Лекция 7

Директна сума на подпространства

7.1 Директна сума на подпространства

Определение 7.1 (Директна сума на подпространства). Нека U_1, U_2 и V са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$, такива че V съдържа U_1 и U_2. Казваме, че линейното подпространство V е *директна сума* на линейните подпространства U_1 и U_2, когато всеки вектор $\boldsymbol{v}$ от V има *единствено* представяне

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \quad \text{където } \boldsymbol{u}_1 \in U_1,\ \boldsymbol{u}_2 \in U_2.$$

Ние ще пишем $V = U_1 \oplus U_2$, когато линейното подпространство V е директна сума на линейните подпространства U_1 и U_2.
По-общо, ако $U_1, \dots, U_k$ и V са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$, такива че V съдържа $U_1, \dots, U_k$, то ние казваме, че V е *директна сума* на $U_1, \dots, U_k$, когато всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от V се представя по *единствен* начин като

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + \dots + \boldsymbol{u}_k, \quad \text{където } \boldsymbol{u}_1 \in U_1, \dots, \boldsymbol{u}_k \in U_k.$$

Ние ще пишем $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$, когато линейното подпространство V е директна сума на линейните подпространства $U_1, \dots, U_k$.

Твърдение 7.1. *Нека $U_1, \dots, U_k$ са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$ и нека $V = U_1 + \dots + U_k$. Тогава $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ точно когато нулевият вектор се представя по единствен начин като сума на вектори съответно от $U_1, \dots, U_k$.*

Доказателство. Ако $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$, то от определението на директна сума следва, че нулевият вектор $\mathbf{0}$ се представя по единствен начин $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0}$ като сума на вектори съответно от $U_1, \dots, U_k$.
Обратно, нека $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0}$ е единственото представяне на вектора $\mathbf{0}$ като сума на вектори съответно от $U_1, \dots, U_k$. Тъй като $V = U_1 + \dots + U_k$, то всеки вектор $\boldsymbol{x} \in V$ се представя като като сума на вектори съответно от $U_1, \dots, U_k$. Нека

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + \dots + \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}'_1 + \dots + \boldsymbol{u}'_k, \quad \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}'_1 \in U_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}'_k \in U_k,$$

са две такива представяния. Тъй като $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}'_1 \in U_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}'_k \in U_k$, то

$$(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}'_1) + \cdots + (\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}'_k) = \mathbf{0}.$$

е представяне на вектора $\mathbf{0}$ като сума на вектори съответно от $U_1, \ldots, U_k$. Следователно $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}'_1 = \mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}'_k = \mathbf{0}$, т.е. $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}'_k$, което трябваше да се докаже.

Следствие 7.2. *Нека U_1, U_2 и V са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$, такива че $V = U_1 \oplus U_2$. Тогава $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$.*

Доказателство. Ако $\boldsymbol{x} \in U_1 \cap U_2$, то $\boldsymbol{x} \in U_1$ и $-\boldsymbol{x} \in U_2$. Тогава

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})$$

е представяне на вектора $\mathbf{0}$ като сума на вектор от U_1 и вектор от U_2. Следователно $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, т.е. множеството $U_1 \cap U_2$ се състои само от нулевия вектор.

Пример 7.1. Нека системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е базис на линейното подпространство $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогава за всяко естествено число $1 \leq m \leq k$ е в сила

$$V = l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m) \oplus l(\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k).$$

Наистина, нека векторите

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{e}_m \in l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m) \\ \boldsymbol{u}_2 &= \lambda_{m+1} \boldsymbol{e}_{m+1} + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k \in l(\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k), \end{aligned}$$

са такива, че

$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{e}_m + \lambda_{m+1} \boldsymbol{e}_{m+1} + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k = \mathbf{0}.$$

Тогава $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_m = 0, \lambda_{m+1} = 0, \ldots, \lambda_k = 0$, защото векторите $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ са линейно независими. Следователно $\boldsymbol{u}_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{u}_2 = \mathbf{0}$, което показва, че векторът $\mathbf{0}$ се представя по единствен начин като сума на вектор от $l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$ и вектор от $l(\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$.

Пример 7.2. Нека $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$. Тогава

$$\mathbb{R}^3 = l(\boldsymbol{e}_1) \oplus l(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = l(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \oplus l(\boldsymbol{e}_3) = l(\boldsymbol{e}_1) \oplus l(\boldsymbol{e}_2) \oplus l(\boldsymbol{e}_3).$$

Пример 7.3. Нека V е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$. Системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е базис на V тогава и само тогава, когато $V = l(\boldsymbol{e}_1) \oplus \cdots \oplus l(\boldsymbol{e}_k)$.

