Някои геометрични интерпретации на действията с комплексните числа

Велико Дончев

10 октомври 2015 г.

Допълнителен материал по Алгебра 1, Линейна Алгебра и ЛААГ

Ще разгледаме действията с комплексни числа от геометрична гледна точка. Ще видим, че известните геометрични преобразувания като транслация, ротация, хомотетия, осева симетрия и др. *съответстват* на действия с комплексни числа.

Фигури 1–8 и 10 са направени с помощта на софтуера *Geogebra*, докато Фигура 9 е направена с помощта на софтуера *Wolfram Mathematica*.

Материалът е пожелателен и има за цел да онагледи знанията за комплексните числа на упражненията, както и да развие геометричната интуиция, свързана с тях. Изложението *предполага основни познания по Аналитична геометрия* като например понятие за *Декартова координатна система и Уравнение на права*.

1 Събиране: транслация

Нека

$$z = a + \mathrm{i}b, \qquad z_0 = a_0 + \mathrm{i}b_0$$

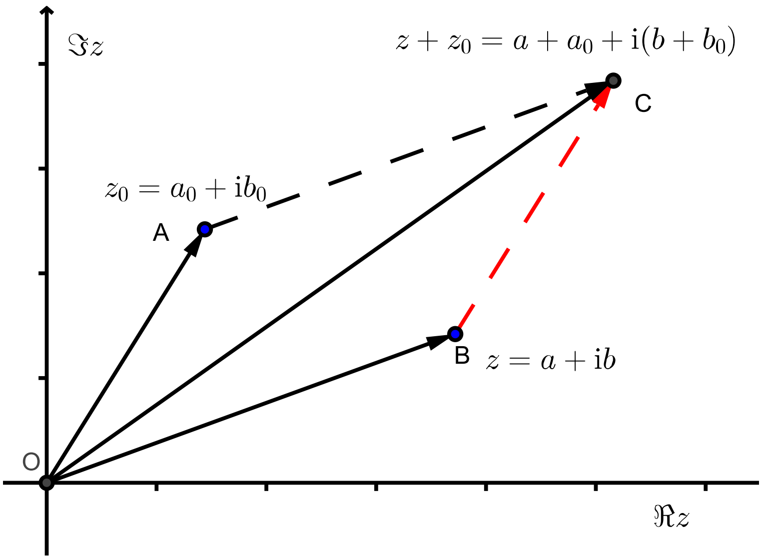
са две произволни комплексни числа, записани в алгебричен вид. За сборът им имаме

$$z + z_0 = a + a_0 + \mathrm{i}(b + b_0),$$

което отгоавря на събиране на векторите (a, b) и (a_0, b_0) в равнината. Нека изобразим геометрично тази операция. Резултатното комплексно число $z+z_0$ геометрично "се намира" във точка C (правило на успоредника). Да погледнем на този резултат по следния начин:

Къде се премества z (т.B) под действие на операцията "събиране със z_0"?
$$z \to z + z_0$$

От чертежа (Фиг. 1) се вижда, че се извършва се транслация по направление (a_0, b_0): точката B се премества в точката C.



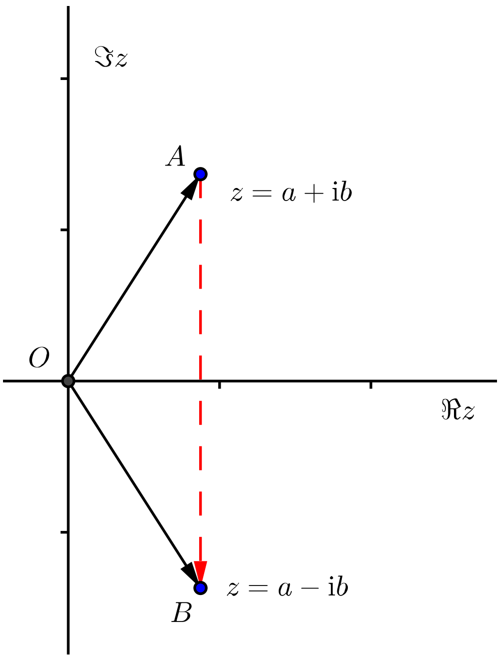
Фигура 1: Транслация в равнината като събиране с комплексно число

