Глава 10

Въпрос 10: Алгоритъм на Бухбергер за построяване на базис на Грьобнер. Съществуване и единственост на редуциран базис на Грьобнер.

Да започнем със следния

Пример 10.1. *Полиномите $f_1 = x^3 - 2xy$ и $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$ не образуват базис на Грьобнер на ненулевия идеал $I = \langle f_1, f_2 \rangle \lhd k[x, y]$ относно градуирано лексикографската наредба $>_{\text{grlex}}$. Ще допълним f_1, f_2 до базис на Грьобнер $f_1, f_2, f_3 := -x^2, f_4 := -2xy, f_5 := -2y^2 + x$ на идеала $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, \dots, f_5 \rangle \lhd k[x, y]$ относно $>_{\text{grlex}}$.*

Доколкото $LT(S(f_1, f_2)) = -x^2 \notin \langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle$, двойката $F = \{f_1, f_2\}$ не е базис на Грьобнер на I. Всъщност, $S(f_1, f_2) = -x^2 \in I$ дава ненулев остатък $-x^2$ при деление с F, така че има известно основание да присъединим $f_3 := -x^2$ към пораждащите на I и да приложим критерия от Теорема 5 към $F_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$, за да установим дали F_1 е базис на Грьобнер на I. По-точно, пресмятаме

$$S(f_1, f_2) = f_3, \quad \overline{S(f_1, f_2)}^{F_1} = \overline{f_3}^{F_1} = 0,$$

$$S(f_1, f_3) = (x^3 - 2xy) - (-x)(-x^2) = -2xy, \quad \overline{S(f_1, f_3)}^{F_1} = \overline{(-2xy)}^{F_1} = -2xy \neq 0.$$

Това показва, че трябва да присъединим $f_4 := -2xy$ към F_1 и да разгледаме $F_2 = \{f_1, \dots, f_4\}$. Пресмятаме

$$\overline{S(f_1, f_2)}^{F_2} = \overline{S(f_1, f_3)}^{F_2} = 0,$$

$$S(f_1, f_4) = y(x^3 - 2xy) - \left(-\frac{1}{2}\right) x^2(-2xy) = -2xy^2 = yf_4,$$

откъдето $\overline{S(f_1, f_4)}^{F_2} = 0$. По-нататък,

$$S(f_2, f_3) = (x^2y - 2y^2 + x) - (-y)(-x^2) = -2y^2 + x$$

има остатък $\overline{S(f_2, f_3)}^{F_2} = -2y^2 + x \neq 0$. Това показва, че трябва да присъединим $f_5 := -2y^2 + x$ към F_2 и да разгледаме $F_3 = \{f_1, \dots, f_5\}$. Сега вече $\overline{S(f_i, f_j)}^{F_3} = 0$ за всички $1 \leq i < j \leq 5$, така че F_3 е базис на Грьобнер на I съгласно Теорема 5.
Начинът, по който получихме базис на Грьобнер в Пример 10.1 е известен като алгоритъм на Бухбергер.

Теорема 6. **(Алгоритъм на Бухбергер)** *За всеки ненулев идеал $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ в полиномиалния пръстен $k[x_1, \dots, x_n]$ с коефициенти от поле k, следният* *алгоритъм предоставя базис на Грьобнер на I след краен брой стъпки:*

$$
\begin{array}{llll}
Input: & F = (f_1, \dots, f_s) & & \\
Output: & G = (g_1, \dots, g_t), & & F \subseteq G \\
G := F & & & \\
REPEAT & & & \\
 & G' := G & & \\
 & FOR\ \ EACH & \{p \neq q\} \subseteq G' \ \ DO & \\
 & & S := \overline{S(p,q)}^{G'} & \\
 & & IF\ \ S \neq 0\ \ THEN\ \ G := G \cup \{S\} & \\
UNTIL & G = G' & &
\end{array}
$$

