Глава 4

Въпрос 4: Рационална параметризация на афинни многообразия

За определяне на рационална параметризация на афинно многообразие да напомним конструкцията на полето $k(t_1, \ldots, t_m)$ на рационалните функции на $t_1, \ldots, t_m$ с коефициенти от поле k. Това е частен случай от влагането на комутативна област Z в нейното поле от частни Q.

Определение 4.1. *Ненулевият елемент r на пръстена R се нарича делител на нулата, ако съществува $0_R \neq s \in R$, така че $rs = 0_R$ или $sr = 0_R$. Комутативна област е комутативен пръстен R без делители на нулата.*

Всяко поле k е комутативна област, защото ако $a, b \in k$, $a \neq 0_k$ и $ab = 0_k$, то умножавайки почленно с $a^{-1} \in k$ получаваме

$$b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab)a^{-1}0_k = 0_k.$$

Съществуват комутативни области, които не са полета. Например, комутативната област на целите числа $\mathbb{Z}$.
Комутативният пръстен $\mathbb{Z}_{10}$ от остатъци при деление със съставното число 10 не е комутативна област, защото $\overline{2} = 2(\mathrm{mod}\,10) \not\equiv 0(\mathrm{mod}\,10)$, $\overline{5} = 5(\mathrm{mod}\,10) \not\equiv 0(\mathrm{mod}\,10)$, но $\overline{25} = \overline{10} = \overline{0}$.

Определение 4.2. *Изображението $f : R_1 \to R_2$ на пръстена R_1 в пръстена R_2 се нарича хомоморфизъм на пръстени, ако*

$$f(r + s) = f(r) + f(s),$$
$$f(rs) = f(r)f(s),$$

за $\forall r, s \in R_1$.
Хомоморфизмът на пръстени $f : R_1 \to R_2$ се нарича влагане, ако $f(r) \neq f(s)$ за всички $r, s \in R_1$, $r \neq s$.

Произволен хомоморфизъм на пръстени $f : R_1 \to R_2$ трансформира нулевия елемент 0_{R_1} на R_1 в нулевия елемент $f(0_{R_1}) = 0_{R_2}$ на R_2. Това се дължи на факта, че f се ограничава до хомоморфизъм на адитивните групи, $f(r) + f(0_{R_1}) = f(r + 0_{R_1}) = f(r)$ за $\forall r \in R_1$ и нулевият елемент $0_{R_2} \in R_2$ е единствен. Непосредствено се проверява, че един хомоморфизъм на пръстени $f : R_1 \to R_2$ е влагане тогава и само тогава, когато ядрото му

$$Ker(f) := \{r \in R_1 \mid f(r) = 0_{R_2}\}$$

е тривиално, т.е. $Ker(f) = \{0_{R_1}\}$.

Твърдение 4.3. *За всяка комутативна област Z съществува влагане*

$$\varphi : Z \longrightarrow Q = \{\varphi(a)\varphi(b)^{-1} \mid a, b \in Z,\, b \neq 0\}.$$

Ако

$$\varphi : Z \longrightarrow Q = \{\varphi(a)\varphi(b)^{-1} \mid a, b \in Z,\, b \neq 0\},$$
$$\varphi_1 : Z \longrightarrow Q_1 = \{\varphi_1(a)\varphi_1(b)^{-1} \mid a, b \in Z,\, b \neq 0\}$$

са две такива влагания, то

$$\psi : Q \longrightarrow Q_1,$$
$$\psi(\varphi(a)\varphi(b)^{-1}) := \varphi_1(a)\varphi_1(b)^{-1} \quad \textit{за } a,b \in Z, \quad b \neq 0_Z$$

е изоморфизъм на полета.