2 Комплексно спрягане: отражение

Да разгледаме операцията "комплексно спрягане". При нея имаме следното съпоставяне

$$z = a + \mathrm{i}b \to \overline{z} = a - \mathrm{i}b.$$

Геометрично това означава, че точка $A(x, y)$ отива (Фиг. 2) в симетричната и спрямо оста $\Re z$ точка $B(x, -y)$.



Фигура 2: Симетрия спрямо остта $Ox^{\rightarrow}(\Re z)$

3 Умножение: ротация, хомотетия, симетрия

Нека две комплексни числа z и z_0 са зададени в тригонометричен вид

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = x + \mathrm{i}y, \qquad z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + \mathrm{i}\sin\varphi_0) = x_0 + \mathrm{i}y_0.$$

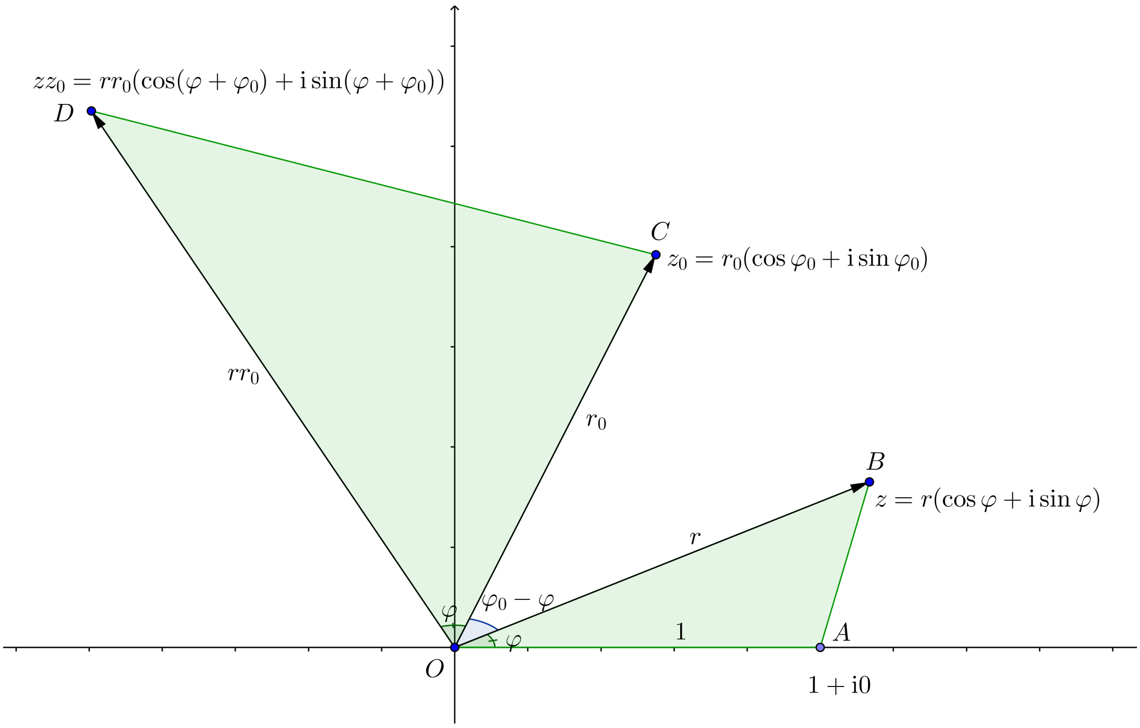
Както знаем, при умножението на комплексни числа, модулите се умножават, а аргументите се събират. За произведението на z и z_0 имаме, че

$$zz_0 = rr_0(\cos(\varphi + \varphi_0) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \varphi_0)) = x_1 + \mathrm{i}y_1. \tag{1}$$

