Глава 2

Въпрос 2: Афинни многообразия - определение, сечение и обединение

Определение 2.1. *Нека k е поле, а $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ са полиноми на $x_1, \dots, x_n$ с коефициенти от полето k, то множеството от точки*

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \ \text{ за } \forall 1 \leq i \leq s\}$$

се нарича афинно многообразие, определено от $f_1, \dots, f_s$.

Пример 2.2. *(а) $V(x^2+y^2-1) \subset \mathbb{R}^2$ е окръжност с център $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ и радиус 1;*
(б) $V(z^2 - x^2 - y^2) \subset \mathbb{R}^3$ е конус с връх $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, доколкото всяка точка (x_o, y_o, z_o) принадлежи на $V(z^2 - x^2 - y^2)$ заедно с цялата права през $(0,0,0)$ и (x_o, y_o, z_o);
(в) усуканата кубика $V(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{R}^3$ е крива в пространството;
(г) $V(xz, yz) \subset \mathbb{R}^3$ е обединението на координатната равнина Oxy с координатната ос Oz;
(д) афинното многообразие $V(x^2+y^2+1) \subset \mathbb{R}^2$ е празното множество, докато $\emptyset \neq V(x^2 + y^2 + 1) \subset \mathbb{C}$;
(е) $\emptyset = V(xy, xy - 1) \subset k^2$ за всяко поле k.

Лема 2.3. *Ако $V, W \subset k^n$ са афинни многообразия, то $V \cap W$ и $V \cup W$ са също афинни многообразия.*

Доказателство: За $V = V(f_1, \dots, f_s)$ и $W = V(g_1, \dots, g_t)$ твърдим, че

$$V \cap W = V(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t) \quad \text{и}$$
$$V \cup W = V(f_i g_j \,|\, 1 \leq i \leq s, \, 1 \leq j \leq t).$$

Точките от $V \cap W = V(f_1, \dots, f_s) \cap V(g_1, \dots g_t)$ се характеризират с анулирането на $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t$ в тях.
За всяка точка $a \in V$ и всички $1 \leq i \leq s$ е в сила $f_i(a) = 0$. Следователно $(f_i g_j)(a) = f_i(a) g_j(a) = 0$ за всички $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq t$ и $V \subseteq V(f_i g_j \,|\, 1 \leq i \leq s, \, 1 \leq j \leq t)$. Аналогично получаваме, че $W \subseteq V(f_i g_j \,|\, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t)$, откъдето $V \cup W \subseteq V(f_i g_j \,|\, 1 \leq i \leq s, \, 1 \leq j \leq t)$. Обратно, ако $a \in V(f_i g_j \,|\, 1 \leq i \leq s, \, 1 \leq j \leq t)$ и $a \notin V$, то съществува $1 \leq i_o \leq s$ с $f_{i_o}(a) \neq 0$. В резултат, $(f_{i_o} g_j)(a) = f_{i_o}(a) g_j(a) = 0$ води до $g_j(a) = 0$ за всички $1 \leq j \leq t$. С други думи, $a \in W$ или $V(f_i g_j \,|\, 1 \leq i \leq s, \, 1 \leq j \leq t) \subseteq V \cup W$, откъдето $V \cup W = V(f_i g_j \,|\, 1 \leq i \leq s, \, 1 \leq j \leq t)$, Q.E.D.
С индукция по l, оттук получаваме

Следствие 2.4. *Ако $V_i = V(f_{ij} \,|\, 1 \leq j \leq s_i) \subset k^n$, $1 \leq i \leq l$ са афинни многообразия, то*

$$V_1 \cap \ldots \cap V_l = V(f_{ij} \,|\, 1 \leq j \leq s_i, \, 1 \leq i \leq l) \quad \text{и}$$
$$V_1 \cup \ldots \cup V_l = V(f_{1 j_1} \ldots f_{l j_l} \,|\, 1 \leq j_i \leq s_i, \, 1 \leq i \leq l)$$

са афинни многообразия.

Задачи

Задача 2.5. *Представете като обединение многообразията* $V(xz^2-xy)$, $V(x^4-zx, x^3-yx)$ *и* $V((x-2)(x^2-y), y(x^2-y), (z+1)(x^2-y))$.

Задача 2.6. *Да се докаже, че :*
(а) всяка точка $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ *е афинно многообразие;*
(б) всяко крайно подмножество на k^n *е афинно многообразие.*

Задача 2.7. *Да се докаже, че множеството*

$$X = \{(x, x) \,|\, x \in \mathbb{R},\, x \neq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

не е афинно многообразие.

Упътване: Проверете, че за произволен полином $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ с $f(x, x) = 0$ за всички $x \neq 1$ следва $f(1, 1) = 0$.

Задача 2.8. *Да се докаже, че*

$$\mathbb{Z}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \,|\, z_i \in \mathbb{Z},\, 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{C}^n$$

не е афинно многообразие. В частност, безкрайно обединение на афинни многообразия може да не е афинно многообразие.

Упътване: Използвайте, че ако $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ се анулира върху $\mathbb{Z}^n$, то f е тъждествено нулевият полином.