Доказателство: В множеството

$$M = \{(a,b) \,|\, a,b \in Z,\, b \neq 0_Z\}$$

на наредените двойки (a,b) елементи a,b от Z с $b \neq 0_Z$ въвеждаме релация

$$(a,b) \sim (a_1,b_1) \Longleftrightarrow ab_1 = a_1b.$$

Твърдим, че $\sim$ е релация на еквивалентност. Наистина, $(a,b) \sim (a,b)$, доколкото $ab = ab$. Ако $(a,b) \sim (a_1,b_1)$, то $(a_1,b_1) \sim (a,b)$, защото от $ab_1 = a_1b$ следва $a_1b = ab_1$. Ако $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ и $(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2)$, то $ab_1 = a_1b$ и $a_1b_2 = a_2b_1$. Умножавайки почленно тези равенства с b_2 и съответно с b, получаваме $ab_1b_2 = a_1bb_2$ и $a_1b_2b = a_2b_1b$. Следователно $ab_1b_2 = a_2b_1b$, откъдето $b_1(ab_2 - a_2b) = 0$. Доколкото $b_1 \neq 0_Z$ за $(a_1,b_1) \in M$ и Z е комутативна област, оттук получаваме $ab_2 - a_2b = 0$. Но $ab_2 = a_2b$ е точно условието за $(a,b) \sim (a_2,b_2)$, така че $\sim$ е релация на еквивалентност и множеството M се разбива на непресичащи се класове на еквивалентност, които ще бележим с

$$\frac{a}{b} = \{(a_1,b_1) \in M \,|\, (a,b) \sim (a_1,b_1)\}.$$

Нека Q е множеството от класовете на еквивалентност $\frac{a}{b}$ на наредените двойки $(a,b) \in M$. В Q въвеждаме събиране

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$$

и умножение

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Твърдим, че така зададените операции са коректно определени, т.е. не зависят от избора на представители на съответните класове на еквивалентност. По-точно, ако $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ и $(c,d) \sim (c_1,d_1)$, то $(ad+bc,bd) \sim (a_1d_1+b_1c_1,b_1d_1)$ и $(ac,bd) \sim (a_1c_1,b_1d_1)$, доколкото

$$(ad+bc)b_1d_1 = (ab_1)(dd_1)+(cd_1)(bb_1) = (a_1b)(dd_1)+(c_1d)(bb_1) = bd(a_1d_1+b_1c_1),$$
$$(ac)(b_1d_1) = (ab_1)(cd_1) = (a_1b)(c_1d) = (bd)(a_1c_1),$$

съгласно $ab_1 = a_1b$, $cd_1 = c_1d$.

Сега ще проверим, че Q е поле относно така определените събиране и умножение. Наистина, в сила е асоциативният закон за събиране

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f} = \frac{adf+bcf+bde}{bdf} = \frac{a}{b}+\frac{cf+de}{df} = \frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right),$$

и комутативният закон за събиране

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

За произволен фиксиран ненулев елемент $\varepsilon \in Z$, $\varepsilon \neq 0_Z$, класът на еквивалентност $\frac{0_Z}{\varepsilon} \in Q$ изпълнява ролята на нулев елемент на Q, защото

$$\frac{a}{b}+\frac{0_Z}{\varepsilon} = \frac{a\varepsilon}{b\varepsilon} = \frac{a}{b}.$$

Освен това,

$$\frac{a}{b}+\frac{(-a)}{b} = \frac{ab-ab}{b^2} = \frac{0_Z}{b^2} = \frac{0_Z}{\varepsilon},$$

така че $\frac{(-a)}{b} \in Q$ е противоположен на $\frac{a}{b} \in Q$.

