Глава 3

Въпрос 3: Съответствие между крайнопородени идеали в полиномиален пръстен и афинни многообразия

Определение 3.1. *Непразното множество $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ от полиноми на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от поле k е идеал, ако*
(i) $f_1 - f_2 \in I$ за всички $f_1, f_2 \in I$ и
(ii) $fg \in I$ за всички $f \in I$ и всички $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$.
Бележим $I \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$.

Лема-Определение 3.2. *Ако k е поле и $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ са полиноми на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от k, то множеството*

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} f_i g_i \;\middle|\; g_i \in k[x_1, \ldots, x_n],\, 1 \leq i \leq s \right\}$$

е идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$, който се нарича идеалът, породен от $f_1, \ldots, f_s$.

Доказателство: За произволни $g'_i, g''_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $1 \leq i \leq s$ е в сила

$$\left(\sum_{i=1}^{s} f_i g'_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{s} f_i g''_i \right) = \sum_{i=1}^{s} f_i (g'_i - g''_i) \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle.$$

Освен това, за произволни $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $1 \leq i \leq s$ и $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$ е изпълнено

$$\left(\sum_{i=1}^{s} f_i g_i \right) h = \sum_{i=1}^{s} f_i (g_i h) \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle,$$

така че $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ е идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$, Q.E.D.
Идеалът $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$, породен от $f_1, \ldots, f_s$ се състои от полиномиални следствия на уравненията $f_1 = \ldots = f_s = 0$.

Определение 3.3. *Идеалът I в полиномиалния пръстен $k[x_1, \ldots, x_n]$ се нарича крайнопороден, ако съществуват краен брой полиноми $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$, така че $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ е идеалът, породен от $f_1, \ldots, f_s$.*

Лема-Определение 3.4. *Ако $V \subseteq k^n$ е афинно многообразие, то множеството от полиномите*

$$I(V) = \{ f \in k[x_1, \ldots, x_n] \,|\, f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \;\text{ за } \forall (a_1, \ldots, a_n) \in V \},$$

анулиращи се върху V е идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$, който се нарича идеал на V.

Доказателство: Ако $f_1, f_2 \in I(V)$, то във всяка точка $a = (a_1, \ldots, a_n) \in V$ е изпълнено

$$(f_1 - f_2)(a) = f_1(a) - f_2(a) = 0 - 0 = 0,$$

така че $f_1 - f_2 \in I(V)$. За произволни $f \in I(V)$ и $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ е в сила

$$(fg)(a) = f(a)g(a) = 0g(a) = 0$$

във всички точки $a \in V$. Следователно $fg \in I(V)$ и $I(V)$ е идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$, Q.E.D.

Определение 3.5. *Идеалът* $I \lhd k[x_1, \dots, x_n]$ *се нарича радикален, ако от* $f^m \in I$ *за всеки полином* $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ *и всяко естествено* m *следва* $f \in I$.

Лема 3.6. *Идеалът* $I(V) \lhd k[x_1, \dots, x_n]$ *на афинно многообразие* $V \subseteq k^n$ *е радикален.*

Доказателство: Ако $f^m \in I(V)$ за някои $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ и $m \in \mathbb{N}$, то $f^m(a) = 0$ във всяка точка $a \in V$. Следователно $f(a) = 0$ за $\forall a \in V$ и $f \in I(V)$, Q.E.D.

За $V = \{\check{o} = (0, \dots, 0) \in k^n\}$ твърдим, че $I(V) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. От една страна, $x_1, \dots, x_n \in I(V)$ дава $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq I(V)$. Обратно, ако $f(x_1, \dots, x_n) \in I(V)$, то представяйки $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq 1} a_\alpha x^\alpha + a_{\check{o}}$ получаваме, че $f(\check{o}) = a_{\check{o}} = 0$. Следователно $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и $I(V) \subseteq \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Следващият тривиален пример е $I(k^n) = \{0\}$ за безкрайно поле k. Нулевият полином се анулира върху всяка точка от k^n. Във Въпрос 1 доказахме, че ако полином $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ се анулира във всички точки от k^n за безкрайно поле k, то f е тъждествено нулевият полином.

Изобщо казано, идеалите $I(V(f_1, \dots, f_s))$ и $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ за $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ могат да са различни. Непосредствено от определенията следва $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq I(V(f_1, \dots, f_s))$ за произволни $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$.

Пример 3.7. *Идеалът* $\langle x^2, y^2 \rangle$ *се съдържа строго в идеала* $I(V(x^2, y^2))$.

Уравненията $x^2 = y^2 = 0$ са изпълнени само за началото $\check{o} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, така че $V(x^2, y^2) = \{\check{o}\}$. Както вече обяснихме, $I(V(x^2, y^2)) = I(\{\check{o}\}) = \langle x, y \rangle$. За строгото включване $\langle x^2, y^2 \rangle \subsetneq \langle x, y \rangle$ да отбележим, че всеки ненулев елемент $x^2 f + y^2 g \in \langle x^2, y^2 \rangle$ е от степен ≥ 2, докато x и y са от степен 1.

