Лекция 6

Ранг на транспонираната матрица. Сума и сечение на линейни подпространства

6.1 Ранг на транспонираната матрица

Определение 6.1 (Транспонирана матрица)**.** Нека A е матрица. Матрицата A^t, чиито редове са стълбовете на матрицата A, се нарича *транспонирана матрица* на A.

Нека A е матрица с m реда и n стълба.

Теорема 6.1. *Рангът на транспонираната матрица A^t е равен на ранга на матрицата A.*

Теорема 6.1 може да се формулира по следния начин:

> *Рангът на системата от редовете $\{\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ на матрицата A съвпада с ранга на системата от стълбовете $\{\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \ldots, \boldsymbol{C}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ на матрицата A.*

За да докажем Теорема 6.1, ще използваме следните две леми.

Лема 6.1. *Нека $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ са вектори от $\mathbb{R}^m$. Тогава множеството от вектори*

$$R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1\boldsymbol{c}_1 + x_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{0}\}$$

е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.

Доказателство. Нека проверим, че множеството $R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ изпълнява трите условия за линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$:

- $R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ съдържа нулевия вектор $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$:

$$0 \cdot \boldsymbol{c}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{c}_2 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{0}.$$

- Ако векторите $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ се съдържат в $R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$, то векторът $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ също се съдържа в $R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$:
$$\begin{gathered}(x_1 + y_1)\boldsymbol{c}_1 + (x_2 + y_2)\boldsymbol{c}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{c}_n = \\ = (x_1\boldsymbol{c}_1 + x_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{c}_n) + (y_1\boldsymbol{c}_1 + y_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{c}_n) = \\ = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.\end{gathered}$$
- Ако векторът $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се съдържа в $R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$, то за всяко реално число λ векторът $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ също се съдържа в $R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$:
$$\begin{gathered}(\lambda x_1)\boldsymbol{c}_1 + (\lambda x_2)\boldsymbol{c}_2 + \cdots + (\lambda x_n)\boldsymbol{c}_n = \\ = \lambda(x_1\boldsymbol{c}_1 + x_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{c}_n) = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.\end{gathered}$$

Сега можем да заключим, че множеството $R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.

Лема 6.2. *Нека $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$ е система от вектори от $\mathbb{R}^m$. Тогава*
$$\dim R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = n - \mathrm{rk}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n).$$

Доказателство. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че векторите $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_r$ образуват максимална линейно независима подсистема на системата $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$. Тогава всеки от векторите $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_r$ (виж Лема 4.5):
$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_r & \boldsymbol{c}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{c}_n \\
\shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel \\
1 \cdot \boldsymbol{c}_1 & 0 \cdot \boldsymbol{c}_1 & \cdots & 0 \cdot \boldsymbol{c}_1 & a_{1,r+1}\boldsymbol{c}_1 & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{c}_1 \\
+ & + & & + & + & & + \\
0 \cdot \boldsymbol{c}_2 & 1 \cdot \boldsymbol{c}_2 & \cdots & 0 \cdot \boldsymbol{c}_2 & a_{2,r+1}\boldsymbol{c}_2 & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{c}_2 \\
+ & + & & + & + & & + \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
+ & + & & + & + & & + \\
0 \cdot \boldsymbol{c}_r & 0 \cdot \boldsymbol{c}_r & \cdots & 1 \cdot \boldsymbol{c}_r & a_{r,r+1}\boldsymbol{c}_r & \cdots & a_{rn}\boldsymbol{c}_r
\end{array}$$

Следователно $x_1\boldsymbol{c}_1 + x_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{c}_r + x_{r+1}\boldsymbol{c}_{r+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{c}_n =$
$$\begin{aligned}= \quad & (1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{c}_1 \\ & + (0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n)\boldsymbol{c}_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n)\boldsymbol{c}_r.\end{aligned}$$

От линейната независимост на системата от вектори $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_r\}$ следва, че равенството $x_1\boldsymbol{c}_1 + x_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{c}_n = \mathbf{0}$ е в сила тогава и само тогава, когато векторът $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е решение на хомогенната линейна система

$$\left|\begin{array}{llll} x_1 & & & + a_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ & x_2 & & + a_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ & & \ddots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & x_r & + a_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{array}\right. . \tag{6.1}$$

Следователно линейното подпространство $R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ съвпада с пространството от решения на хомогенната линейна система (6.1). Тъй като система (6.1) е в ешелонна форма и има точно r ненулеви реда,

$$\dim R(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = n - r = n - \mathrm{rk}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n),$$

което трябваше да се докаже.

Сега ще използуваме Лема 6.2, за да докажем Теорема 6.1.

Доказателство на Теорема 6.1: Нека A е матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

с редове

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{R}_1 & = & (\ a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}\ ), \\ \boldsymbol{R}_2 & = & (\ a_{21} \quad a_{22} \quad \ldots \quad a_{2n}\ ), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{R}_m & = & (\ a_{m1} \quad a_{m2} \quad \ldots \quad a_{mn}\ ), \end{array}$$

и стълбове

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \boldsymbol{C}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Нека U е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. .$$

Когато запишем тази хомогенна система по следния начин

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

виждаме, че $U = R(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \ldots, \boldsymbol{C}_n)$. Сега

$$\dim U = n - \mathrm{rk}(A) = n - \mathrm{rk}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_m) \tag{6.2}$$

(виж Теорема 5.2) и

$$\dim R(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \ldots, \boldsymbol{C}_n) = n - \mathrm{rk}(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \ldots, \boldsymbol{C}_n), \tag{6.3}$$

според Лема 6.2. Сравнявайки (6.2) и (6.3) получаваме

$$n - \mathrm{rk}(A) = n - \mathrm{rk}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_m) = n - \mathrm{rk}(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \ldots, \boldsymbol{C}_n).$$

Следователно

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_m) = \mathrm{rk}(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \ldots, \boldsymbol{C}_n),$$

което трябваше да се докаже.

