Лекция 8

Полилинейни антисиметрични функции

8.1 Линейни, полилинейни и антисиметрични функции

Определение 8.1 (Линейни функции)**.** Казваме, че функцията $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, е *линейна*, когато f удовлетворява следните две условия:

а) $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ за всички вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$;

б) $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$ за всяко реално число λ и всеки вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Да забележим веднага, че $f(\mathbf{0}) = 0$ за всяка линейна функция f, защото

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}).$$

Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е линейна функция. Тогава от условие а) следва, че

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_m) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + f(\boldsymbol{v}_m)$$

за всички вектори $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Ако $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ са реални числа то от а) и б) получаваме

$$f(\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{v}_m) = \lambda_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_m f(\boldsymbol{v}_m)$$

за всички вектори $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Ще записваме горното равенство по следния начин:

$$f(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \boldsymbol{v}_j) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(\boldsymbol{v}_j). \tag{8.1}$$

Пример 8.1. Нека f е линеен функционал (виж. Определение 2.1), т.е. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е функция от вида:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

където $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са реални числа. Тогава, според Твърдение 2.1, f е линейна функция.

Пример 8.2. Всяка линейна функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е линеен функционал. Наистина, нека

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{e}_1 & = & (1, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 & = & (0, 1, \ldots, 0), \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \boldsymbol{e}_n & = & (0, 0, \ldots, 1). \end{array}$$

е стандартният базис на $\mathbb{R}^n$ и нека $a_1 = f(\boldsymbol{e}_1), a_2 = f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, a_n = f(\boldsymbol{e}_n)$. Тогава $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$, откъдето следва, че

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) = \\ &= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \end{aligned}$$

т.е. f е линеен функционал.

Нека сега $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ е *произволен* базис на $\mathbb{R}^n$. Една линейна функция се определя напълно от своите стойности в базисните вектори $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

Твърдение 8.1. *Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ са линейни функции, такива че $f(\boldsymbol{e}_1) = g(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2) = g(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n) = g(\boldsymbol{e}_n)$. Тогава $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ за всеки вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Доказателство. Нека $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$. Тогава

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n), \\ g(\boldsymbol{x}) &= g(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 g(\boldsymbol{e}_1) + x_2 g(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n g(\boldsymbol{e}_n), \end{aligned}$$

т.е. $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ за всеки вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Определението на линейна функция се обобщава за функции на няколко променливи по следния начин:

Определение 8.2 (Полилинейни функции)**.** Нека

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$$

е функция на k променливи. Казваме, че функцията f е *полилинейна*, когато f е линейна функция спрямо всяка от променливите:

а) $f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{y}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_k) + f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ за всяко $1 \le i \le k$ и всички вектори $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$;

б) $f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = \lambda f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ за всяко $1 \le i \le k$, всяко реално число λ и всички вектори $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Нека $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$ е полилинейна функция на k променливи и нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ е произволен базис на $\mathbb{R}^n$. Да изразим векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \ldots, \boldsymbol{x}_k$ чрез векторите от този базис:

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad i = 1, \ldots, k,$$

където x_{ij}, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$, са реални числа. Тогава от полилинейността на функцията f следва, че (сравнете с равенство (8.1))

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k) &= f(\sum_{j_1=1}^{n} x_{1j_1}\boldsymbol{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} x_{2j_2}\boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} x_{kj_k}\boldsymbol{e}_{j_k}) = \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} x_{1j_1} f(\boldsymbol{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} x_{2j_2}\boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} x_{kj_k}\boldsymbol{e}_{j_k}) = \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} x_{1j_1} \sum_{j_2=1}^{n} x_{2j_2} f(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} x_{kj_k}\boldsymbol{e}_{j_k}) = \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} x_{1j_1} \sum_{j_2=1}^{n} x_{2j_2} \ldots \sum_{j_k=1}^{n} x_{kj_k} f(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_k}) = \\
&= \sum_{1 \le j_1, j_2, \ldots, j_k \le n} x_{1j_1} x_{2j_2} \cdots x_{kj_k} f(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_k}),
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

където в последната сума индексите $j_1, j_2, \ldots, j_k$ пробягват независимо всички естествени числа от 1 до n.

Определение 8.3 (Антисиметрични функции)**.** Нека

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$$

е функция на k променливи. Казваме, че f е *антисиметрична функция*, когато

$$f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = -f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$$

за всички $1 \le i \ne j \le k$ и всички вектори $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Лема 8.2. *Ако f е антисиметрична функция и $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$ за $i \ne j$, то $f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = 0$.*

Доказателство. Ако $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$ за $i \ne j$, то от равенствата

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_k) &= f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_k), \\
f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_k) &= -f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_k)
\end{aligned}
$$

следва, че $f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = 0$.

