Лекция 9

Детерминанти. Определение и свойства

9.1 Детерминанта на матрица

Нека $M_n(\mathbb{R})$ е множеството от всички матрици с n реда и n стълба. На всяка наредена n-орка от вектори $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n}$, където

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \\ \boldsymbol{x}_2 &= (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{x}_n &= (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}), \end{aligned}$$

ще съпоставяме матрицата

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

с редове $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{x}_n$. Обратно, на всяка матрица X от $M_n(\mathbb{R})$ ще съпоставяме наредената n-орка $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n) \in \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n}$, състояща се от редовете на X. Ясно е, че по този начин се получава взаимно еднозначно съответствие между множеството $M_n(\mathbb{R})$ и множеството $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n}$, което ни позволява да ги отъждествим.

Нека

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

е стандартният базис на $\mathbb{R}^n$. Тогава на наредената n-орка $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ от

$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n}$ съответства *единичната матрица*

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Прилагайки Теорема 8.1 за стандартния базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ на $\mathbb{R}^n$ и $A = 1$ получаваме

Теорема 9.1. *Съществува единствена функция*

$$\det : M_n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},$$

такава че:

а) за всяко $1 \leq i \leq n$ *и всички* $\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{R}'_i \dots, \boldsymbol{R}_n \in \mathbb{R}^n$ *е в сила*

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots\dots\dots \\ \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{R}'_i \\ \dots\dots\dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{R}'_i \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix};$$

б) за всяко $1 \leq i \leq n$*, всяко число* λ *и всички* $\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \dots, \boldsymbol{R}_n \in \mathbb{R}^n$ *е в сила*

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots \\ \lambda \boldsymbol{R}_i \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix};$$

в) за всички $1 \leq i \neq j \leq n$ *и всички* $\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \dots, \boldsymbol{R}_j, \dots, \boldsymbol{R}_n \in \mathbb{R}^n$ *е в сила*

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_j \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_j \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix};$$

г) $\det E_n = 1$.

Доказателство. Съществуването на единствена функция $\det : M_n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, удовлетворяваща условия а), б), в) и г), следва от Теорема 8.1 и описаното по-горе взаимно еднозначно съответствие между множествата $M_n(\mathbb{R}^n)$ и $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n}$.

Определение 9.1 (Детерминанти)**.** Функцията $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, описана в Теорема 9.1, се нарича *детерминанта*.

Ще използваме означението

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

за детерминантата $\det X$ на матрицата $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.
От Твърдение 8.10 следва, че

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} \delta_{j_1 j_2 \dots j_n} \, x_{1j_1} x_{2j_2} \dots x_{nj_n}, \tag{9.1}$$

където индексите $j_1 j_2 \dots j_n$ пробягват всички пермутации на числата $12 \dots n$.

Пример 9.1. Нека $n = 2$. Тогава 12 и 21 са всички пермутации на числата 1 и 2, като 12 е четна пермутация, а 21 е нечетна пермутация. Следователно

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} \delta_{j_1 j_2} \, x_{1j_1} x_{2j_2} = \delta_{12} \, x_{11} x_{22} + \delta_{21} \, x_{12} x_{21} =$$
$$= x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21}.$$

Пример 9.2. Нека $n = 3$. Тогава

$$123 \quad 231 \quad 312 \quad 321 \quad 132 \quad 213$$

са всички пермутации на числата $1, 2, 3$. Пермутациите 123, 231 и 312 са четни, а пермутациите 321, 132 и 213 са нечетни. Следователно

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} \delta_{j_1 j_2 j_3} \, x_{1j_1} x_{2j_2} x_{3j_3} =$$
$$= \delta_{123} \, x_{11} x_{22} x_{33} + \delta_{231} \, x_{12} x_{23} x_{31} + \delta_{312} \, x_{13} x_{21} x_{32} +$$
$$+ \delta_{321} \, x_{13} x_{22} x_{31} + \delta_{132} \, x_{11} x_{23} x_{32} + \delta_{213} \, x_{12} x_{21} x_{33} =$$
$$= x_{11} x_{22} x_{33} + x_{12} x_{23} x_{31} + x_{13} x_{21} x_{32} - x_{13} x_{22} x_{31} - x_{11} x_{23} x_{32} - x_{12} x_{21} x_{33}.$$

Твърдение 9.1. *Нека x_{ij}, $1 \le i \le j \le n$, са реални числа. Тогава*

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = x_{11} x_{22} \dots x_{nn}.$$

Доказателство. Ако $\delta_{j_1 j_2 \dots j_n} \, x_{1j_1} x_{2j_2} \dots x_{nj_n} \neq 0$, то $j_1 j_2 \dots j_n$ е пермутация на числата $12 \dots n$, такава че $1 \le j_1, 2 \le j_2, \dots, n \le j_n$. Тъй като само пермутацията $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $\dots$, $j_n = n$ удовлетворява тези неравенства, формулата е доказана.