Доказателство: Първо ще установим, че множеството G се съдържа в идеала I на всяка стъпка от алгоритъма. Първоначално $G := F \subset I$. На всяка следваща стъпка присъединяваме остатъка $S = \overline{S(p,q)}^{G'}$ при деление на $S(p,q) \in \langle p,q \rangle \subseteq \langle G' \rangle \subseteq I$ с $G' \subset I$, който очевидно принадлежи на $\langle G' \rangle \subseteq I$. Още повече, всички множества G съдържат $F = (f_1, \dots, f_s)$, така че пораждат I като идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$.
Алгоритъмът спира при $G = G'$, което се случва точно когато остатъците $\overline{S(p,q)}^{G} = 0$ се анулират за всички $p, q \in G$. Съгласно Теорема 5, това е вярно тогава и само тогава, когато G е базис на Грьобнер на $\langle G \rangle = I$.
Остава да докажем, че алгоритъмът винаги спира след краен брой стъпки. След всяко преминаване през основния цикъл към множеството G се присъединяват евентуално ненулевите остатъци на S-полиномите на двойките от G. По този начин, алгоритъмът предоставя ненамаляваща редица от мономни идеали

$$\langle LT(F) \rangle \subseteq \langle LT(G_1) \rangle \subseteq \langle LT(G_2) \rangle \subseteq \dots .$$

Твърдим, че ако G_i се съдържа строго в G_{i+1}, то и $\langle LT(G_i) \rangle$ се съдържа строго в $\langle LT(G_{i+1}) \rangle$. Наистина, ако r е ненулев остатък на S-полином с аргументи от G_i, то старшият му член $LT(r)$ не се дели на старшите членове на елементите на G_i, така че $LT(r) \not\in \langle LT(G_i) \rangle$. Доколкото $r \in G_{i+1}$ и $LT(r) \in \langle LT(G_{i+1}) \rangle$, оттук следва, че $\langle LT(G_{i+1}) \rangle$ съдържа строго $\langle LT(G_i) \rangle$.
Сега съгласно Теорема 4, ненамаляващата редица от идеали $\langle LT(G_i) \rangle$ се стабилизира след краен брой стъпки. Това означава $G' = G$ в алгоритъма, така че разглежданата процедура спира след краен брой стъпки, Q.E.D.
Алгоритъмът, изложен в горната теорема е избран поради своята яснота, но не е много практичен за конкретни пресмятания. Да отбележим, че щом един остатък $\overline{S(p,q)}^{G} = 0$ се анулира веднъж, то той остава нулев при всяко следващо присъединяване на полиноми към G', т.е. $\overline{S(p,q)}^{G \cup \{f_1, \dots, f_s\}} = 0$ за произволни $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$. Затова няма смисъл да пресмятаме повторно вече анулираните остатъци на S-полиноми.
Базисите на Грьобнер, пресметнати по алгоритъма от Теоремата на Бухбергер 6, често съдържат излишни елементи. За да ги отстраним използваме следната

Лема 10.2. *Нека G е базис на Грьобнер на полиномиален идеал I а $p \in G$ е такъв негов елемент, че допълнението му $G_p := G \setminus \{p\}$ поражда мономен идеал $\langle LT(G_p) \rangle$, съдържащ $LT(p)$. Тогава G_p е също базис на Грьобнер на I.*

Доказателство: Предположението, че G е базис на Грьобнер на I означава съвпадение на мономните идеали $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$. Ако $LT(p) \in \langle LT(G_p) \rangle$, то $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(G_p) \rangle$, така че G_p е също базис на Грьобнер на I, Q.E.D.
След подходящи умножения с ненулеви елементи от полето на коефициентите k можем да считаме, че старшите коефициенти на полиномите от G са равни

на 1. По-нататък, отстранявайки $p \in G$ с $LT(p) \in \langle LT(g_p) \rangle$ за $G_p := G \setminus \{p\}$, получаваме така наречения минимален базис на Грьобнер.

Определение 10.3. *Минимален базис на Гръобнер на полиномиален идеал I е базис на Гръобнер G със свойствата:*
(i) $LC(p) = 1$ за $\forall p \in G$ и
(ii) $LT(p) \notin \langle LT(G_p) \rangle$ за $\forall p \in G$, $G_p := G \setminus \{p\}$.