Пример 3.8. *Ако* $V(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{R}^3$ *е усуканата кубика, то идеалът*

$$I(V(y - x^2, z - x^3)) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle.$$

За да докажем, че $y - x^2$ и $z - x^3$ пораждат идеала на усуканата кубика, ще използваме, че всеки полином $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$ може да се представи във вида

$$f = h'(y - x^2) + h''(z - x^3) + r$$

чрез подходящи полиноми $h', h'' \in \mathbb{R}[x, y, z]$ и $r \in \mathbb{R}[x]$. За целта да запишем произволен моном $x^a y^b z^c \in \mathbb{R}[x, y, z]$ във вида

$$x^a y^b z^c = x^a \left[(y - x^2) + x^2\right]^b \left[(z - x^3) + x^3\right]^c =$$

$$x^a \left[\sum_{i=0}^{b} \begin{pmatrix} b \\ i \end{pmatrix} (y - x^2)^i x^{2(b-i)}\right] \left[\sum_{j=0}^{c} \begin{pmatrix} c \\ j \end{pmatrix} (z - x^3)^j x^{3(c-j)}\right] =$$

$$h'_{abc}(y - x^2) + h''_{abc}(z - x^3) + x^{a+2b+3c}$$

чрез някакви $h'_{abc}, h''_{abc} \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Вземайки предвид, че произволен полином $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$ е крайна $\mathbb{R}$-линейна комбинация от мономи на x, y, z, получаваме представяне

$$f = h'(y - x^2) + h''(z - x^3) + r$$

чрез $h', h'' \in \mathbb{R}[x, y, z]$, $r \in \mathbb{R}[x]$.

По определение, $y - x^2, z - x^3 \in I(V(y - x^2, z - x^3))$ води до $\langle y - x^2, z - x^3 \rangle \subseteq I(V(y - x^2, z - x^3))$. Обратно, ако $f \in I(V(y - x^2, z - x^3))$, то вземайки предвид, че $V(y - x^2, z - x^3) = \{(x, x^2, x^3) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, получаваме $f(x, y, z) = r(x) = 0$ за всички $x \in \mathbb{R}$. Доколкото полето $\mathbb{R}$ на реалните числа е безкрайно, оттук следва анулирането на $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ като полином на x и $f = h'(y - x^2) + h''(z - x^3) \in \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$. В резултат, $I(V(y - x^2, z - x^3)) \subseteq \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$, откъдето $I(V(y - x^2, z - x^3)) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$.

Лема 3.9. *Ако* $f_1, \dots, f_s \in \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ *и* $g_1, \dots, g_t \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ *за някакви полиноми* $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t \in k[x_1, \dots, x_n]$, *то съответните афинни многообразия* $V(f_1, \dots, f_s) = V(g_1, \dots, g_t)$ *съвпадат.*

Доказателство: За всяко $1 \leq j \leq t$ съществуват полиноми $h_{ji} \in k[x_1, \dots, x_n]$, така че $g_j = \sum_{i=1}^{s} f_i h_{ji}$. Следователно във всяка точка $a = (a_1, \dots, a_n) \in V(f_1, \dots, f_s)$ имаме $g_j(a) = \sum_{i=1}^{s} f_i(a) h_{ji}(a) = 0$, така че е в сила включването на афинни многообразия $V(f_1, \dots, f_s) \subseteq V(g_1, \dots, g_t)$. Обратно, за всяко $1 \leq i \leq s$ съществуват полиноми $h'_{ij} \in k[x_1, \dots, x_n]$, така че $f_i = \sum_{j=1}^{t} g_j h'_{ij}$. По този начин, за всяка точка $b = (b_1, \dots, b_n) \in V(g_1, \dots, g_t)$ е изпълнено $f_i(b) = \sum_{j=1}^{t} g_j(b) h'_{ij}(b) = 0$, откъдето $V(g_1, \dots, g_t) \subseteq V(f_1, \dots, f_s)$, Q.E.D.
Непосредствено от определенето за крайнопороден идеал следва, че $f_1, \dots, f_s \in \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ е еквивалентно на $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \langle g_1, \dots, g_t \rangle$. Аналогично, $g_1, \dots, g_t \rangle \subseteq \langle f_1, \dots f_s \rangle$ е равносилно на $\langle g_1, \dots, g_t \rangle \subseteq \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. По този начин, съвпадението на идеалите $\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ се оказва достатъчно за съвпадението на афинните многообразия $V(f_1, \dots, f_s) = V(g_1, \dots, g_t)$.