9.2 Свойства на детерминантите

Твърдение 9.2. *За всички* $1 \le i \ne j \le n$ *и всички* $\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \dots, \boldsymbol{R}_j, \dots, \boldsymbol{R}_n$ *от* $\mathbb{R}^n$ *е в сила*

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots\dots\dots \\ \boldsymbol{R}_i + \lambda \boldsymbol{R}_j \\ \dots\dots\dots \\ \boldsymbol{R}_j \\ \dots\dots\dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_j \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix}.$$

Доказателство. Следва от Твърдение 8.3, защото детерминантата е полилинейна антисиметрична функция на редовете $\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \dots, \boldsymbol{R}_j, \dots, \boldsymbol{R}_n$.

Лема 9.3. *Нека матрицата* $Y \in M_n(\mathbb{R})$ *се получава от матрицата* $X \in M_n(\mathbb{R})$ *чрез последователност от елементарни преобразувания на редовете. Тогава*

$$\det Y = \alpha \det X,$$

където α *е число, различно от* 0.

Доказателство. Първо да проследим как се променя детерминантата при всеки от трите вида елементарни преобразувания на редовете:

а) ако Y се получава от X чрез размяна на два реда, то

$$\det Y = (-1) \det X;$$

б) ако Y се получава от X чрез умножение на ред с число $\lambda \ne 0$, то

$$\det Y = \lambda \det X, \quad \lambda \ne 0;$$

в) ако Y се получава от X чрез прибавяне към някой от редовете на X на друг ред на X, умножен с число λ, то (вижте Твърдение 9.2)

$$\det Y = \det X.$$

Сега от а), б) и в) следва, че ако Y се получава от X чрез m последователни елементарни преобразувания на редовете, то

$$\det Y = \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_2 \alpha_1 \det X,$$

където всяко от числата $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$ е различно от 0. Полагайки

$$\alpha = \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_2 \alpha_1,$$

получаваме

$$\det Y = \alpha \det X, \quad \alpha \ne 0,$$

което трябваше да се докаже.

Твърдение 9.4. *Векторите* $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n \in \mathbb{R}^n$ *са линейно зависими тогава и само тогава, когато*

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{R}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix} = 0.$$

Доказателство. Трябва да докажем, че:

а) *ако векторите* $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ *от* $\mathbb{R}^n$ *са линейно зависими, то*

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{R}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix} = 0.$$

Доказателство. Това следва от Твърдение 8.8, защото детерминантата е полилинейна антисиметрична функция на редовете $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$;

б) *ако векторите* $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ *от* $\mathbb{R}^n$ *са линейно независими, то*

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{R}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Доказателство. Нека $X \in M_n(\mathbb{R})$ е матрицата с редове $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ и нека $Y \in M_n(\mathbb{R})$ е матрица в ешелонна форма, която се получава от X чрез последователност от елементарни преобразувания на редовете. Тогава i-тият ред на Y трябва да започва с точно $i-1$ нули за всяко $i = 1, \ldots, n$ (в противен случай последният ред ще се окаже нулев!). Следователно

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & y_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

и $\det Y = 1$. Тъй като според Лема 9.3 $\det Y = \alpha \det X$ за някое число $\alpha \neq 0$, то $\det X = \alpha^{-1} \neq 0$, което трябваше да се докаже.

Тъй като Твърдение 9.4 е еквивалентно на а) и б), доказателството е завършено.

Твърдение 9.5. *Нека* $X \in M_n(\mathbb{R})$ *и нека* $X^t \in M_n(\mathbb{R})$ *е транспонираната матрица на* X. *Тогава* $\det X^t = \det X$.

Доказателство. Нека $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Тъй като $X^t = (x_{ji}) \in M_n(\mathbb{R})$, то от формула (9.1) следва, че

$$\det X^t = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_n} \delta_{j_1 j_2 \ldots j_n} \, x_{j_1 1} x_{j_2 2} \ldots x_{j_n n},$$

където индексите $j_1 j_2 \ldots j_n$ пробягват всички пермутации на числата $12 \ldots n$.