Умножението изпълнява асоциативния закон

$$\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f} = \frac{ac}{bd}.\frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf} = \frac{a}{b}.\frac{ce}{df} = \frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)$$

и комутативния закон

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{c}{d}.\frac{a}{b}.$$

Класът на еквивалентност $\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \in Q$ изпълнява ролята на единица, защото

$$\frac{a}{b}.\frac{\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{a\varepsilon}{b\varepsilon} = \frac{a}{b}.$$

За всяко $b \in Z$, $b \neq 0_Z$ е ясно, че $\frac{0_Z}{b} = \frac{0_Z}{\varepsilon} \in Q$. Ако $a, b \in Z$ и $a, b \notin \{0_Z\}$, то $\frac{a}{b} \neq \frac{0_Z}{\varepsilon}$, доколкото $a\varepsilon = 0_Z$ в областта Z води до $a = 0_Z$ или $\varepsilon = 0_Z$. Следователно ненулевите класове $\frac{a}{b} \in Q$ се характеризират с $a, b \in Z \setminus 0_Z\}$ и имат обратен $\frac{b}{a} \in Q \setminus \left\{\frac{0_Z}{\varepsilon}\right\}$, така че

$$\frac{a}{b}.\frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Доколкото умножението в Q е комутативно, достатъчна е проверката на един от дистрибутивните закони, например

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right).\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{bd}.\frac{e}{f} = \frac{ade+bce}{bdf} = \frac{adef+bcef}{bdf^2} = \frac{ae}{bf} + \frac{ce}{df} = \frac{a}{b}.\frac{e}{f} + \frac{c}{d}.\frac{e}{f}.$$

Следователно множеството Q от класовете на еквивалентност $\frac{a}{b}$ е поле относно фиксираните операции събиране и умножение.

Да разгледаме изображението

$$\varphi : Z \longrightarrow Q,$$

$$\varphi(a) := \frac{a\varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{за } \forall a \in Z.$$

Преди всичко, φ е хомоморфизъм на пръстени, защото

$$\varphi(a+b) = \frac{a\varepsilon + b\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{a\varepsilon^2 + b\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{b\varepsilon}{\varepsilon} = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(ab) = \frac{ab\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{ab\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon}.\frac{b\varepsilon}{\varepsilon} = \varphi(a)\varphi(b).$$

При това, φ е влагане, защото от $\varphi(a) = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{b\varepsilon}{\varepsilon} = \varphi(b)$ за $a, b \in Z$ следва, че $\varepsilon^2(a-b) = 0_Z$. Доколкото $\varepsilon \neq 0_Z$ и Z е комутативна област, оттук получаваме $a = b$.

Да отбележим, че всеки елемент $\frac{a}{b} \in Q$ може да се представи като

$$\frac{a}{b} = \frac{a\varepsilon^2}{b\varepsilon^2} = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon}.\frac{\varepsilon}{b\varepsilon} = \varphi(a)\varphi(b)^{-1},$$

така че Q не само съдържа, но и съвпада с множеството

$$\{\varphi(a)\varphi(b)^{-1} \,|\, a, b \in Z,\, b \neq 0_Z\}.$$

В резултат получаваме също, че

$$\varphi(a)\varphi(b)^{-1} + \varphi(c)\varphi(d)^{-1} = \varphi(ad+bc)\varphi(bd)^{-1},$$

$$\left[\varphi(a)\varphi(b)^{-1}\right]\left[\varphi(c)\varphi(d)^{-1}\right] = \varphi(ac)\varphi(bd)^{-1}.$$

Остава да проверим, че

$$\psi : Q = \{\varphi(a)\varphi(b)^{-1} \,|\, a, b \in Z,\, b \neq 0_Z\} \longrightarrow Q_1 = \{\varphi_1(a)\varphi_1(b)^{-1} \,|\, a, b \in Z,\, b \neq 0_Z\},$$

$$\psi(\varphi(a)\varphi(b)^{-1}) := \varphi_1(a)\varphi_1(b)^{-1}$$

е изоморфизъм на полета. Преди всичко, ψ е коректно определено, доколкото $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a')\varphi(b')^{-1}$ води до $ab' = a'b$, откъдето $\varphi_1(a)\varphi_1(b)^{-1} = \varphi_1(a')\varphi(b')^{-1}$. По-нататък, ψ е хомоморфизъм на пръстени, защото

$$\psi(\varphi(a)\varphi(b)^{-1} + \varphi(c)\varphi(d)^{-1}) = \psi(\varphi(ad+bc)\varphi(bd)^{-1}) =$$
$$\varphi_1(ad+bc)\varphi_1(bd)^{-1} = \varphi_1(a)\varphi_1(b)^{-1} + \varphi_1(c)\varphi_1(d)^{-1}$$