Да отбележим, че условие (ii) от Определение 10.3 за минимален базис на Грьобнер е еквивалентно на минималност на системата пораждащи $LT(G) := \{LT(g) \mid g \in G\}$ на идеала $\langle LT(I) \rangle$ на старшите членове на I.

Лема 10.4. *Ако G и $\widetilde{G}$ са минимални базиси на Гръобнер на ненулев идеал $0 \neq I \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ относно една и съща мономна наредба $>$, то те имат едно и също множество от старши членове $LT(G) = LT(\widetilde{G})$.*

Доказателство: Нека $G = \{f_1, \ldots, f_s\}$ и $\widetilde{G} = \{g_1, \ldots, g_t\}$ с $LT(f_i) = x^{\alpha(i)}$ и $LT(g_j) = x^{\beta(j)}$. Достатъчно е да докажем, че за всяко $1 \leq i \leq s$ съществува $1 \leq j \leq t$, така че $x^{\alpha(i)} = x^{\beta(j)}$, за да твърдим, че $LT(G) \subseteq LT(\widetilde{G})$. Разменяйки ролите на двата минимални базиса на Грьобнер получаваме $LT(\widetilde{G}) \subseteq LT(G)$, откъдето и $LT(G) = LT(\widetilde{G})$. Наистина, от $x^{\alpha(i)} \in LT(G) \subset \langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle = \langle LT(\widetilde{G}) \rangle = \langle x^{\beta(1)}, \ldots, x^{\beta(t)} \rangle$ за всяко $1 \leq i \leq s$ следва съществуването на $1 \leq j \leq t$, така че $x^{\beta(j)}$ дели $x^{\alpha(i)}$. Нека $x^{\gamma(i,j)}$ е мономът $\frac{x^{\alpha(i)}}{x^{\beta(j)}}$. Но от $x^{\beta(j)} \in LT(\widetilde{G}) \subset \langle LT(\widetilde{G}) \rangle = \langle LT(I) \rangle = \langle LT(G) \rangle = \langle x^{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(s)} \rangle$ получаваме съществуването на $1 \leq m \leq s$ и моном $x^{\delta(j,m)}$, така че $x^{\beta(j)} = x^{\alpha(m)} x^{\delta(j,m)}$. По този начин, $x^{\alpha(i)} = x^{\alpha(m)} x^{\gamma(i,j)} x^{\delta(j,m)}$ и $x^{\alpha(m)}$ дели $x^{\alpha(i)}$. Съгласно минималността на базиса на Грьобнер $G = \{f_1, \ldots, f_s\}$, това е изпълнено само за $m = i$. В резултат получаваме $x^{\gamma(i,j)} x^{\delta(j,m)} = 1$, откъдето $x^{\gamma(i,j)} = x^{\delta(j,m)} = 1$ и $x^{\beta(j)} = x^{\alpha(i)}$, Q.E.D.
Прилагайки последователно Теорема 6 и Лема **??** получаваме минимален базис на Грьобнер, тръгвайки от произволна система пораждащи на разглеждания идеал.
За илюстрация да се върнем отново към Пример 10.1. Използвайки градуирано лексикографската наредба $>_{\mathrm{grlex}}$ намерихме базис на Грьобнер

$$f_1 = x^3 - 2xy, \quad f_2 = x^2 y - 2y^2 + x, \quad f_3 = -x^2,$$

$$f_4 = -2xy, \quad f_5 = -2y^2 + x.$$

Умножаваме f_3 с (-1), а f_4 и f_5 с $\left(-\frac{1}{2}\right)$, за да направим всички старши коефициенти равни на 1. Доколкото $LT(f_1) = x^3 = (-x)LT(f_3)$, Лема 10.2 гарантира, че можем да изпуснем f_1 от базиса на Грьобнер $F_3 = \{f_1, \ldots, f_5\}$. Аналогично, $LT(f_2) = x^2 y = -\frac{1}{2} x LT(f_4)$, така че можем да изпуснем и f_2. Нито един от старшите членове $LT(f_i)$, не се дели на $LT(f_j)$ за $3 \leq i \neq j \leq 5$. Следователно

$$g_1 := x^2, \quad g_2 := xy, \quad g_3 := y^2 - \frac{1}{2} x$$

е минимален базис на Грьобнер за I.
Трябва да отбележим, че един полиномиален идеал може да има много минимални базиси на Грьобнер. Минималните базиси на Грьобнер G на ненулев идеал $I \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ се характеризират с това, че G поражда I и множеството $LT(G)$ на старшите членове на полиномите на G удовлетворява известни условия. Затова, ако модифицираме минимален базис на Грьобнер G на $0 \neq I \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ до система пораждащи G' на I със същото множество на старшите членове $LT(G') = LT(G)$, то G' е също минимален базис на Грьобнер.