Нека т. $A(1,0)$, т.$B(x,y)$ отговаря на z, т.$C(x_0,y_0)$ отговаря на z_0, а т.$D(x_1,y_1)$ отговаря на zz_0 (фиг. 3) Тъй като $OA = 1, OB = r, OC = r_0, OD = rr_0$ и $\angle COD = \angle AOC - \angle BOC = \varphi = \angle AOB$ то следва, че

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD$$

с коефициент на подобие r_0.



Фигура 3: Подобни триъгълници, получени при умножение на две комплексни числа

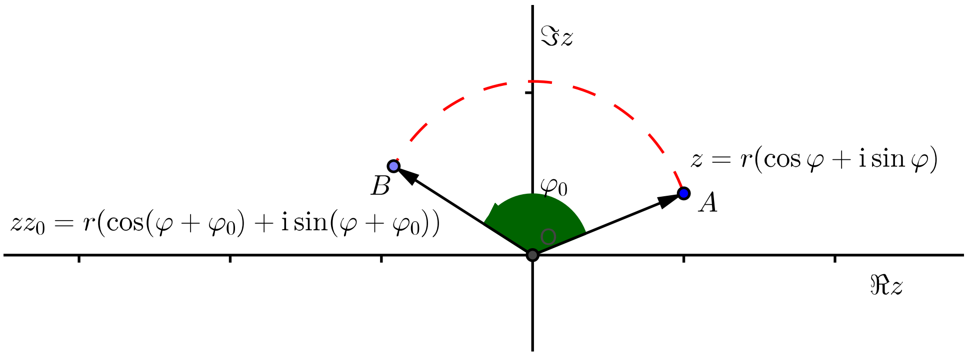
Ще интерпретираме равенството (1) геометрично като преобразувание, действащо върху z. Тоест интерпретираме резултата от произведението на z и z_0 по следния начин: "*Как действа умножението с фиксираното число z_0 на z?*". Ще разгледаме няколко случая за числото z_0, на които отгоаварят различни геометрични преобразувания.

- Ротация

  Нека $r_0 = 1$. В този случай получаваме, че се изменя само аргументът на числото като се прибавя φ_0. При това изображение имаме

  $$z \to zz_0 = r(\cos(\varphi + \varphi_0) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \varphi_0)),$$

  което геометрично отговаря на ротация на ъгъл φ_0 в посока обратна на часовниковата стрелка около центъра $(0,0)$ на координатната система. На Фиг. 4 точка A отива в т. B.

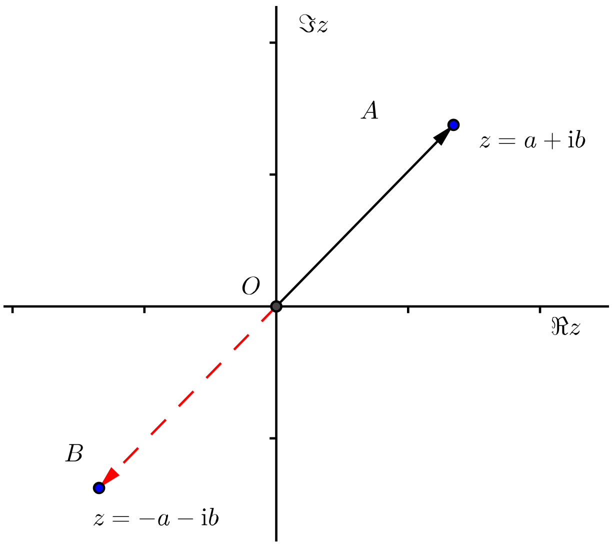


Фигура 4: Ротация в равнината като умножение с единично комплексно число

- Да обърнем внимание на частният случай $\varphi_0 = \pi$. В този случай имаме умножение по $\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1$, следователно изображението всъщност представлява "умножение по -1". Ако запишем z в алгебричен вид имаме

$$z = a + \mathrm{i}b \to -a - \mathrm{i}b$$

От геометрична гледна точка имаме симетрия спрямо т. O (Фиг. 5).