и съответно,

$$\psi([\varphi(a)\varphi(b)^{-1}][\varphi(c)\varphi(d)^{-1}]) = \psi(\varphi(ac)\varphi(bd)^{-1}) =$$
$$\varphi_1(ac)\varphi_1(bd)^{-1} = [\varphi_1(a)\varphi_1(b)^{-1}][\varphi_1(c)\varphi_1(d)^{-1}].$$

Освен това, ψ е взаимно-еднозначно изображение с коректно определено обратно

$$\psi^{-1} : Q_1 \longrightarrow Q,$$
$$\psi^{-1}(\varphi_1(a)\varphi_1(b)^{-1}) := \varphi(a)\varphi(b)^{-1},$$

така че ψ е изоморфизъм на полета, Q.E.D.

Определение 4.4. *Ако $\varphi : Z \to Q = \{\varphi(a)\varphi(b)^{-1} \mid a, b \in Z,\, b \neq 0_Z\}$ е влагане на комутативна област Z в поле Q с посочения вид елементи, то единственото с точност до изоморфизъм такова поле Q се нарича поле от частни на Z.*

За да определим полето на рационалните функции $k(t_1, \dots, t_m)$ на $t_1, \dots, t_m$ с коефициенти от k като полето от частни на полиномиалния пръстен $k[t_1, \dots, t_m]$, трябва да докажем следното

Твърдение 4.5. *Пръстенът $k[t_1, \dots, t_m]$ на полиномите на $t_1, \dots, t_m$ с коефициенти от поле k е комутативна област.*

Доказателство: С индукция по броя m на променливите $t_1, \dots, t_m$ ще установим, че ако $f, g \in Z[t_1, \dots t_m]$ са ненулеви полиноми на $t_1, \dots t_m$ с коефициенти от комутативна област Z, то $fg \in Z[t_1, \dots, t_m]$ е ненулев полином.
Ако $m = 1$, то нека $f(t_1) = \sum_{i=0}^{p} a_i t_1^i$, $g(t_1) = \sum_{j=0}^{q} b_j t_1^j$ за някакви неотрицателни цели p, q и $a_p \neq 0_Z$, $b_q \neq 0_Z$. Тогава

$$f(t_1)g(t_1) = \left(a_p t_1^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i t_1^i \right) \left(b_q t_1^q + \sum_{j=0}^{q-1} b_j t_1^j \right) =$$
$$a_p b_q t_1^{p+q} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i b_q t_1^{i+q} + \sum_{j=0}^{q-1} a_p b_j t_1^{p+j} + \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1} a_i b_j t_1^{i+j}$$

има ненулев коефициент $a_p b_q \neq 0_Z$ на t_1^{p+q}, така че $f(t_1)g(t_1)$ не е тъждествено нулевият полином от $Z[t_1]$.
Да допуснем, че полиномите $Z[t_1, \dots, t_{m-1}]$ на $t_1, \dots, t_{m-1}$ с коефициенти от комутативна област Z образуват комутативна област. Да представим комутативния пръстен

$$Z[t_1, \dots, t_m] = Z[t_1, \dots, t_{m-1}][t_m]$$

като пръстен на полиномите на t_m с коефициенти от областта $Z[t_1, \dots, t_{m-1}]$. Повтаряйки разсъжденията за $m = 1$ получаваме, че произведението на ненулеви полиноми $f(t_m), g(t_m) \in Z[t_1, \dots t_{m-1}][t_m]$ на t_m е ненулев полином $f(t_m)g(t_m) \in Z[t_1, \dots t_{m-1}][t_m]$ на t_m с коефициенти от $Z[t_1, \dots, t_{m-1}]$. Следователно, $Z[t_1, \dots t_m]$ е комутативна област, Q.E.D.

