Глава 2

Въпрос 7: Мономни идеали и лема на Диксон за крайна породеност на мономен идеал. Критерий за артиновост на линейна наредба, съгласувана с умножението на мономи

Определение 2.1. *Нека M е (евентуално безкрайно) множество от мономи на $x_1, \ldots, x_n$, а k е поле. Тогава множеството от крайни суми*

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{\alpha \in A} f_\alpha x^\alpha \mid f_\alpha \in k[x_1, \ldots, x_n],\, x^\alpha \in M \right\}$$

е идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$, който се нарича мономен идеал, породен от M.

Следващата лема характеризира мономите, принадлежащи на мономен идеал.

Лема 2.2. *Мономът x^β принадлежи на мономния идеал $\langle M \rangle$ тогава и само тогава, когато съществува моном $x^\alpha \in M$, който дели x^β, т.е. $x^\beta = x^\alpha x^\gamma$ за някакъв моном x^γ.*

Доказателство: Ако $x^\beta = x^\alpha x^\gamma$ за някакъв моном x^γ, то ясно е, че $x^\beta \in \langle M \rangle$. Обратно, ако $x^\beta \in \langle M \rangle$, то $x^\beta = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha x^\alpha$ за някакво крайно множество A и полиноми $f_\alpha \in k[x_1, \ldots, x_n]$ с коефициенти от поле k. Представяме $f_\alpha = \sum_{\gamma \in C_\alpha} a_{\alpha\gamma} x^\gamma$ като крайни линейни комбинации на мономи x^γ с коефициенти $a_{\alpha\gamma} \in k$ и изразяваме

$$x^\beta = \sum_{\alpha \in A} \sum_{\gamma \in C_\alpha} a_{\alpha\gamma} x^{\alpha+\gamma}.$$

Това равенство на полиноми означава, че съществуват $\alpha_o \in A$ $\gamma_o \in C_{\alpha_o}$, така че $x^\beta = x^{\alpha_o + \gamma_o} = x^{\alpha_o} x^{\gamma_o}$. В резултат, x^β се дели на $x^{\alpha_o} \in M$, Q.E.D.
Сега ще характеризираме полиномите, принадлежащи на мономен идеал.

Лема 2.3. *Следните условия са еквивалентни за полином $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ и мономен идеал $\langle M \rangle$:*
(i) $f \in \langle M \rangle$;
(ii) $f = \sum_{\beta \in B} b_\beta x^\beta$ е крайна k-линейна комбинация на мономи $x^\beta \in \langle M \rangle$ с коефициенти $b_\beta \in k$.

Доказателство: Импликацията $(ii) \Longrightarrow (i)$ е ясна. За да изведем (ii) от (i) да представим $f = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha x^\alpha$ чрез мономи $x^\alpha \in M$. За всяко $\alpha \in A$ да запишем f_α като крайна линейна комбинация $f_\alpha = \sum_{\gamma \in C_\alpha} a_{\alpha\gamma} x^\gamma$ на мономи x^γ с коефициенти $a_{\alpha\gamma} \in k$. В резултат,

$$f = \sum_{\beta \in B} b_\beta x^\beta = \sum_{\alpha \in A} \sum_{\gamma \in C_\alpha} a_{\alpha\gamma} x^{\alpha+\gamma}.$$

Доколкото дясната страна е крайна линейна комбинация на мономи, делящи се на някакво $x^\alpha \in M$, всеки моном x^β с $b_\beta \neq 0$ се дели на някакво $x^\alpha \in M$ и принадлежи на мономния идеал $\langle M \rangle$, Q.E.D.

По този начин, всеки мономен идеал $\langle M\rangle$ се характеризира напълно от множеството на мономите в него. С други думи, два мономни идеала $\langle M_1\rangle$ и $\langle M_2\rangle$ съвпадат тогава и само тогава, когато съдържат едни и същи мономи.
Основният резултат на настоящия въпрос е следната

Теорема 1. (Лема на Диксон) *Всеки мономен идеал* $\langle M\rangle \triangleleft k[x_1,\dots,x_n]$ *е крайно породен, т.е. съществуват мономи* $x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)} \in M$, *така че*

$$\langle M\rangle = \langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\rangle.$$

