}_i} \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\},\ a \neq 0,\\
&\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\} \xrightarrow{\boldsymbol{x}_i + a\boldsymbol{x}_j} \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k\} \xrightarrow{\boldsymbol{y}_i - a\boldsymbol{y}_j} \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\},\ i \neq j.
\end{aligned}$$

Важно е да забележим, че ако системата от вектори $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k\}$ се получава от системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ чрез елементарно преобразуване, то всеки един от векторите $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$:

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i, \dots, \boldsymbol{x}_j, \dots, \boldsymbol{x}_k\} \xrightarrow{T_{ij}} \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_j, \dots, \boldsymbol{x}_i, \dots, \boldsymbol{x}_k\},$$
$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i, \dots, \boldsymbol{x}_k\} \xrightarrow{a\boldsymbol{x}_i} \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, a\boldsymbol{x}_i, \dots, \boldsymbol{x}_k\},$$
$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i, \dots, \boldsymbol{x}_j, \dots, \boldsymbol{x}_k\} \xrightarrow{\boldsymbol{x}_i + a\boldsymbol{x}_j} \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i + a\boldsymbol{x}_j, \dots, \boldsymbol{x}_j, \dots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

Лема 5.2. *Ако системата от вектори $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ се получава от системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ чрез последователност от елементарни преобразувания, то*

$$l(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k) = l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k).$$

Доказателство. Както видяхме по-горе, всеки от векторите $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k$ се съдържа в линейното подпространство $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k)$. Тогава всяка линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k$ също се съдържа в линейното подпространство $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k)$, т.е. $l(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k) \subseteq l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k)$. Но тъй като елементарните преобразувания са обратими, системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ също се получава от системата от вектори $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k\}$ чрез последователност от елементарни преобразувания. Следователно е в сила и обратното включване: $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k) \subseteq l(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k)$. Окончателно $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k) = l(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k)$.

Забележка. Обратното твърдение също е вярно: ако $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ са две системи от вектори, такива че

$$l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k) = l(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k),$$

то всяка от тези системи може да се получи от другата чрез последователност от елементарни преобразувания.

Твърдение 5.3. *Ако системата от вектори $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k\}$ се получава от системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ чрез последователност от елементарни преобразувания, то*

$$\operatorname{rk}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k) = \operatorname{rk}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k).$$

Доказателство. От равенството на подпространствата $l(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k)$ и $l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k)$ следва, че $\dim l(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k) = \dim l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k)$. Прилагайки Теорема 5.1, получаваме:

$$\begin{aligned}\operatorname{rk}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k) &= \dim l(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k) = \\ &= \dim l(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k) = \operatorname{rk}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k),\end{aligned}$$

което трябваше да се докаже.

Тъй като една система от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ е линейно независима тогава и само тогава, когато $\operatorname{rk}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k) = k$, от Твърдение 5.3 непосредствено получаваме:

Следствие 5.4. *Ако системата от вектори $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k\}$ се получава от системата от вектори $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ чрез последователност от елементарни преобразувания, то $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k\}$ е линейно независима система тогава и само тогава, когато $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ е линейно независима система.*

5.3 Ранг на матрица

Ако A е матрица с m реда и n стълба, редовете на A образуват система от m вектора в $\mathbb{R}^n$.

Определение 5.2 (Ранг на матрица)**.** Рангът на системата от редовете на матрицата A се нарича ранг на A и се означава с $\mathrm{rk}(A)$.

Твърдение 5.5. *Ако матрицата B се получава от матрицата A чрез последователност от елементарни преобразувания, то* $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(A)$.

Доказателство. Рангът на редовете на матрицата B е равен на ранга на редовете на матрицата A защото системата от редовете на B се получава от системата от редовете на A чрез последователност от елементарни преобразувания.

Лема 5.6. *Ако матрицата A е ешелонна форма, то редовете на A са линейно независими тогава и само тогава, когато A не съдържа нулев ред.*

Доказателство. Ясно е, че редовете на матрицата A са линейно зависими, ако A съдържа нулев ред.
Обратно, нека A не съдържа нулев ред. Ако A има само един ред $\boldsymbol{R}_1 \neq \mathbf{0}$, то този ред е линейно независим. Да предположим, че лемата е вярна за всички матрици в ешелонна форма с m ненулеви реда. Нека A е матрица в ешелонна форма с $m+1$ ненулеви реда

$$\boldsymbol{R}_1 \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{R}_2 \neq \mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{R}_{m+1} \neq \mathbf{0}$$

и нека

$$\lambda_1 \boldsymbol{R}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{R}_2 + \cdots + \lambda_{m+1} \boldsymbol{R}_{m+1} = \mathbf{0}. \tag{5.3}$$

Тогава $\lambda_1 = 0$, защото първата различна от нула координата на вектора от лявата страна на (5.3) е равна на λ_1. Следователно

$$\lambda_2 \boldsymbol{R}_2 + \cdots + \lambda_{m+1} \boldsymbol{R}_{m+1} = \mathbf{0}.$$

Тъй като $\boldsymbol{R}_2 \neq \mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{R}_{m+1} \neq \mathbf{0}$ са редове на матрица в ешелонна форма с m ненулеви реда, то $\lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_{m+1} = 0$. Следователно редовете

$$\boldsymbol{R}_1 \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{R}_2 \neq \mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{R}_{m+1} \neq \mathbf{0}$$

са линейно независими. Сега от принципа на математическата индукция следва, че лемата вярна за всяка матрица в ешелонна форма.

Твърдение 5.7. *Ако матрицата A е в ешелонна форма, то рангът на A е равен на броя r на ненулевите редове на A.*

Доказателство. Ако A съдържа r ненулеви реда, то те образуват линейно независима подсистема на редовете на A според предишната лема. Тъй като всеки $r+1$ реда на A съдържат нулев ред, всеки $r+1$ реда на A са линейно зависими. Следователно $\mathrm{rk}(A) = r$.

Теорема 5.2. *Ако A е матрицата от коефициенти на дадена хомогенна линейна система от m уравнения за n неизвестни, то пространството от решения на тази хомогенна система има размерност $n - \mathrm{rk}(A)$.*

Доказателство. Тъй като рангът на матрицата на коефициентите и пространството от решенията на системата не се променят при елементарни преобразувания, ние можем да предполагаме, че системата е в ешелонна форма. Тогава броят r на ненулевите редове на A е равен на ранга на A, $r = \mathrm{rk}(A)$. Тъй като фундаменталната система от решения съдържа $n - r$ вектора, размерността на пространството от решения на системата е равна на $n - \mathrm{rk}(A)$.

Теорема 5.3 (Теорема на Руше)**.** *Ако $(A \mid B)$ е разширената матрица на дадена линейна система от m уравнения за n неизвестни, то тази система е съвместима тогава и само тогава, когато* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A \mid B)$.

Доказателство. Както в доказателството на предишната теорема можем да предполагаме, че системата е в ешелонна форма, т.е. матрицата $(A \mid B)$ е в ешелонна форма. Тогава броят r на ненулевите редове на матрицата A е равен на ранга на A, а броят r' на ненулевите редове на разширената матрица $(A \mid B)$ е равен на ранга на $(A \mid B)$. Тъй като системата е съвместима тогава и само тогава, когато $r = r'$, теоремата на Руше е доказана.