Определение 4.6. *Нека k е поле. Елементите $\frac{f}{g}$ на полето от частни $k(t_1, \dots t_m)$ на комутативната област $k[t_1, \dots, t_m] \ni f, g,\ g \neq 0_{k[t_1,\dots,t_m]}$ се наричат рационални функции на $t_1, \dots, t_m$ с коефициенти от k.*

Определение 4.7. *Рационална параметрично представяне на афинно многообразие $V(f_1,\dots,f_s)\subset k^n$ се задава с рационални функции $r_1,\dots,r_n\in k(t_1,\dots,t_m)$, така че $V(f_1,\dots,f_s)$ е минималното многообразие в k^n, съдържащо множеството от точки*

$$M=\{r(t)=(r_1(t_1,\dots,t_m),\dots,r_n(t_1,\dots,t_m))\,|\,\forall t_i\in k,\,1\le i\le m\}.$$

Комбинирайки разглежданията от въпроси 5 и 8 ще видим, че произволно евентуално безкрайно сечение на афинни многообразия е афинно многообразие. В частност, сечението $\overline{M}=\cap_{W\supseteq M}W$ на афинните многообразия $W\subseteq k^n$, съдържащи $M=\{r(t)\,|\,\forall t\in k^m\}$ е афинно многообразие в k^n. При това, M е рационална параметризация на $V(f_1,\dots,f_s)\subset k^n$ точно когато $V(f_1,\dots,f_s)=\overline{M}=\cap_{W\supseteq M}W$.
Не всяко афинно многообразие има рационално параметрично представяне. Афинните многообразия, за които съществува рационално параметрично представяне се наричат унирационални.
Рационалните параметрични представяния на крива или повърхнина се използват при построяване на техните графики.
Определящите уравнения $f_1=0,\dots,f_s=0$ на афинното многообразие $V(f_1,\dots,f_s)\subset k^n$ задават неявно представяне на $V(f_1,\dots,f_s)$. Неявното представяне на афинно многообразие е полезно за установяване на това дали дадена точка принадлежи на това афинно многообразие.
По зададено рационално представяне на афинно многообразие винаги може да се намери неявно представяне, т.е. полиномиални уравнения, задаващи това афинно многообразие.

Пример 4.8. *Двумерната сфера $V(x^2+y^2+z^2-1)\subset\mathbb{R}^3$ има рационална параметризация*

$$x=\frac{2t_1}{t_1^2+t_2^2+1}$$
$$y=\frac{2t_2}{t_1^2+t_2^2+1}$$
$$z=\frac{t_1^2+t_2^2-1}{t_1^2+t_2^2+1}.$$

Наистина, през всяка точка $(t_1,t_2,0)$ от координатната равнина Oxy и северния полюс $(0,0,1)$ съществува единствена права $L(t_1,t_2)$, която пресича $V(x^2+y^2+z^2-1)$ в единствена точка $(x(t_1,t_2),y(t_1,t_2),z(t_1,t_2))\neq(0,0,1)$. По-точно, $L(t_1,t_2)$ се задава с параметричните уравнения

$$x(u)=ut_1$$
$$y(u)=ut_2$$
$$z(u)=1-u$$

и

$$x(u)^2+y(u)^2+z(u)^2-1=(t_1^2+t_2^2+1)u^2-2u=0$$

тогава и само тогава, когато $u=0$ или $u=\frac{2}{t_1^2+t_2^2+1}$. Вземайки предвид, че $(x(0),y(0),z(0))=(0,0,1)$ е северният полюс, получаваме

$$x(t_1,t_2)=\frac{2t_1}{t_1^2+t_2^2+1}$$
$$y(t_1,t_2)=\frac{2t_2}{t_1^2+t_2^2+1}$$
$$z(t_1,t_2)=\frac{t_1^2+t_2^2-1}{t_1^2+t_2^2+1}.$$