Твърдение 8.3. *Нека $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$ е полилинейна антисиметрична функция на k променливи. Тогава*

$$f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i + \lambda \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$$

за всяко реално число λ, всички вектори $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_j, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ и всички индекси $1 \le i \ne j \le k$.

Доказателство. От полилинейността и антисиметричността на f следва, че

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_i+\lambda\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k)=\\
&=f(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_i,\dots,\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k)+f(\boldsymbol{x}_1,\dots,\lambda\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k)=\\
&=f(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_i,\dots,\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k)+\lambda\,\underbrace{f(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k)}_{0}=\\
&=f(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_i,\dots,\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k),\ \text{което трябваше да се докаже.}
\end{aligned}$$

8.2 Инверсии в пермутация

Определение 8.4 (Инверсии)**.** Нека числата $j_1j_2\dots j_k$ са пермутация на числата $12\dots k$. Казваме, че числата j_p и j_q са в инверсия, когато $p<q$ и $j_p>j_q$. Броят на всички инверсии в пермутацията $j_1j_2\dots j_k$ се означава с $[j_1j_2\dots j_k]$.

Пример 8.3. Инверсиите в пермутацията 4312 са: 43, 41, 42, 31, 32. Следователно $[4312]=5$.

Размяната на местата на две числа в дадена пермутация ще наричаме *транспозиция*.

Лема 8.4. *Всяка пермутация $j_1j_2\dots j_k$ може се преобразува до пермутацията $12\dots k$ с точно $[j_1j_2\dots j_k]$ на брой транспозиции.*

Доказателство. Ако $j_p<j_{p+1}$ за всички $1\le p<k$, пермутацията $j_1j_2\dots j_k$ съвпада с $12\dots k$. Ако $j_p>j_{p+1}$ за някое $1\le p<k$, то след размяна на местата на j_p и j_{p+1} се получава пермутация с една инверсия по-малко. Извършвайки последователно транспозиции на съседни числа по описания начин, ще получим пермутацията $12\dots k$ след точно $[j_1j_2\dots j_k]$ транспозиции.

Пример 8.4. Пермутацията 1234 се получава от пермутацията 4312 чрез 5 транспозиции:

$$4312\to3412\to3142\to1342\to1324\to1234.$$

Определение 8.5 (Четност на пермутация)**.** Нека $j_1j_2\dots j_k$ е пермутация на числата $12\dots k$. Казваме, че пермутацията $j_1j_2\dots j_k$ е *четна* (съотв. *нечетна*), когато броят на инверсиите $[j_1j_2\dots j_k]$ е четно (съотв. *нечетно*) число.

На всеки k естествени числа $j_1,j_2,\dots,j_k$, такива че $1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le k$, ще съпоставяме цяло число $\delta_{j_1j_2\dots j_k}=0,\pm1$ по следния начин:

$$\delta_{j_1j_2\dots j_k}=\begin{cases}0 & \text{когато } j_p=j_q \text{ за някои } 1\le p\ne q\le k;\\ 1 & \text{когато } j_1j_2\dots j_k \text{ е четна пермутация;}\\ -1 & \text{когато } j_1j_2\dots j_k \text{ е нечетна пермутация.}\end{cases}$$

Твърдение 8.5. *Нека $f:\underbrace{\mathbb{R}^n\times\dots\times\mathbb{R}^n}_{k}\to\mathbb{R}$ е антисиметрична функция на k променливи, нека $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k\in\mathbb{R}^n$ и нека $j_1,j_2,\dots,j_k$ са естествени числа, такива че $1\le j_1,j_2,\dots,j_k\le k$. Тогава*

$$f(\boldsymbol{x}_{j_1},\boldsymbol{x}_{j_2},\dots,\boldsymbol{x}_{j_k})=\delta_{j_1j_2\dots j_k}f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k).$$

Доказателство. Ако $j_p = j_q$ за $p \neq q$, то $f(\boldsymbol{x}_{j_1}, \boldsymbol{x}_{j_2}, \dots, \boldsymbol{x}_{j_k}) = 0$, според Лема 8.2. Ако $j_p \neq j_q$ за всички $1 \leq p \neq q \leq k$, то $j_1 j_2 \dots j_k$ е пермутация на числата $12 \dots k$ и $\boldsymbol{x}_{j_1}, \boldsymbol{x}_{j_2}, \dots, \boldsymbol{x}_{j_k}$ е пермутация на векторите $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$. Тъй като $\boldsymbol{x}_{j_1}, \boldsymbol{x}_{j_2}, \dots, \boldsymbol{x}_{j_k}$ може да се преобразува в $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ с точно $[j_1 j_2 \dots j_k]$ транспозиции и тъй като знакът на f се сменя при всяка транспозиция на векторите, то $f(\boldsymbol{x}_{j_1}, \boldsymbol{x}_{j_2}, \dots, \boldsymbol{x}_{j_k}) = \delta_{j_1 j_2 \dots j_k} f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k)$.