7.2 Размерност на сума от подпространства

Твърдение 7.3. *Нека U_1, U_2 и V са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$, такива че $V = U_1 \oplus U_2$. Ако $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ е базис на U_1 и $\{\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е базис на U_2, то $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е базис на V. В частност,*

$$\dim V = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Доказателство. Тъй като $U_1 = l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$ и $U_2 = l(\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$, то

$$V = U_1 + U_2 = l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m) + l(\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k) = l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k).$$

Следователно всеки вектор от V е линейна комбинация на векторите от системата $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$.
Остава да докажем, че системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е линейно независима. Нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_k$ са реални числа, такива че

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{e}_m + \lambda_{m+1} \boldsymbol{e}_{m+1} + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0}.$$

Нека $\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{e}_m$ и нека $\boldsymbol{u}_2 = \lambda_{m+1} \boldsymbol{e}_{m+1} + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k$. Тогава $\boldsymbol{u}_1 \in U_1$, $\boldsymbol{u}_2 \in U_2$ и $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$. Следователно

$$\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0} \text{ и } \boldsymbol{u}_2 = \lambda_{m+1} \boldsymbol{e}_{m+1} + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0},$$

защото $V = U_1 \oplus U_2$. Сега от линейната независимост на системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ следва, че $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_m = 0$, а от линейната независимост на системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ следва, че $\lambda_{m+1} = 0, \ldots, \lambda_k = 0$. Твърдението е доказано.

Лема 7.4. *Нека $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ е линейно независима система от вектори от $\mathbb{R}^n$. Ако векторът $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$ не се съдържа в $l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$, то системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}\}$ е линейно независима.*

Доказателство. Нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ са реални числа, такива че

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{e}_m + \lambda \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}.$$

Ако $\lambda \neq 0$, то от горното равенство ще следва, че

$$\boldsymbol{e} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_m}{\lambda}\right) \boldsymbol{e}_m.$$

Но това е невъзможно, защото векторът $\boldsymbol{e}$ не се съдържа в $l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$. Следователно $\lambda = 0$ и

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0}.$$

Сега от линейната независимост на векторите $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ получаваме

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_m = 0.$$

Следователно системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}\}$ е линейно независима.

Твърдение 7.5. *Ако $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ са линейно независими вектори от линейното подпространство $V \subseteq \mathbb{R}^n$, то те могат да се допълнят до базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ на V.*

Доказателство. Ако $V = l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$, то системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ е базис на линейното подпространство V. Ако $V \neq l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$, то съществува вектор $\boldsymbol{e}_{m+1}$ от V, който не се съдържа в $l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$. Според Лема 7.4 системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}\}$ е линейно независима. Ако $l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}) = V$, то $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}\}$ е базис на V. Ако $l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}) \neq V$, то продължаваме да добавяме вектори от V, както по-горе. Тъй като всеки $n+1$ вектора от V са линейно зависими, то след не повече от $n-m$ стъпки ще получим линейно независима система от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$, такава че $l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k) = V$, т.е. системата от вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ е базис на V.

Твърдение 7.6. *Нека $U \subseteq V$ са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$. Тогава съществува линейно подпространство $W \subseteq V$, такова че $V = U \oplus W$.*

Доказателство. Нека $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ е базис на U; тогава $U = l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$. Да допълним системата $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ до базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ на V - това е възможно според Твърдение 7.5. Нека $W = l(\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$. Сега, според Пример 7.1 е в сила

$$V = l(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m) \oplus l(\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k).$$

т.е. $V = U \oplus W$.

Теорема 7.1. *Нека U_1 и U_2 са линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$. Тогава*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Доказателство. Нека $W_1 \subseteq U_1$ и $W_2 \subseteq U_2$ са линейни подпространства, такива че $U_1 = (U_1 \cap U_2) \oplus W_1$ и $U_2 = (U_1 \cap U_2) \oplus W_2$. Тогава

$$U_1 + U_2 = (U_1 \cap U_2 + W_1) + (U_1 \cap U_2 + W_2) = W_1 + U_1 \cap U_2 + W_2,$$

защото $U_1 \cap U_2 + U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_2$.
Да покажем, че

$$U_1 + U_2 = W_1 \oplus (U_1 \cap U_2) \oplus W_2. \tag{7.1}$$

Нека векторите $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{x} \in U_1 \cap U_2$, $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ са такива, че

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}.$$

Тогава $\boldsymbol{w}_1 = -(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}_2) \in U_2$ и тъй като $\boldsymbol{w}_1 \in U_1$, то $\boldsymbol{w}_1 \in U_1 \cap U_2$. Следователно $\boldsymbol{w}_1 \in (U_1 \cap U_2) \cap W_1 = \{\boldsymbol{0}\}$, т.е. $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{0}$. Сега от $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ и $U_2 = (U_1 \cap U_2) \oplus W_2$ получаваме $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$. Представянето (7.1) е доказано.
От Твърдение 7.3 и представянето (7.1) на $U_1 + U_2$ като директна сума на линейните подпространства W_1, W_2 и $U_1 \cap U_2$ следва, че

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(W_1) + \dim(U_1 \cap U_2) + \dim W_2.$$

Окончателно

$$\begin{aligned} &\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \\ &= \{\dim W_1 + \dim(U_1 \cap U_2)\} + \{\dim W_2 + \dim(U_1 \cap U_2)\} = \dim U_1 + \dim U_2, \end{aligned}$$

което трябваше да се докаже.

Следствие 7.7. *Нека U_1, U_2 и V са подпространства на $\mathbb{R}^n$, такива че $V = U_1 + U_2$. Тогава $\dim V \leq \dim U_1 + \dim U_2$. Ако $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$, то $V = U_1 \oplus U_2$.*

Доказателство. Според Теорема 7.1

$$\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim U_1 + \dim U_2.$$

Ако $\dim V = \dim U_1 + \dim V_2$, то $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$, т.е. $U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{0}\}$, откъдето следва, че $V = U_1 \oplus U_2$.