Да означим

$$M = \left\{ \left(\frac{2t_1}{t_1^2+t_2^2+1}, \frac{2t_2}{t_1^2+t_2^2+1}, \frac{t_1^2+t_2^2-1}{t_1^2+t_2^2+1} \right) \Big| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

и да отбележим, че $M \subseteq V(x^2+y^2+z^2-1) \setminus \{(0,0,1)\}$. Обратно, през всяка точка $(x_o, y_o, z_o) \in V(x^2+y^2+z^2-1) \setminus \{(0,0,1)\}$ и северния полюс $(0,0,1)$ съществува единствена права L, която пресича координатната равнина Oxy в $(t_1, t_2, 0)$, така че $L = L(t_1, t_2)$ и $x_o = x(t_1, t_2)$, $y_o = y(t_1, t_2)$, $z_o = z(t_1, t_2)$. По този начин установяваме, че $M = V(x^2+y^2+z^2-1) \setminus \{(0,0,1)\}$. Достатъчно е да докажем, че $V(x^2+y^2+z^2-1) \setminus \{(0,0,1)\}$ не е афинно многообразие, за да твърдим, че M е рационална параметризация на $V(x^2+y^2+z^2-1)$. По-точно, $M \subseteq (\cap_{W \supseteq M} W) \subseteq V(x^2+y^2+z^2-1)$ за афинните многообразия W, съдържащи M и от допускането $\cap_{W \supseteq M} W \neq V(x^2+y^2+z^2-1)$ следва, че $M = \cap_{W \supseteq M} W$ е афинно многообразие. Да предположим, че $V(x^2+y^2+z^2-1) \setminus \{(0,0,1)\}$ е афинно многообразие. Тогава $M' = \big(V(x^2+y^2+z^2-1) \setminus \{(0,0,1)\} \big) \cap V(y)$ е афинно многообразие в координатната равнина Oxz. Ще проверим, че всеки полином $g(x,z)$, анулиращ се върху M' е кратен на x^2+z^2-1. Тогава $V(x^2+z^2-1) \subseteq M'$ води до $V(x^2+z^2-1) = M' = V(x^2+z^2-1) \setminus \{(0,0,1)\}$, което е противоречие. За целта да представим мономите

$$x^a z^{2b} = x^a \left[(x^2+z^2-1) + (1-x^2) \right]^b =$$

$$x^a \left[\sum_{i=0}^{b} \left(\begin{array}{c} b \\ i \end{array} \right) (x^2+z^2-1)^i (1-x^2)^{b-i} \right] = h_{a,2b}(x,z)(x^2+z^2-1) + x^a(1-x^2)^b,$$

$$x^a z^{2b+1} = h_{a,2b+1}(x,z)(x^2+z^2-1) + x^a(1-x^2)^b z.$$

Следователно произволен полином $f(x,z) \in \mathbb{R}[x,z]$ има вида

$$f(x,z) = h(x,z)(x^2+z^2-1) + g_1(x)z + g_0(x)$$

за подходящи $h(x,z) \in \mathbb{R}[x,z]$, $g_0, g_1 \in \mathbb{R}[x]$. Ако $f(x,z)$ се анулира върху M', то за всяко $x_o \in [-1,0) \cup (0,1]$ имаме

$$f(x_o, \sqrt{1-x_o^2}) = g_1(x_o)\sqrt{1-x_o^2} + g_0(x_o) =$$

$$g_0(x_o) - g_1(x_o)\sqrt{1-x_o^2} = f(x_o, -\sqrt{1-x_o^2}),$$

откъдето $g_1(x_o) = 0$. По този начин получаваме, че $g_1(x) = 0$ е нулевият полином. Сега $g_0(x_o) = 0$ за $\forall x_o \in [-1,1]$ води до $g_0(x) = 0 \in \mathbb{R}[x]$. С това установихме, че M е рационална параметризация на $V(x^2+y^2+z^2-1)$.