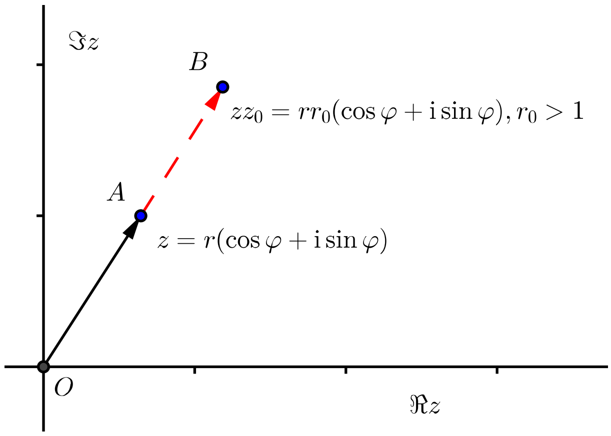
Фигура 5: Симетрия спрямо координатното начало.

- Хомотетия

Нека $\arg z = \varphi_0 = 0$. В този случай получаваме, че се изменя само модулът на числото като се умножава по $r_0 > 0$. Геометрично това означава, че разстоянието до центъра на координатната система се променя r_0 пъти. Следователно изображението

$$z \to zz_0 = rr_0(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

отговаря на хомотетия с положителен коефициент и център координатното начало. На Фиг. 6 е демонстрирана разтягаща хомотетия ($r_0 > 1$). Съответно свиваща хомотетия ще имаме при $r_0 < 1$.



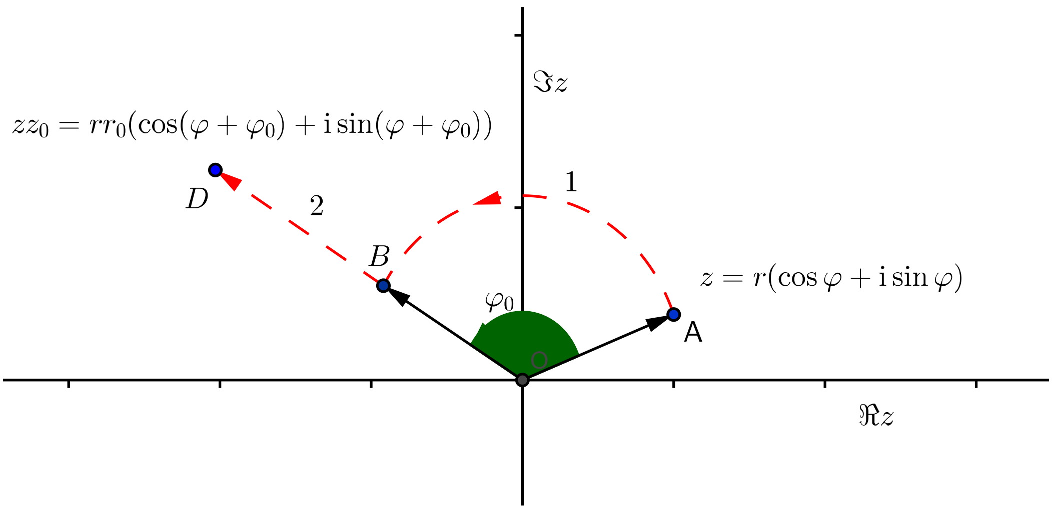
Фигура 6: Хомотетия с положителен коефициент в равнината като умножение с комплексно число с нулев аргумент.