Пример 10.5. *От минималния базис на Грьобнер*

$$g_1 = x^2, \quad g_2 = xy, \quad g_3 = y^2 - \frac{1}{2}x$$

на идеала $I = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \triangleleft k[x, y]$ *относно градуирано лексикографската наредба* $>_{\text{grlex}}$ *се получава фамилия от минимални базиси на Грьобнер*

$$g_1^{(a)} = x^2 + axy, \quad g_2 = xy, \quad g_3 = y^2 - \frac{1}{2}x$$

на I *относно* $>_{\text{grlex}}$, *индексирана с* $a \in k$. *В частност, ако* k *е безкрайно поле, то идеалът* I *има безбройно много минимални базиси на Грьобнер.*

Затова е необходимо да отделим минимален базис на Грьобнер със специфични свойства.

Определение 10.6. *Редуциран базис на Грьобнер за полиномиален идеал* I *е такъв базис на Грьобнер* G *на* I, *за който*
(i) $LC(p) = 1$ *за* $\forall p \in G$;
(ii) нито един моном на p *не принадлежи на* $\langle LT(G_p) \rangle$ *за* $G_p := G \setminus \{p\}$ *и* $\forall p \in G$.

Например,

$$g_1^{(a)} := x^2 + axy, \quad g_2 = xy, \quad g_3 = y^2 - \frac{1}{2}$$

е редуциран базис на Грьобнер на идеала $I = \langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x \rangle$ тогава и само тогава, когато $a = 0$.

Твърдение 10.7. *Нека* $>$ *е мономна наредба в* $k[x_1, \ldots, x_n]$, *а* $0 \neq I \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ *е ненулев идеал. Тогава* I *има единствен редуциран базис на Грьобнер относно* $>$.

Доказателство: Нека G е минимален базис на Грьобнер на I. Ще казваме, че полиномът $g \in G$ е редуциран относно G, ако нито един моном на g не принадлежи на $\langle LT(G \setminus \{g\}) \rangle$. За да получим редуциран базис на Грьобнер на I ще модифицираме минимален базис на Грьобнер G на I до тогава, докато всичките му елементи станат редуцирани относно модификацията. За целта да отбележим, че ако полиномът g от минимален базис на Грьобнер G на I е редуциран относно G, то g е редуциран относно всеки друг минимален базис на Грьобнер G', на I, съдържащ g и имащ същото множество от старши членове $LT(G') = LT(G)$. Това следва от факта, че редуцираността на $g \in G$ относно G зависи само от старшите членове $LT(G \setminus \{g\})$ на полиномите от допълнението $G \setminus \{g\}$ на g в G.
За произволен полином $g \in G$ да разгледаме остатъка

$$g' := \overline{g}^{G \setminus \{g\}}$$

при деление на g с $G \setminus \{g\}$ и да положим

$$G' := (G \setminus \{g\}) \cup \{g'\}.$$

Твърдим, че ако G е минимален базис на Грьобнер на I, то и G' е минимален базис на Грьобнер на I. По определението за минимален базис на Грьобнер G, старшият член $LT(g) \notin \langle LT(G \setminus \{g\}) \rangle$, така че $LT(g)$ не се дели на $LT(h)$ за всеки полином $h \in G \setminus \{g\}$. По този начин, при деление на g с $G \setminus \{g\}$ старшият член $LT(g)$ отива в остатъка g' и $LT(g') = LT(g)$. Следователно множествата $LT(G') = LT(G)$ на старшите членове на G' и G съвпадат, откъдето и мономните идеали $\langle LT(G') \rangle = \langle LT(G) \rangle$ съвпадат. По построение, множеството G' се съдържа в идеала I, така G' че е базис на Грьобнер на I. От $LC(h) = 1$ за $\forall h \in G$ следва, че $LC(f) = 1$ за $\forall f \in G'$ съгласно $LT(G') = LT(G)$. Условието