6.2 Сума и сечение на подпространства

Твърдение 6.3. *Ако U_1 и U_2 са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$, то тяхното сечение $U_1 \cap U_2$ също е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.*

Доказателство. Нека проверим, че множеството $U_1 \cap U_2$ изпълнява трите условия за линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$:

- Множеството $U_1 \cap U_2$ съдържа нулевия вектор $\mathbf{0}$, защото линейните подпространства U_1 и U_2 съдържат нулевия вектор $\mathbf{0}$.

- Ако векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ се съдържат в $U_1 \cap U_2$, то векторът $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ също се съдържа в $U_1 \cap U_2$:

  Ако $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U_1 \cap U_2$, то $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U_1$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U_2$, защото множеството $U_1 \cap U_2$ е подмножество на множествата U_1 и U_2. Тогава $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in U_1$ и $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in U_2$, защото U_1 и U_2 са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$. Следователно векторът $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ също се съдържа в $U_1 \cap U_2$.

- Ако векторът $\boldsymbol{x}$ се съдържа в $U_1 \cap U_2$, то за всяко реално число λ векторът $\lambda\boldsymbol{x}$ също се съдържа в $U_1 \cap U_2$:

  Ако $\boldsymbol{x} \in U_1 \cap U_2$, то $\boldsymbol{x} \in U_1$ и $\boldsymbol{x} \in U_2$, защото множеството $U_1 \cap U_2$ е подмножество на множествата U_1 и U_2. Тогава $\lambda\boldsymbol{x} \in U_1$ и $\lambda\boldsymbol{x} \in U_2$, защото U_1 и U_2 са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$. Следователно векторът $\lambda\boldsymbol{x}$ също се съдържа в $U_1 \cap U_2$.

Сега можем да заключим, че множеството $U_1 \cap U_2$ е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.

Пример 6.1. Нека $U_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ е пространството от решения на хомогенната линейна система
$$| \; x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$
и нека $U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ е пространството от решения на хомогенната линейна система
$$| \; x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$
Тогава $U_1 \cap U_2$ е пространството от решения на хомогенната линейна система
$$\left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. .$$
Следователно $U_1 \cap U_2 = l(\boldsymbol{c})$, където $\boldsymbol{c} = (1,1,0)$.

По-общо, ако U_1 е пространството от решения на хомогенната линейна система A, а U_2 е пространството от решения на хомогенната линейна система B, то $U_1 \cap U_2$ е пространството от решения на хомогенната линейна система $A \cup B$, която е обединението на всички уравнения от хомогенните линейни системи A и B.

Определение 6.2 (Сума на подпространства)**.** Нека U_1 и U_2 са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$. Множеството
$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, \; u_2 \in U_2\}$$
се нарича *сума на подпространствата* U_1 и U_2.

Твърдение 6.4. *Ако U_1 и U_2 са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$, то тяхната сума $U_1 + U_2$ също е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.*

Доказателство. Нека проверим, че множеството $U_1 + U_2$ изпълнява трите условия за линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$:

- Множеството $U_1 + U_2$ съдържа нулевия вектор $\mathbf{0}$, защото линейните подпространства U_1 и U_2 съдържат нулевия вектор $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$.

- Ако векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ се съдържат в $U_1 + U_2$, то векторът $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ също се съдържа в $U_1 + U_2$:

  Ако $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U_1 + U_2$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ и $y = \boldsymbol{u}_1' + \boldsymbol{u}_2'$, където $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1' \in U_1$ и $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2' \in U_2$. Тогава

  $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + (\boldsymbol{u}_1' + \boldsymbol{u}_2') = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_1') + (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_2').$$

  Тъй като U_1 и U_2 са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$, то $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_1' \in U_1$ и $\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_2' \in U_2$. Следователно $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U_1 + U_2$.

- Ако векторът $\boldsymbol{x}$ се съдържа в $U_1 + U_2$, то за всяко реално число λ векторът $\lambda\boldsymbol{x}$ също се съдържа в $U_1 + U_2$:

  Ако $\boldsymbol{x} \in U_1 + U_2$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, където $\boldsymbol{u}_1 \in U_1$ и $\boldsymbol{u}_2 \in U_2$. Тогава

  $$\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{u}_1 + \lambda\boldsymbol{u}_2.$$

  Тъй като U_1 и U_2 са линейни подпространства, то $\lambda\boldsymbol{u}_1 \in U_1$ и $\lambda\boldsymbol{u}_2 \in U_2$. Следователно $\lambda\boldsymbol{x} \in U_1 + U_2$.

Сега можем да заключим, че множеството $U_1 + U_2$ е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.

Забележка. Нека U_1, U_2 и U_3 са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$. От асоциативността на събирането на вектори следва, че

$$(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$$

От горното равенство следва, че ако $U_1, \dots, U_k$ са подпространства на $\mathbb{R}^n$, то тяхната сума $U_1 + \cdots + U_k$ е коректно определено линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.

Пример 6.2. Нека $U_1 = l(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)$ и $U_2 = l(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_l)$, където $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ и $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_l$ са вектори от $\mathbb{R}^n$. Тогава всеки вектор $\boldsymbol{u}_1$ от U_1 е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k$, и всеки вектор $\boldsymbol{u}_2$ от U_2 е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_l$, $\boldsymbol{u}_2 = \mu_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \mu_l\boldsymbol{b}_l$. Затова всеки вектор $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ от $U_1 + U_2$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_l$:

$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k + \mu_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \mu_l\boldsymbol{b}_l.$$

Следователно

$$U_1 + U_2 = l(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k) + l(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_l) = l(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_l).$$