- Въртяща хомотетия

  В най-общия случай умножението с комплексното число $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + \mathrm{i}\sin\varphi_0)$ едновременно умножава модула на z по r_0 и увеличава аргумента му със φ_0. За геометрична яснота, можем да представим това умножение чрез последователност от две други: първо умножаваме по $\cos\varphi_0 + \mathrm{i}\sin\varphi_0$ и след това по r_0

  $$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \to_1 r(\cos(\varphi+\varphi_0) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\varphi_0)) \to_2 rr_0(\cos(\varphi+\varphi_0) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\varphi_0)).$$

  Първото умножение отговаря на ротация (т. A отива в т.B), а второто умножение отговаря на хомотетия (т. B отива в т. D), Фиг. 7. Напомняме, че композиция на ротация и хомотетия се нарича *въртяща хомотетия*.



Фигура 7: Въртяща хомотетия като умножение с комплексно число.

4 Получаване на други геометрични преобразувания чрез комбиниране (композиция).

Получихме симетрия спрямо правата $Ox^{\to}(\Re z)$ и спрямо точка (координатното начало).

Задача 1. *Да се определи кое преобразувание отговаря на симетрия относно $Oy^{\to}(\Im z)$?*

Решение: Достатъчно е да извършим първо симетрия спрямо $Ox^{\rightarrow}$ и след това симетрия спрямо координатното начало

$$z = a + \mathrm{i}b \rightarrow_1 \overline{z} \rightarrow_2 \overline{z}(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -\overline{z} = -a + \mathrm{i}b.$$

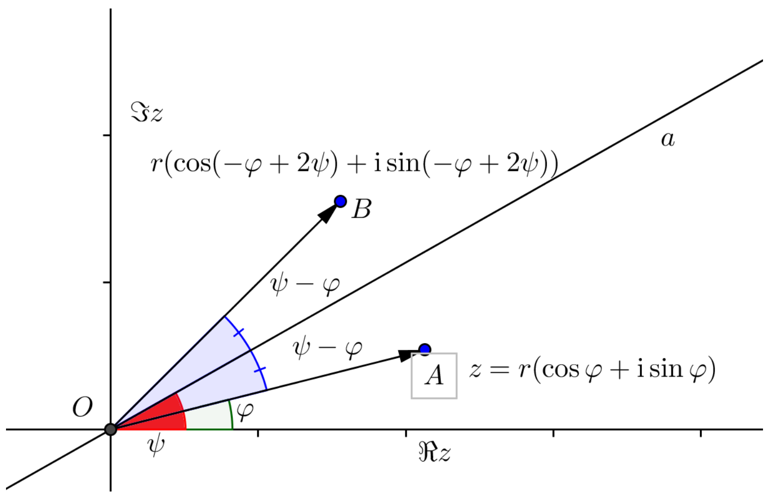
Задача 2. *Да се определи кое преобразувание отговаря на симетрия около права, минаваща през центъра на координатната система, сключваща ъгъл $\psi \in [0, \pi)$ с оста $Ox^{\rightarrow +}$.*

Упътване: Нека a е права, минаваща през центъра. Използвайки геометрични (училищни) разсъждения установете, че изображението "симетрия спрямо правата a"(Фиг. 8) е

$$z \rightarrow \overline{z}(\cos 2\psi + \mathrm{i}\sin 2\psi).$$

На чертеж 8 числото z (т.A) е записано в тригонометричен вид, защото така е по-удобно да се съобрази ситуалцията геометрично. Ако се интересуваме от търсената трансформация в координатен вид, можем да представим z в алгебричен вид, $z = a + \mathrm{i}b$. В този случай имаме $\overline{z}(\cos 2\psi + \mathrm{i}\sin 2\psi) = a\cos 2\psi + b\sin 2\psi + \mathrm{i}(a\sin 2\psi - b\cos 2\psi)$ и следователно търсената трансформация в координатен вид е

$$(a, b) \longrightarrow (a\cos 2\psi + b\sin 2\psi,\ a\sin 2\psi - b\cos 2\psi).$$



Фигура 8: Симетрия спрямо координатното начало.