Пример 3.10. *Афинните многообразия* $V(2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3) \subset \mathbb{R}^2$ *и* $V(x^2 - 4, y^2 - 1) = \{(2,1), (2,-1), (-2,1), (-2,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ *съвпадат.*

Достатъчно е да отбележим, че

$$2x^2 + 3y^2 - 11 = 2(x^2 - 4) + 3(y^2 - 1) \in \langle x^2 - 4, y^2 - 1 \rangle,$$

$$x^2 - y^2 - 3 = (x^2 - 4) - (y^2 - 1) \in \langle x^2 - 4, y^2 - 1 \rangle,$$

$$x^2 - 4 = \frac{1}{5}(2x^2 + 3y^2 - 11) + \frac{3}{5}(x^2 - y^2 - 3) \in \langle 2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3 \rangle \quad \text{и}$$

$$y^2 - 1 = \frac{1}{5}(2x^2 + 3y^2 - 11) - \frac{2}{5}(x^2 - y^2 - 3) \in \langle 2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3 \rangle.$$

Лема 3.11. *Ако* V *и* W *са афинни многообразия в* k^n, *то* $V \subseteq W$ *тогава и само тогава, когато* $I(V) \supseteq I(W)$.

Доказателство: Ако $V \subseteq W$, то всеки полином $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, който се анулира върху W се анулира и върху V, т.е. $I(W) \subseteq I(V)$.
Ако $I(W) \subseteq I(V)$ за $W = V(g_1, \dots, g_t)$, $g_1, \dots, g_t \in k[x_1, \dots, x_n]$, то всеки от полиномите $g_1, \dots, g_t$ се анулира върху V. По определенията на $W = V(g_1, \dots, g_t)$ това дава $V \subseteq W$, Q.E.D.
Прилагайки двукратно горната лема получаваме следната

Следствие 3.12. *Афинните многообразия* V *и* W *в съвпадат тогава и само тогава, когато съвпадат техните идеали.*

Задачи

Задача 3.13. *Да се докаже съвпадението на идеалите*

$$\langle x + y, x - y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x + xy, y + xy, x^2, y^2 \rangle$$

в полиномиалния пръстен $k[x, y]$ *на две променливи.*

Задача 3.14. *Да се докаже, че* $I(V(x - y)) = \langle x - y \rangle$ *в* $\mathbb{R}[x, y]$.

Упътване: Използвайте, че всеки полином $f \in \mathbb{R}[x, y]$ се представя във вида $f(x, y) = g(x, y)(x - y) + r(x)$ за някакви полиноми $g \in \mathbb{R}[x, y]$ и $r \in \mathbb{R}[x]$.

Задача 3.15. *Да се докаже, че множеството*

$$V = \{(x, x^3, x^4) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

е афинно многообразие в $\mathbb{R}^3$ *и да се намери идеала му* $I(V)$.

Задача 3.16. *Нека* $I \triangleleft \mathbb{Z}_2[x,y]$ *е идеалът на полиномите, анулиращи се във всички точки на* $\mathbb{Z}_2^2$. *Да се докаже, че* $I = \langle x^2 - x, y^2 - y \rangle$.

Упътване: Произволен полином $f \in \mathbb{Z}_2[x,y]$ се представя във вида $f = \sum_{i=0}^{N} g_i(x) y^i$ за подходящи $g_i(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$. Чрез деление на $g_i(x)$ с $x^2 - x$ получаваме $g_i(x) = (x^2 - x)g_i'(x) + a_i x + b_i$ за подходящи $g_i'(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_2$. В резултат, $f = f'(x^2-x) + h_1(y)x + h_2(y)$ за някакви $f' \in \mathbb{Z}_2[x,y]$, $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}_2[y]$. Замествайки $h_i(y) = (y^2-y)h_i'(y) + c_i y + d_i$ за $h_i'(y) \in \mathbb{Z}_2[y]$, $c_i, d_i \in \mathbb{Z}_2$, $1 \leq i \leq 2$, получаваме

$$f = f'(x^2 - x) + f''(y^2 - y) + c_1 xy + d_1 + c_2 y + d_2$$

за някои $f', f'' \in \mathbb{Z}_2[x,y]$. Да се докаже, че така представен полином $f \in I$ тогава и само тогава, когато $c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = 0(\mathrm{mod} 2) \in \mathbb{Z}_2$.

Задача 3.17. *За произволно подмножество* S *на афинното пространство* k^n *определяме*

$$I(S) = \{ f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \text{за} \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in S \}.$$

Да се докаже, че $I(S)$ *е идеал в* $k[x_1, \ldots, x_n]$. *Идеалът* $I(S)$ *се нарича идеал на* S.

Задача 3.18. *Ако* $S = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}, \, x \neq 1\}$, *то докажете, че* $I(S) = \langle x - y \rangle$.

Задача 3.19. *Да се докаже, че подмножеството* $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{C}^n$ *има нулев идеал* $I(\mathbb{Z}^n) = \{0\}$ *в* $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.