Пример 4.9. *Рационално пораметризираната равнинна крива*

$$x = 1 + t$$

$$y = 1 + t^2$$

има неявно представяне

$$V(y - x^2 + 2x - 2).$$

Достатъчно е да проверим, че множеството $M = \{(1+t, 1+t^2) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ съвпада с афинното многообразие $V(y - x^2 + 2x - 2)$. Наистина,

$$(1+t^2) - (1+t)^2 + 2(1+t) - 2 = 0$$

за всяко реално t. Обратно, ако $y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, то за $t = x - 1$ следва $y = t^2 + 1$.

ПРИМЕР 4.10. *Повърхнината $V(x^2 - y^2z^2 + z^3) \subset \mathbb{R}^3$ има рационална параметризация*

$$\begin{aligned} x &= t_1(t_2^2 - t_1^2) \\ y &= t_2 \\ z &= t_2^2 - t_1^2. \end{aligned}$$

За целта да започнем с рационални параметризации на кривите $V(x^2 - cz^2 + z^3) \subset \mathbb{R}^2$ за произволни $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$. По-точно, всяка права $x = tz$ през началото O в координатната равнина Oxz пресича $V(x^2 - cz^2 + z^3) \subset \mathbb{R}^2$ в началото O и точката $(x(t) = t(c-t^2), y(t) = 0, z(t) = c - t^2)$. За да твърдим, че

$$M'_c = \{(t(c-t^2), c-t^2) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

е рационална параметризация на равнинната крива $V(x^2-cz^2+z^3)$, достатъчно е да установим, че $M'_c = V(x^2 - cz^2 + z^3)$. Наистина, $t^2(c-t^2)^2 - c(c-t^2)^2 + (c-t^2)^3 = 0$ за $\forall t \in \mathbb{R}$. За произволна точка $(x_o, z_o) \in V(x^2 - cz^2 + z^3)$ с $z_o \neq 0$ полагаме $x_o = tz_o$, т.е. $t = \frac{x_o}{z_o}$ и от $x_o^2 - cz_o^2 + z_o^3 = z_o^2(t^2 - c + z_o) = 0$ извеждаме, че $z_o = c - t^2$ и $x_o = tz_o = t(c-t^2)$. Ако $(x_o, 0) \in V(x^2 - cz^2 + z^3)$, то $x_o = 0$ и $(x_o, z_o) = (0,0) = (\sqrt{c}(c - \sqrt{c}^2), c - \sqrt{c}^2) \in M'_c$. Полагайки $c = y^2$, $t = t_1$ и $y = t_2$ получаваме, че

$$M = \{(t_1(t_2^2 - t_1^2), t_2, t_1(t_2^2 - t_1^2)) \,|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = V(x^2 - y^2z^2 + z^3)$$

е рационална параметризация на $V(x^2 - y^2z^2 + z^3)$.
Ако $r(t_1) = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ е рационално параметризирана крива C в $\mathbb{R}^3$, то множеството от точките $r(t_1) + t_2\frac{d}{dt_1}r(t_1)$ е рационално параметризирана повърхнина в $\mathbb{R}^3$, която се нарича допирателна повърхнина $T(C)$ на C. Например, ако параметризираме усуканата кубика $V(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{R}^3$ чрез полагането

$$\begin{aligned} x &= t_1 \\ y &= t_1^2 \\ z &= t_1^3, \end{aligned}$$

то допирателната и повърхнина $T(V(y - x^2, z - x^3))$ има рационална параметризация

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2) &= t_1 + t_2 \\ y(t_1, t_2) &= t_1^2 + 2t_1t_2 \\ z(t_1, t_2) &= t_1^3 + 3t_1^2t_2. \end{aligned}$$

Задачи

ЗАДАЧА 4.11. *Да се намери уравнение на равнината в $\mathbb{R}^3$ с рационална параметризация*

$$\begin{aligned} x &= 1 + t_1 - t_2 \\ y &= t_1 + 2t_2 \\ z &= -1 - t_1 + t_2. \end{aligned}$$