Да забележим, че за всяка пермутация $j_1j_2\dots j_n$ съществува единствена пермутация $k_1k_2\dots k_n$, такава че $x_{j_1 1}x_{j_2 2}\dots x_{j_n n} = x_{1k_1}x_{2k_2}\dots x_{nk_n}$. Да забележим също, че ако $12\dots n$ се получава от $j_1j_2\dots j_n$ чрез *дадена* последователност от транспозиции, то $k_1k_2\dots k_n$ се получава от $12\dots n$ чрез *същата* последователност от транспозиции. Следователно $j_1j_2\dots j_n$ и $k_1k_2\dots k_n$ имат еднаква четност, $\delta_{k_1k_2\dots k_n} = \delta_{j_1j_2\dots j_n}$ и

$$\delta_{j_1j_2\dots j_n}\, x_{j_1 1}x_{j_2 2}\dots x_{j_n n} = \delta_{k_1k_2\dots k_n}\, x_{1k_1}x_{2k_2}\dots x_{nk_n}.$$

Тъй като за всяка пермутация $k_1k_2\dots k_n$ съществува единствена пермутация $j_1j_2\dots j_n$, такава че $x_{1k_1}x_{2k_2}\dots x_{nk_n} = x_{j_1 1}x_{j_2 2}\dots x_{j_n n}$, то

$$\sum_{j_1j_2\dots j_n} \delta_{j_1j_2\dots j_n}\, x_{j_1 1}x_{j_2 2}\dots x_{j_n n} = \sum_{k_1k_2\dots k_n} \delta_{k_1k_2\dots k_n}\, x_{1k_1}x_{2k_2}\dots x_{nk_n},$$

т.е. $\det X^t = \det X$, което трябваше да се докаже.

Забележка. От Твърдение 9.5 следва, че детерминантата на една матрица $X \in M_n(\mathbb{R})$ е също така полилинейна антисиметрична функция на *стълбовете* на матрицата X. Аналогично, ако към някой от *стълбовете* на X прибавим друг *стълб*, умножен с число, то детерминантата на така получената матрица съвпада с детерминантата на X.

9.3 Развитие по ред и по стълб

Определение 9.2 (Адюнгирани количества)**.** Нека $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ е дадена матрица и нека A_{pq} е детерминантата на матрицата, която се получава от X след премахване на p-ти ред и q-ти стълб, $1 \le p, q \le n$. Числото

$$\Delta_{pq} = (-1)^{p+q} A_{pq}, \quad 1 \le p, q \le n,$$

се нарича *адюнгирано количество* на елемента x_{pq}, $1 \le p, q \le n$.

Да запишем A_{pq} в явен вид:

$$A_{pq} = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,q-1} & x_{1,q+1} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p-1,1} & \dots & x_{p-1,q-1} & x_{p-1,q+1} & \dots & x_{p-1,n} \\ x_{p+1,1} & \dots & x_{p+1,q-1} & x_{p+1,q+1} & \dots & x_{p+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{n,q-1} & x_{n,q+1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Съгласно формула (9.1)

$$(9.2)\quad A_{pq} = \sum_{j_1\dots j_{p-1}j_{p+1}\dots j_n} \delta_{j_1\dots j_{p-1}j_{p+1}\dots j_n}\, x_{1j_1}\dots x_{p-1,j_{p-1}}x_{p+1,j_{p+1}}\dots x_{nj_n},$$

където индексите $j_1\dots j_{p-1}j_{p+1}\dots j_n$ пробягват всички пермутации на числата $1,\dots,q-1,q+1,\dots,n$.

Теорема 9.2 (Развитие по ред/стълб)**.** *Нека* $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. *Тогава:*

а) за всяко $1 \leq p \leq n$ *е в сила*

$$\det X = x_{p1}\Delta_{p1} + x_{p2}\Delta_{p2} + \cdots + x_{pn}\Delta_{pn};$$

б) за всяко $1 \leq q \leq n$ *е в сила*

$$\det X = x_{q1}\Delta_{q1} + x_{q2}\Delta_{q2} + \cdots + x_{qn}\Delta_{qn}.$$

В доказателството на Теорема 9.2 ще използваме следната лема.

Лема 9.6. *Нека* $1 \leq p, q \leq n$ *и нека* $j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n$ *е пермутация на числата* $1, \dots, q-1, q+1, \dots, n$. *Тогава*

$$\delta_{j_1 \dots j_{p-1} q j_{p+1} \dots j_n} = (-1)^{p+q}\, \delta_{j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n}.$$

Доказателство. Първо да забележим, че

$$\delta_{j_1 \dots j_{p-1} q j_{p+1} \dots j_n} = (-1)^{p-1}\, \delta_{q j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n},$$

защото $q j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n$ се получава от $j_1 \dots j_{p-1} q j_{p+1} \dots j_n$ чрез $p-1$ транспозиции. Да забележим също, че в пермутацията $q j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n$ числото q е в инверсия с всички числа от 1 до $q-1$. Следователно

$$[q j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n] = [j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n] + q - 1,$$

откъдето следва, че

$$\delta_{q j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n} = (-1)^{q-1}\, \delta_{j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n}.$$

Окончателно

$$\begin{aligned} \delta_{j_1 \dots j_{p-1} q j_{p+1} \dots j_n} &= (-1)^{p-1} \delta_{q j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n} = \\ = (-1)^{p-1} (-1)^{q-1}\, \delta_{j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n} &= (-1)^{p+q}\, \delta_{j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_n}, \end{aligned}$$

което трябваше да се докаже.