Лема 8.6. *Ако пермутацията $i_1 i_2 \dots i_k$ се получава от пермутацията $j_1 j_2 \dots j_k$ чрез транспозиция на j_p и j_q, $p < q$, то $i_1 i_2 \dots i_k$ и $j_1 j_2 \dots j_k$ имат различна четност.*

Доказателство. Ако $q = p + 1$, то след размяната на j_p и j_{p+1} се получава пермутация, в която има една инверсия повече или една инверсия по-малко. В общия случай, транспозицията на j_p и j_q се осъществява чрез $2q - 2p - 1$ транспозиции на съседни числа: първо последователно разменяме местата на j_p и $j_{p+1}, \dots, j_q$ ($q - p$ транспозиции на съседни числа), след което последователно разменяме местата на j_q и $j_{q-1}, \dots, j_{p+1}$ ($q - p - 1$ транспозиции на съседни числа). От промяната на четността на пермутацията след всяка от тези $2q - 2p - 1$ транспозиции следва, че $i_1 i_2 \dots i_k$ и $j_1 j_2 \dots j_k$ имат различна четност.

Твърдение 8.7. *Ако пермутацията $i_1 i_2 \dots i_k$ се получава от пермутацията $j_1 j_2 \dots j_k$ чрез транспозиция на j_p и j_q, $p \neq q$, то*

$$\delta_{i_1 i_2 \dots i_k} = -\delta_{j_1 j_2 \dots j_k}.$$

Доказателство. Следва непосредствено от определението на δ и Лема 8.6.

8.3 Полилинейни антисиметрични функции

Твърдение 8.8. *Нека $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}$ е полилинейна антисиметрична функция на k променливи. Ако векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ са линейно зависими, то $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k) = 0$.*

Доказателство. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че

$$\boldsymbol{x}_1 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i.$$

Тогава от полилинейността на f следва, че

$$f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k) = f(\sum_{i=2}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k) = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k).$$

Сега $f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i, \dots, \boldsymbol{x}_k) = 0$ за всяко $i = 2, \dots, k$, защото f е антисиметрична функция. Следователно $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k) = 0$.

Следствие 8.9. *Нека $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}$ е полилинейна антисиметрична функция на k променливи. Ако $k > n$, то $f = 0$, т.е. $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k) = 0$ за всички вектори $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$.*

Доказателство. Когато $k > n$, векторите $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ са винаги линейно зависими. Следователно $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k) = 0$, според Твърдение 8.8.

От сега нататък ще разглеждаме полилинейни антисиметрични функции, за които броят на променливите k съвпада с размерността n на линейното пространство $\mathbb{R}^n$.

Твърдение 8.10. *Нека* $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}$ *е полилинейна антисиметрична функция на* n *променливи. Ако векторите* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *са базис на* $\mathbb{R}^n$ *и*

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

то

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) \sum_{1 \le j_1, j_2, \dots, j_n \le n} \delta_{j_1 j_2 \dots j_n} x_{1j_1} x_{2j_2} \dots x_{nj_n}.$$

Доказателство. Вече знаем (вижте равенство (8.2)), че

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{1 \le j_1, j_2, \dots, j_n \le n} x_{1j_1} x_{2j_2} \dots x_{nj_n} f(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \dots, \boldsymbol{e}_{j_n}).$$

Сега $f(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \dots, \boldsymbol{e}_{j_n}) = \delta_{j_1 j_2 \dots j_n} f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$, съгласно Твърдение 8.5. Следователно

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) &= \sum_{1 \le j_1, j_2, \dots, j_n \le n} x_{1j_1} x_{2j_2} \dots x_{nj_n} \delta_{j_1 j_2 \dots j_n} f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) \\ &= f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) \sum_{1 \le j_1, j_2, \dots, j_n \le n} \delta_{j_1 j_2 \dots j_n} x_{1j_1} x_{2j_2} \dots x_{nj_n}, \end{aligned}$$

което трябваше да се докаже.

Следствие 8.11. *Нека* $f, g : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}$ *са две полилинейни антисиметрични функции на* n *променливи. Ако*

$$f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$$

за някой базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ *на* $\mathbb{R}^n$*, то* $f = g$*, т.е.*

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = g(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)$$

за всички $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$.

Доказателство. Следва непосредствено от Твърдение 8.10.

Теорема 8.1. *За всеки базис* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *на* $\mathbb{R}^n$ *и всяко реално число* A *съществува единствена полилинейна антисиметрична функция на* n *променливи* $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}$*, такава че* $f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = A$.