Доказателство: Ще разсъждаваме с индукция по броя на променливите n.
За $n=1$ множеството M се състои от мономи x^α с $\alpha\in\mathbb{Z}$, $\alpha\geq 0$. Ако β е минималното цяло число със свойството $x^\beta\in M$, то всеки моном $x^\alpha\in M$ се дели на x^β, така че $\langle M\rangle = \langle x^\beta\rangle$.
За произволно естествено $n\geq 2$ да допуснем, че сме доказали теоремата за мономни идеали на $n-1$ променливи. Да заменим x_n с y и да разгледаме мономен идеал $\langle M\rangle$ в пръстена $k[x_1,\dots,x_{n-1},y]$. До края на доказателството на Теорема 1 ще означаваме с x^α мономите $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ на $x_1,\dots,x_{n-1}$.
Разглеждаме проекцията

$$M' := \{x^\alpha \mid \exists x^\alpha y^p \in \langle M\rangle\}$$

на мономите от идеала $\langle M\rangle \triangleleft k[x_1,\dots,x_{n-1},y]$ в $k[x_1,\dots,x_{n-1}]$. По индукционно предположение, мономният идеал $\langle M'\rangle \triangleleft k[x_1,\dots,x_{n-1}]$, породен от множеството M' е крайно породен, така че съществуват $x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\in\langle M'\rangle$ с условието $\langle M'\rangle = \langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\rangle$. Всеки моном $x^{\alpha(i)}$ се дели на някакъв моном $x^\alpha\in M'$, за който съществува $x^\alpha y^{m_i}\in\langle M\rangle$ с $p\in\mathbb{Z}$, $p\geq 0$. Следователно $x^{\alpha(i)}y^{m_i} = (x^\alpha y^{m_i})\,x^\gamma \in \langle M\rangle$ за някакъв моном x^γ. Нека $m:=\max(m_1,\dots,m_s)$.
За всяко $0\leq p\leq m-1$ разглеждаме проекцията

$$M_p := \{x^\alpha \mid \exists x^\alpha y^p \in \langle M\rangle\}$$

на мономите от $\langle M\rangle$, които са от степен p относно y. По индукционно предположение, мономният идеал $\langle M_p\rangle \triangleleft k[x_1,\dots,x_{n-1}]$, породен от M_p е крайно породен, т.е. $\langle M_p\rangle = \langle x^{\alpha_p(1)},\dots,x^{\alpha_p(s_p)}\rangle$ за някакви мономи $x^{\alpha_p(i_p)}\in\langle M_p\rangle$, $1\leq i_p\leq s_p$.
Твърдим, че крайното множество от мономи

$$M_o := \{x^{\alpha(i)}y^m,\, x^{\alpha_p(i_p)}y^p \mid 1\leq i\leq s,\, 1\leq i_p\leq s_p,\, 0\leq p\leq m-1\}$$

поражда идеала $\langle M\rangle$. Наистина, всеки моном $x^{\alpha(i)}y^m = \left(x^{\alpha(i)}y^{m_i}\right)y^{m-m_i}\in\langle M\rangle$ съгласно $x^{\alpha(i)}y^{m_i}\in\langle M\rangle$. Аналогично, всеки моном $x^{\alpha_p(i_p)}\in\langle M_p\rangle$ се дели на някакъв моном $x^\gamma\in M_p$, който се характеризира с $x^\gamma y^p\in\langle M\rangle$. Следователно $x^{\alpha_p(i_p)}y^p = (x^\gamma y^p)\,x^\delta\in\langle M\rangle$ за някакъв моном x^δ на $x_1,\dots,x_{n-1}$. С това проверихме, че $M_o\subset\langle M\rangle$, откъдето $\langle M_o\rangle\subseteq\langle M\rangle$, доколкото $\langle M\rangle$ е идеал в $k[x_1,\dots,x_{n-1},y]$. Твърдим, че $M\subset\langle M_o\rangle$. Това означава, че всеки моном $x^\alpha y^p\in M$ се дели на някакъв моном от M_o. За $p\geq m$ имаме $x^\alpha\in M'\subset\langle M'\rangle = \langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\rangle$, така че $x^\alpha = x^{\alpha(i)}x^\beta$ за някакво $1\leq i\leq s$ и някакъв моном x^β. Сега $x^\alpha y^p = \left(x^{\alpha(i)}y^m\right)\left(x^\beta y^{p-m}\right)$ за монома $x^\beta y^{p-m}$ гарантира делимостта на $x^\alpha y^p$ с $x^{\alpha(i)}y^m\in M_o$. Ако $0\leq p\leq m-1$, то от $x^\alpha\in M_p\subset\langle M_p\rangle = \langle x^{\alpha_p(1)},\dots,x^{\alpha_p(s_p)}\rangle$ следва съществуването на $1\leq i_p\leq s_p$ и моном x^γ на $x_1,\dots,x_{n-1}$, така че $x^\alpha = x^{\alpha_p(i_p)}x^\gamma$. По този начин мономът $x^\alpha y^p = \left(x^{\alpha_p(i_p)}y^p\right)x^\gamma$ се оказва кратен на $x^{\alpha_p(i_p)}y^p\in M_o$. В резултат, $M\subset\langle M_o\rangle$ дава $\langle M\rangle\subseteq\langle M_o\rangle$ за идеала $\langle M_o\rangle$ в $k[x_1,\dots,x_{n-1},y]$ и довършва доказателството на $\langle M\rangle = \langle M_o\rangle$, Q.E.D.