Доказателство на Теорема 9.2: Достатъчно е да докажем а), защото б) следва от а) и равенството $\det X^t = \det X$ от Твърдение 9.5.
Както знаем от формула (9.1), детерминантата на X е равна на

$$\sum_{j_1 j_2 \dots j_n} \delta_{j_1 j_2 \dots j_n}\, x_{1 j_1} x_{2 j_2} \dots x_{n j_n}, \tag{9.3}$$

където индексите $j_1 j_2 \dots j_n$ пробягват всички пермутации на числата $12 \dots n$. Нека $1 \leq p \leq n$ е фиксирано число. За всяко $1 \leq q \leq n$, нека B_{pq} е сумата на всички събираеми $\delta_{j_1 j_2 \dots j_p \dots j_n}\, x_{1 j_1} x_{2 j_2} \dots x_{p j_p} \dots x_{n j_n}$ в (9.3), такива че $j_p = q$. Ясно е, че е в сила тъждеството

$$\det X = B_{p1} + B_{p2} + \cdots + B_{pn}. \tag{9.4}$$

Ще покажем, че $B_{pq} = x_{pq}\Delta_{pq}$, $1 \leq q \leq n$, което незабавно влече а).

От определението на B_{pq} следва, че

$$\begin{aligned} B_{pq} &= \sum_{j_1\dots j_{p-1}j_{p+1}\dots j_n} \delta_{j_1\dots j_{p-1}qj_{p+1}\dots j_n} x_{1j_1}\dots x_{p-1,j_{p-1}} x_{pq}\, x_{p+1,j_{p+1}}\dots x_{nj_n} = \\ &= x_{pq} \sum_{j_1\dots j_{p-1}j_{p+1}\dots j_n} \delta_{j_1\dots j_{p-1}qj_{p+1}\dots j_n} x_{1j_1}\dots x_{p-1,j_{p-1}} x_{p+1,j_{p+1}}\dots x_{nj_n}, \end{aligned}$$

където индексите $j_1\dots j_{p-1}j_{p+1}\dots j_n$ пробягват всички пермутации на числата $1,\dots,q-1,q+1,\dots,n$. Прилагайки Лема 9.6 към всяко от събираемите в горната сума, получаваме

$$\begin{aligned} &\delta_{j_1\dots j_{p-1}qj_{p+1}\dots j_n} x_{1j_1}\dots x_{p-1,j_{p-1}} x_{p+1,j_{p+1}}\dots x_{nj_n} = \\ &= (-1)^{p+q}\,\delta_{j_1\dots j_{p-1}j_{p+1}\dots j_n} x_{1j_1}\dots x_{p-1,j_{p-1}} x_{p+1,j_{p+1}}\dots x_{nj_n}. \end{aligned}$$

Сравнявайки тези събираеми със събираемите във формула (9.2) на стр. 52, получаваме равенствата $B_{pq} = x_{pq}(-1)^{p+q}A_{pq}$, т.е. $B_{pq} = x_{pq}\Delta_{pq}$, $1 \le q \le n$, които заедно с тъждеството (9.4) завършват доказателството на теоремата.

Следствие 9.7. *Нека* $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. *Тогава:*

а) за всички $1 \le p \ne r \le n$ *е в сила*

$$x_{p1}\Delta_{r1} + x_{p2}\Delta_{r2} + \dots + x_{pn}\Delta_{rn} = 0;$$

б) за всички $1 \le q \ne s \le n$ *е в сила*

$$x_{1q}\Delta_{1s} + x_{2q}\Delta_{2s} + \dots + x_{nq}\Delta_{ns} = 0.$$

Доказателство. Отново е достатъчно да докажем а), защото б) следва от а) и равенството $\det X^t = \det X$ от Твърдение 9.5.
Нека $1 \le p \ne r \le n$. Да разгледаме детерминантата

$$\begin{array}{r} \\ \\ p\text{-ти ред} \rightarrow \\ \\ r\text{-ти ред} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Тази детерминанта е равна на 0, защото p-ти и r-ти ред съвпадат. Развивайки детерминантата по r-ти ред, получаваме:

$$x_{p1}\Delta_{r1} + x_{p2}\Delta_{r2} + \dots + x_{pn}\Delta_{rn} = 0,$$

което трябваше да се докаже.