Задача 3. *Да се изведе, че преобразуванието, което отговаря на "осева симетрия относно права, успоредна на Ox" е*

$$z \rightarrow \overline{z} + \mathrm{i}2y_0,$$

където правата, успоредна на Ox се намира на разстояние y_0 от Ox (съответно ако $y_0 > 0$, правата е в горната полуравнина и ако $y_0 < 0$, правата се намира в долната полуравнина).

Задача 4. *Да се изведе, че преобразуванието, което отговаря на "осева симетрия относно права, успоредна на Oy" е*

$$z \rightarrow 2x_0 - \overline{z},$$

където правата, успоредна на Oy се намира на разстояние x_0 от Oy (съответно ако $x_0 > 0$, правата е в горната полуравнина и ако $x_0 < 0$, правата се намира в долната полуравнина).

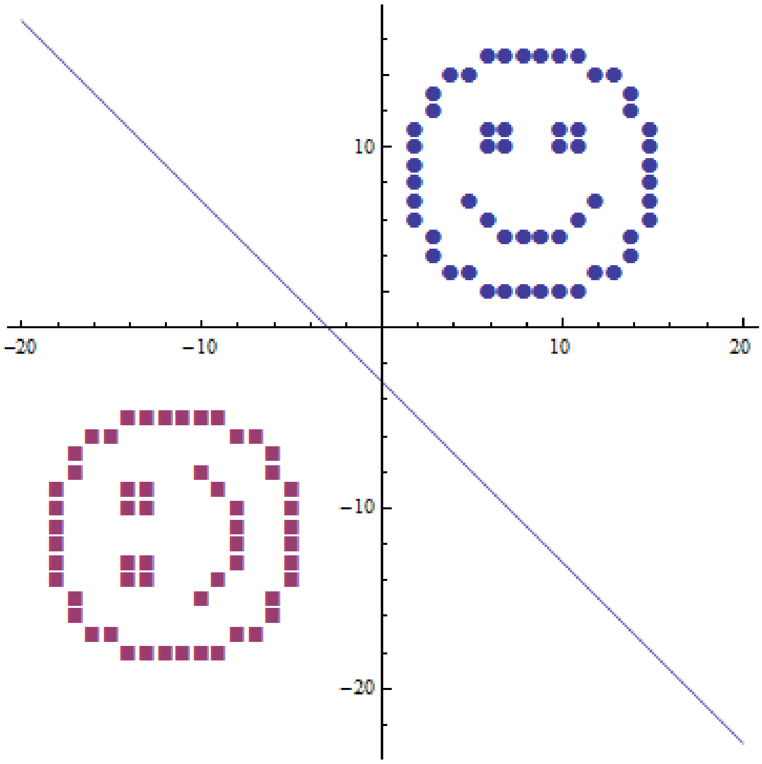
Задача 5. *Нека $A : y = ax + b$ е права, която не е успоредна на Ox. Да се изведе (виж Фиг. 9) , че преобразуванието, което отговаря на "осева симетрия относно A" е*

$$z \to \overline{z - \mathrm{i}b}.z_0 + \mathrm{i}b,$$

където

$$z_0 = \cos(2\psi) + \mathrm{i}\sin(2\psi), \quad \psi = \arctan a.$$

Сверете този резултат със Задача 3, която е частен случай на Задача 5.



Фигура 9: Отражение спрямо правата $y = -x - 3$.