Доказателство. Следствие 8.11 показва, че ако функция с описаните свойства съществува, то тази функция е единствена.
Нека $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}$ е функцията, зададена с

$$f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = A \sum_{1 \le j_1, j_2, \ldots, j_n \le n} \delta_{j_1 j_2 \ldots j_n} \, x_{1j_1} x_{2j_2} \ldots x_{nj_n}, \tag{8.3}$$

където $\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \boldsymbol{e}_j$, $i = 1, \ldots, n$.
Да проверим, че функцията f е полилинейна. Достатъчно е да забележим, че във формула (8.3) всяко събираемо $\delta_{j_1 j_2 \ldots j_n} \, x_{1j_1} x_{2j_2} \ldots x_{nj_n}$ е полилинейна функция на $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \ldots, \boldsymbol{x}_n$, а сума на полилинейни функции е отново полилинейна функция. По-подробно, нека проверим, че f изпълнява условия а) и б) на Определение 8.2:
а) Нека $1 \le p \le n$ и $\boldsymbol{y}_p = \sum_{j=1}^n y_{pj} \boldsymbol{e}_j$. Тогава $\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{y}_p = \sum_{j=1}^n (x_{pj} + y_{pj}) \boldsymbol{e}_j$. Следователно

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{y}_p, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \\
&= A \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_n \le n} \delta_{j_1 \ldots j_p \ldots j_n} \, x_{1j_1} \ldots (x_{pj_p} + y_{pj_p}) \ldots x_{nj_n} = \\
&= A \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_n \le n} \delta_{j_1 \ldots j_p \ldots j_n} \, x_{1j_1} \ldots x_{pj_p} \ldots x_{nj_n} + \\
&+ A \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_n \le n} \delta_{j_1 \ldots j_p \ldots j_n} \, x_{1j_1} \ldots y_{pj_p} \ldots x_{nj_n} = \\
&= f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p, \ldots, \boldsymbol{x}_n) + f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_p, \ldots, \boldsymbol{x}_n).
\end{aligned}$$

б) Нека $1 \le p \le n$ и λ е реално число. Тогава $\lambda \boldsymbol{x}_p = \sum_{j=1}^n (\lambda x_{pj}) \boldsymbol{e}_j$. Следователно

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \lambda \boldsymbol{x}_p, \ldots, \boldsymbol{x}_n) &= A \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_n \le n} \delta_{j_1 \ldots j_p \ldots j_n} \, x_{1j_1} \ldots (\lambda x_{pj_p}) \ldots x_{nj_n} = \\
&= \lambda A \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_n \le n} \delta_{j_1 \ldots j_p \ldots j_n} \, x_{1j_1} \ldots x_{pj_p} \ldots x_{nj_n} = \\
&= \lambda f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p, \ldots, \boldsymbol{x}_n).
\end{aligned}$$

От а) и б) следва, че f е полилинейна функция.
За да проверим, че функцията f е антисиметрична, ще използваме, че δ е антисиметрична функция на индексите $j_1 j_2 \ldots j_n$ (вижте Твърдение 8.7), т.е.

$$\delta_{j_1 \ldots j_q \ldots j_p \ldots j_n} = -\delta_{j_1 \ldots j_p \ldots j_q \ldots j_n} \text{ за всички } 1 \le p \ne q \le n.$$

Нека $1 \leq p \neq q \leq n$. Тогава

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_q, \ldots, \boldsymbol{x}_p, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \\ &= A \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_q, \ldots j_n \leq n} \delta_{j_1 \ldots j_p \ldots j_q \ldots j_n}\, x_{1j_1} \ldots x_{qj_p} \ldots x_{pj_q} \ldots x_{nj_n} = \\ &= A \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_q, \ldots j_n \leq n} -\delta_{j_1 \ldots j_q \ldots j_p \ldots j_n}\, x_{1j_1} \ldots x_{pj_q} \ldots x_{qj_p} \ldots x_{nj_n} = \\ &= -A \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_q, \ldots j_n \leq n} \delta_{j_1 \ldots j_q \ldots j_p \ldots j_n}\, x_{1j_1} \ldots x_{pj_q} \ldots x_{qj_p} \ldots x_{nj_n} = \\ &= -A \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_p, \ldots, j_q, \ldots j_n \leq n} \delta_{j_1 \ldots j_p \ldots j_q \ldots j_n}\, x_{1j_1} \ldots x_{pj_p} \ldots x_{qj_q} \ldots x_{nj_n} = \\ &= -f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p, \ldots, \boldsymbol{x}_q, \ldots, \boldsymbol{x}_n), \end{aligned}$$

Накрая, да проверим, че $f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = A$. Нека

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{e}_n.$$

Тогава $\delta_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, x_{1j_1} x_{2j_2} \ldots x_{nj_n} \neq 0$ само когато $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_n = n$ и $\delta_{12\ldots n}\, x_{11} x_{22} \ldots x_{nn} = 1$. Следователно $f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = A$ и доказателството на теоремата е завършено.