$LT(f) \notin \langle LT(G' \setminus \{f\}) \rangle$ за $\forall f \in G'$ следва от $LT(h) \notin \langle LT(G) \setminus \{h\}) \rangle$ за $\forall h \in G$ съгласно $LT(G') = LT(G)$. Следователно G' е минимален базис на Грьобнер на I. Освен това, $g' \in G'$ е редуциран относно G' по построение.
Гореописаният процес постепенно заменя елементите g на минимален базис на Грьобнер G на I с $g' \in G'$, които са редуцирани относно G'. Доколкото разгледаната процедура не променя множеството на старшите членове на текущия минимален базис на Грьобнер, редуцираността на полином се запазва при по-нататъшна модификация на останалите елементи на този текущ минимален базис на Грьобнер. По този начин, след краен брой стъпки получаваме редуциран базис на Грьобнер.
За доказване на единствеността, нека G и $\widetilde{G}$ са редуцирани базиси на Грьобнер на I. Тогава G и $\widetilde{G}$ са минимални базиси на Грьобнер на I, така че $LT(G) = LT(\widetilde{G})$ съгласно Лема 10.4. По този начин, за $\forall g \in G$ съществува $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ с $LT(g) = LT(\widetilde{g})$. Достатъчно е да установим, че в такъв случай $g = \widetilde{g}$, за да получим, че $G = \widetilde{G}$. Наистина, полиномът $g - \widetilde{g} \in I$ има нулев остатък $\overline{g - \widetilde{g}}^{G} = 0$ при деление с базиса на Грьобнер G. Ако допуснем, че някакъв моном $x^\gamma < x^\alpha = LT(g) = LT(\widetilde{g})$ от g или $\widetilde{g}$ се дели на x^α, то $x^\gamma = x^\alpha x^\delta$ за подходящ моном x^δ. Съгласно артиновостта на разглежданата мономна наредба имаме $x^\delta \geq 1 \in k$. Умножавайки почленно с x^α получаваме, че $x^\gamma \geq x^\alpha$, което противоречи на $x^\gamma < x^\alpha$. Вземайки предвид, че мономът $x^\alpha = LT(g) = LT(\widetilde{g})$ се унищожава в $g - \widetilde{g}$, стигаме до извода, че нито един моном на $g - \widetilde{g}$ не се дели на $LT(g) = LT(\widetilde{g})$. От друга страна, редуцираността на базисите на Грьобнер G и $\widetilde{G}$ гарантира, че нито един моном на $g - \widetilde{g}$ не се дели на $LT(G) \setminus \{LT(g)\} = LT(\widetilde{G}) \setminus \{LT(\widetilde{g})\}$. По този начин, при деление на $g - \widetilde{g}$ с G се получава остатък $\overline{g - \widetilde{g}}^{G} = g - \widetilde{g} = 0$ и $G = \widetilde{G}$, Q.E.D.
Като следствие от Твърдение 10.7 получаваме алгоритъм за определяне на това дали някакви ненулеви полиноми $f_1, \ldots, f_s$ и $g_1, \ldots, g_t$ пораждат един и същи идеал $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$. По-точно, $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ тогава и само тогава, когато редуцираният базис на Грьобнер на идеала $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ съвпада с редуцирания базис на Грьобнер на идеала $\langle g_1, \ldots, g_t \rangle$. Необходимостта на условието се гарантира от съществуването на единствен редуциран базис на Грьобнер за всеки ненулев мономен идеал. Обратно, ако $h_1, \ldots, h_r$ е общият редуциран базис на Грьобнер на идеалите $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ и $\langle g_1, \ldots, g_t \rangle$, то съгласно доказателството на Теоремата на Хилберт за базиса, всеки базис на Грьобнер поражда съответния идеал, така че $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$.
Да отбележим, че редуцираните базиси на Грьобнер обобщават редуцирано трапецовидната форма на хомогенна система линейни уравнения. По-точно, нека

$$\left| \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

е хомогенна система линейни уравнения с n неизвестни $x_1, \ldots, x_n$ и коефициенти a_{ij} от поле k. Ако r е рангът на матрицата $(a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ на тази система, то след евентуална преномерация можем да зададем системата с r линейно независими уравнения

$$\left| \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = 0. \end{array} \right.$$