Следствие 2.4. *За произволен мономен идеал $\langle M\rangle \lhd k[x_1,\dots,x_n]$ с пораждащи $x^\alpha \in M$ съществува крайно подмножество $x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)} \in M$ на тези пораждащи, с условието*

$$\langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\rangle = \langle M\rangle.$$

Доказателство: От Лемата на Диксон знаем, че съществуват $x^{\beta(1)},\dots,x^{\beta(s)} \in \langle M\rangle$, пораждащи

$$\langle x^{\beta(1)},\dots,x^{\beta(s)}\rangle = \langle M\rangle.$$

Съгласно Лема 2.2, съществуват мономи $x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)} \in M$, така че $x^{\alpha(i)}$ дели $x^{\beta(i)}$ за всички $1 \le i \le s$. Сега от

$$\langle M\rangle = \langle x^{\beta(1)},\dots,x^{\beta(s)}\rangle \subseteq \langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\rangle \subseteq \langle M\rangle$$

следва, че $\langle M\rangle = \langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\rangle$, Q.E.D.

Следствие 2.5. *Нека $>$ е линейна наредба на мономи в $k[x_1,\dots,x_n]$, която е съгласувана с произведението. В такъв случай, наредбата $>$ е артинова тогава и само тогава, когато $x^\alpha \ge 1 \in k$ за всички мономи x^α на $x_1,\dots,x_n$.*

Доказателство: Съгласно Лема **??**, ако $>$ е артинова наредба, то $x^\alpha \ge 1 \in k$ за всички мономи x^α.
Обратно, нека $x^\alpha \ge 1 \in k$ за всички мономи x^α на $x_1,\dots,x_n$, а M е непразно множество от мономи. Трябва да докажем, че M има минимален елемент. Съгласно Следствие 2.4 от Лемата на Диксон, съществуват мономи $x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}$ от M, така че $\langle M\rangle = \langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\rangle$. След евентуална преномерация можем да считаме, че $x^{\alpha(1)} < x^{\alpha(2)} < \ldots < x^{\alpha(s)}$. Твърдим, че $x^{\alpha(1)}$ е минималният елемент на M. Наистина, всеки моном $x^\alpha \in M$ принадлежи на мономния идеал $\langle M\rangle = \langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\rangle$. Съгласно Лема 2.2, съществува моном $x^{\alpha(i)}$, делящ x^α, т.е. $x^\alpha = x^{\alpha(i)}x^\gamma$ за някакъв моном x^γ. По предположение, $x^\gamma \ge 1 \in k$, така че умножавайки почленно с $x^{\alpha(i)}$ получаваме, че $x^\alpha = x^{\alpha(i)}x^\gamma \ge x^{\alpha(i)} \ge x^{\alpha(1)}$. Следователно $x^{\alpha(1)}$ е минималният елемент на M, Q.E.D.

Задачи

Задача 2.6. *Нека I е идеал в $k[x_1,\dots,x_n]$ със свойството, че полиномът $f = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha x^\alpha \in I$ тогава и само тогава, когато $x^\alpha \in I$ за $\forall a_\alpha \neq 0$. Да се докаже, че $I = \langle M\rangle$ е мономен идеал.*

Задача 2.7. *Да се намери крайна система пораждащи за мономния идеал $\langle M\rangle \lhd k[x,y]$, където*

$$M = \{x^3y^a,\ x^4y^a,\ x^5y^b,\ x^cy^d \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ a \ge 6,\ b \ge 4,\ c \ge 6,\ d \ge 0\}$$

Задача 2.8. *Нека $u = (u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ е наредена n-торка положителни реални числа, които са линейно независими над $\mathbb{Q}$. Казваме, че мономът x^α е по-голям от монома x^β и записваме $x^\alpha >_u x^\beta$, ако*

$$(u,\alpha) = \sum_{i=1}^n u_i\alpha_i > \sum_{i=1}^n u_i\beta_i = (u,\beta).$$

Да се докаже, че $>_u$ е мономна наредба.