ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ЕМИ НЬОТЕР ЗА КРАЙНАТА ПОРОДЕНОСТ НА ИНВАРИАНТИТЕ НА КРАЙНИТЕ ГРУПИ

чл.-кор. Веселин Дренски

Ще приведем оригиналното доказателство на Еми Ньотер [N] за крайната породеност на алгебрата на инвариантите на една крайна група. То е съвсем елементарно и използва само теорията на симетричните полиноми. В същата статия има още едно елементарно доказателство. През цялото време ще работим над поле K с характеристика 0.

Лема 1. *Нека*

$$K[X_1, \ldots, X_m] = K[x_{ij} \mid i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m]$$

е алгебрата на полиномите на mn променливи и

$$f(X) = f(x_1, \ldots, x_n) \in K[X] = K[x_1, \ldots, x_n].$$

Полиномът

$$\sum_{j=1}^{m} f(X_j) = \sum_{j=1}^{m} f(x_{1j}, \ldots, x_{nj})$$

се изразява чрез полиномите

$$Y_a = \sum_{j=1}^{m} X_j^a = \sum_{j=1}^{m} x_{1j}^{a_1} \cdots x_{nj}^{a_n}, \quad |a| = a_1 + \cdots + a_n \leq m.$$

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че всяко

$$Y_b = \sum_{j=1}^{m} X_j^b = \sum_{j=1}^{m} x_{1j}^{b_1} \cdots x_{nj}^{b_n}$$

се изразява чрез тези Y_a, за които $|a| = a_1 + \cdots + a_n \leq m$. Да разгледаме изразите

$$u_j = x_{1j}t_1 + \cdots + x_{nj}t_n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

където $t_1, \ldots, t_n$ са нови променливи. Тъй като основното поле е с характеристика 0, съгласно формулите на Нютон степенните сборове

$$S_N(U) = u_1^N + \cdots + u_m^N, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

се изразяват като полиноми на $S_1(U), \ldots, S_m(U)$. Но

$$S_N(U) = \sum_{j=1}^{m} (x_{1j}t_1 + \cdots + x_{nj}t_n)^N$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{|b|=N} \frac{N!}{b_1! \cdots b_n!} x_{1j}^{b_1} \cdots x_{nj}^{b_n} t_1^{b_1} \cdots t_n^{b_n} = \sum_{|b|=N} \frac{N!}{b_1! \cdots b_n!} Y_b t_1^{b_1} \cdots t_n^{b_n}.$$

Тъй като $S_N(U)$ се изразява чрез $S_1(U), \dots, S_m(U)$, то коефициентите Y_b пред $t_1^{b_1} \cdots t_n^{b_n}$ се изразяват като полиноми на коефициентите Y_a пред $t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$ в $S_1(U), \dots, S_m(U)$.

Сега ще докажем, че алгебрата на инвариантите е не само крайно породена, но и се поражда от инвариантни полиноми от степен, ненадминаваща реда на групата.

Теорема 2. *Нека G е подгрупа с m елемента на общата линейна група $GL_n(K)$. Тогава алгебрата на инвариантите $K[X]^G$ се поражда от инвариантите*

$$Y_a = \sum_{g \in G} g(X^a) = \sum_{g \in G} g\left(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}\right), \quad |a| = a_1 + \cdots + a_n \leq m.$$

Доказателство. Нека $G = \{g_1, \dots, g_m\}$. Да означим $x_{ij} = g_j(x_i)$. Ако $f(X) \in K[X]^G$, то $g(f(X)) = f(X)$, $g \in G$, и

$$f(X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(f(X)) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} f(g_j(X)) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} f(X_j),$$

където $f(X_j) = f(x_{1j}, \dots, x_{nj})$. Съгласно лемата $f(X)$ се изразява като полином на

$$\sum_{j=1}^{m} X_j^a = \sum_{j=1}^{m} x_{1j}^{a_1} \cdots x_{nj}^{a_n} = \sum_{g \in G} g(X^a) = \sum_{g \in G} g\left(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}\right) = Y_a$$

за $|a| = a_1 + \cdots + a_n \leq m$.

В някои случаи оценката $\leq |G|$ на степента на пораждащите в алгебрата на инвариантите $K[G]^G$ е доста завишена. Например за алгебрата на симетричните полиноми на n променливи тя дава $n!$, а в действителност е достатъчно да вземем за пораждащи симетричните полиноми от степен $\leq n$.

Пример 3. Нека $n = 3$, $K[X] = K[x_1, x_2, x_3] = K[x, y, z]$ и G е цикличната група от ред 3, породена от g с действие

$$g(x) = y, \quad g(y) = z, \quad g(z) = x.$$

Съгласно теоремата на Еми Ньотер, $K[X]^G$ се поражда от

$$Y_{abc} = (1 + g + g^2)(x^a y^b z^c) = x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c, \quad a + b + c \leq 3.$$

Директни пресмятания показват, че всички такива инварианти са симетричните полиноми

$$Y_{100} = x + y + z, \quad Y_{200} = x^2 + y^2 + z^2, \quad Y_{110} = xy + xz + yz,$$
$$Y_{300} = x^3 + y^3 + z^3, \quad Y_{111} = 3xyz$$

и двата полинома от трета степен

$$Y_{210} = x^2y + y^2z + z^2x, \quad Y_{120} = xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

Оттук лесно следва, че $K[X]^G$ се поражда от елементарните симетрични полиноми $e_1 = Y_{100}$, $e_2 = Y_{110}$, $e_3 = Y_{111}/3$ и от полинома Y_{210}.

Литература

[N] E. Noether, Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen, Math. Ann. **77** (1915), 89-92. (Facsimiles (сканирана версия) на статията е достъпна чрез http://www.emis.de/MATH/JFM/ след което се търси например по Author: Noether, E*, Title: Endlichkeitssatz.)