Нека $M = \{i_1, \ldots, i_r\}$ е множеството на минималните индекси $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$, за които матрицата $(a_{ij})_{i=1\, j \in M}^{r} \in k_{r \times r}$ е обратима. Ако с елементарни преобразования по редовете на $(a_{ij})_{i=1}^{r}{}_{j=1}^{n} \in k_{r \times n}$ обърнем минора $(a_{ij})_{i=1, j \in M}^{r} \in$

$k_{r\times r}$, то получаваме така наречената редуцирано трапецовидна форма на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{l} f_1 = x_{i_1} + \sum_{j>i_1, j\notin M} a_{1j}x_j \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f_r = x_{i_r} + \sum_{j>i_r, j\notin M} a_{rj}x_j \end{array} \right.$$

Твърдим, че хомогенните линейни полиноми $f_1, \dots, f_r$ образуват редуцирания базис на Грьобнер на идеала $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ относно лексикографската наредба $>_{\mathrm{lex}}$. Преди всичко трябва да проверим, че $f_1, \dots, f_r$ образуват базис на Грьобнер на $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ относно $>_{\mathrm{lex}}$. За целта пресмятаме S-полиномите

$$S(f_l, f_m) = x_{i_m} f_l - x_{i_l} f_m =$$
$$\sum_{j>i_l, j\notin M} a_{lj}x_{i_m}x_j - \sum_{j>i_m, j\notin M} a_{mj}x_{i_l}x_j$$

за произволни $1 \le l < m \le r$. Нито един от старшите членове $LT(f_t) = x_{i_t}$ за $t \in \{1, \dots, r\} \setminus \{l, m\}$ не дели моном от $S(f_l, f_m)$, така че делението на $S(f_l, f_m)$ с $f_1, \dots, f_r$ се свежда до деление с f_l, f_m. В частност, остатъкът

$$\overline{S(f_l, f_m)}^{\{f_1, \dots, f_r\}} = \overline{S(f_l, f_m)}^{\{f_l, f_m\}} = 0$$

съгласно $S(f_l, f_m) = x_{i_m} f_l - x_{i_l} f_m$. Прилагайки Теорема 5 стигаме до извода, че $f_1, \dots, f_r$ е базис на Грьобнер на $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ относно $>_{\mathrm{lex}}$. По-нататък, всички старши коефициенти $LC(f_s) = 1$ и нито един моном на $f_s = x_{i_s} + \sum_{j>i_s, j\notin M} a_{sj}x_j$ не принадлежи на идеала $\langle LT(f_t) \,|\, \forall t \neq s \rangle = \langle x_{i_t} \,|\, \forall t \neq s \rangle$, така че $f_1, \dots, f_r$ се оказва редуцираният базис на Грьобнер на $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ относно $>_{\mathrm{lex}}$.

Задачи

Задача 10.8. *Използвайки алгоритъма на Бухбергер от Теорема 6 да се намерят базиси на Грьобнер на идеалите*

$$I_1 = \langle x^2y - 1,\, xy^2 - x \rangle,$$
$$I_2 = \langle x^2 + y,\, x^4 + 2x^2y + y^2 \rangle,$$
$$I_3 = \langle x - z^4,\, y - z^5 \rangle$$

относно лексикографската наредба $>_{\mathrm{lex}}$ *и относно градуирано лексикографската наредба* $>_{\mathrm{grlex}}$.

Задача 10.9. *Да се намерят редуцираните базиси на Грьобнер на идеалите* I_1, I_2, I_3 *от Задача 10.8 относно* $>_{\mathrm{lex}}$ *и* $>_{\mathrm{grlex}}$.