Задача 6. *Допълнете Таблица 1 с останалите резултати, включително от предходните задачи, както и всяко друго преобразувание, което считате за полезно.*

5 Модул на комплексно число: описване на окръжност

Нека

$$z = x + iy.$$

Както добре знаем, геометричният смисъл на модула $|z|$ на z е разтоянието от координатното начало до $A(x, y)$, а аргумента - ъгъла между вектора $\vec{OA}$ и $Ox^{\to +}$. Нека сега

$$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0.$$

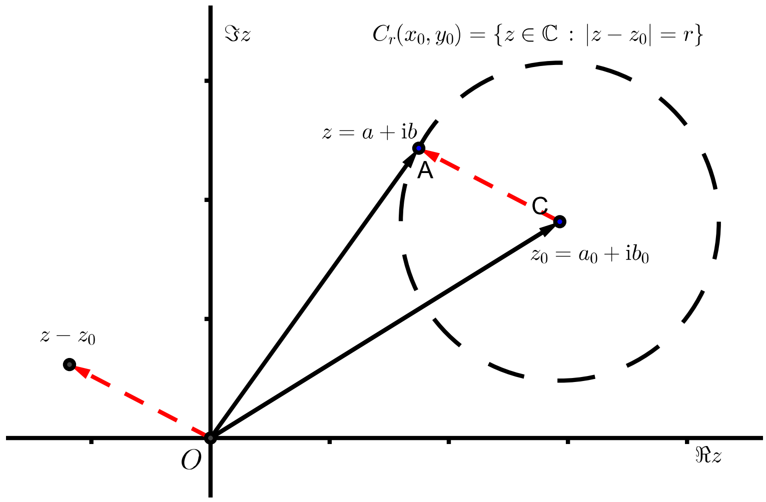
Резултатът от изваждането на z_0 от z е

$$z - z_0 = x - x_0 + \mathrm{i}(y - y_0).$$

Нека $C(x_0, y_0)$, $A(x, y)$. Имаме, че $\vec{CA} = (x - x_0, y - y_0)$, т.е. на него отговаря комплексното число $z - z_0$. Ако $r > 0$ е фиксирано число и поставим условие $|z - z_0| = r$, то точките z, които изпълняват това условие ще опишат окръжност $C_r(x_0, y_0)$ с център (x_0, y_0) и радиус r (Фиг. 10).

И така, уравнение на окръжност ц център (x_0, y_0) и радиус r се описва от уравнението

$$|z - z_0| = r, \qquad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$$



Фигура 10: Получаване на описание на произволна окръжност в равнината.

6 Заключение

Разглежданията позволяват читателят сам да направи пълна таблица с координатният вид на всички еднаквости и подобности в равнината, виж Задача 6. В материалът не са разгледани преобразуванието *инверсия*

$$z \to \frac{1}{\bar{z}},$$

както и *дробно-линейните трансформации* с общ вид

$$z \to \frac{az + b}{cz + d}, \qquad c^2 + d^2 > 0,$$

които излизат извън предмета на бакалавърски курс по Линейна алгебра. Дробно-линейните трансформации и техните свойства са разгледани например в [1], [2]. Инверсията е разгледана подробно в [3] (макар и не от гледна точка на комплексния анализ) и частично в [1], [2].

Литература

[1] Т. Аргирова, *Теория на аналитичните функции*, СУ "Кл. Охридски", София, 1992.

[2] Евгени Христов, Красимира Влъчкова, *Задачи и теореми по Комплексен анализ*, 2004, http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/companal/krassivl/manualcomplexanalysis.pdf

[3] К. Банков, Т. Витанов, *Геометрия*, Анубис, 2003.

Таблица 1: Систематизирани резултати

Преобразувание (компл. вид)	Геометрично съответствие	Координатен запис
$z \to z + z_0$	Транслация по направление (x_0, z_0)	$(x, y) \to (x + x_0, y + y_0)$
$z \to z(\cos\varphi_0 + \mathrm{i}\sin\varphi_0)$	Ротация на ъгъл φ_0 обратно на ч.с.	$(x, y) \to (x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0, x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0$