# РЕД НА ХИЛБЕРТ
# НА СВОБОДНАТА АЛГЕБРА НА ЛИ

**чл.-кор. Веселин Дренски**

Тази лекция е посветена на формулата за коефициентите на редовете на Хилберт на свободните алгебри на Ли с краен брой пораждащи. Доказателството може да се намери например в книгата на Бурбаки [B] (която има и преводи на руски и английски).

Нека $L(X)$ е свободната алгебра на Ли с $m$ пораждащи. Съгласно теоремата на Вит, свободната асоциативна алгебра $K\langle X\rangle$ е изоморфна на универсалната обвиваща алгебра $U(L(X))$ на $L(X)$. Да фиксираме базис $\{u_1, u_2, \ldots\}$ на $L(X)$, който се състои от хомогенни елементи. Съгласно теоремата на Поанкаре – Биркхоф – Вит, $K\langle X\rangle$ има базис

$$\{u_1^{a_1}\cdots u_k^{a_k} \mid a_i \geq 0\}\,,$$

който също е градуиран. Следователно, редът на Хилберт на $K\langle X\rangle$ е равен на произведението на редовете на Хилберт на полиномните алгебри на една променлива $K[u_i]$

$$H(K\langle X\rangle, t) = \prod_{i\geq 1} H(K[u_i], t) = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-t^{\deg u_i}}.$$

Нека хомогенната компонента от степен $n$ на $L(X)$ е от размерност $c_n$, т.е. в базиса $\{u_1, u_2, \ldots\}$ има $c_n$ полинома от степен $n$. Следователно

$$H(K\langle X\rangle, t) = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1-t^n)^{c_n}}.$$

Известно е, че

$$H(K\langle X\rangle, t) = \frac{1}{1-|X|t} = \frac{1}{1-mt},$$

откъдето получаваме формалното равенство (без да се интересуваме от въпроса за сходимостта на безкрайното произведение)

$$\frac{1}{1-mt} = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1-t^n)^{c_n}}.$$

Разглеждаме развитието в ред на логаритмичната функция

$$\log(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

Разглеждаме този ред като формален степенен ред (отново без да се интересуваме от въпроса за сходимост).Той продължава да има свойството на логаритъма

$$\log((1-x)(1-y)) = \log(1-x) + \log(1-y).$$

Следователно, логаритмувайки равенството

$$\frac{1}{1-mt} = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1-t^n)^{c_n}},$$

получаваме

$$\log\left(\frac{1}{1-mt}\right) = \sum_{n\geq 1} c_n \log\left(\frac{1}{1-t^n}\right),$$

$$-\log(1-mt) = -\sum_{n\geq 1} c_n \log(1-t^n),$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{m^n t^n}{n} = \sum_{n\geq 1} c_n \sum_{k\geq 1} \frac{t^{nk}}{k} = \sum_{k\geq 1}\sum_{\ell\geq 1} \frac{c_k t^{k\ell}}{\ell}.$$

Сравнявайки коефициентите пред $x^n$, получаваме

$$\frac{m^n}{n} = \sum_{k\ell = n} \frac{c_k}{\ell}.$$

Изразявайки $\ell$ от $k\ell = n$, получаваме

$$m^n = \sum_{k\mid n} k c_k.$$

Ще използваме формулата за обръщане на Мьобиус. Ако $f(n)$ и $g(n)$ са функции на $n \in \mathbb{N}$, за които

$$f(n) = \sum_{k\mid n} g(k),$$

то

$$g(n) = \sum_{d\mid n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right),$$

където функцията на Мьобиус $\mu(d)$ се дефинира като

$$\mu(d) = \begin{cases} (-1)^k, & d = p_1 \cdots p_k \quad (p_i \text{ са различни прости числа}), \\ \\ 0, & d \text{ се дели на квадрат на просто число.} \end{cases}$$

Прилагайки формулата за обръщане на Мьобиус за функциите $f(n) = m^n$ и $g(k) = kc_k$, пролучаваме

$$nc_n = \sum_{d|n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}.$$

По такъв начин доказахме следната теорема:

**Теорема 1.** *Нека $c_n$ е размерността на хомогенната компонента от степен $n$ на свободната алгебра на Ли с $m$ пораждащи. Тогава*

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}.$$

Директни пресмятания дават първите няколко стойниости на $c_n$:

$$c_1 = m, \quad c_2 = \frac{1}{2}(m^2 - m), \quad c_3 = \frac{1}{3}(m^3 - m), \quad c_4 = \frac{1}{4}(m^4 - m^2),$$

$$c_5 = \frac{1}{5}(m^5 - m), \quad c_6 = \frac{1}{6}(m^6 - m^3 - m^2 + m).$$

Когато свободната алгебра на Ли се поражда от два елемента $x$ и $y$, можем да изберем за базис на линейното пространство от елементите от степен $\leq 5$ следните полиноми:

$$x, \quad y, \quad [x, y], \quad [x, y, x] (= [[x, y], x]), \quad [x, y, y],$$

$$[x, y, x, x], \quad [x, y, x, y], \quad [x, y, y, y],$$

$$[x, y, x, x, x], \quad [x, y, x, x, y], \quad [x, y, x, y, y], \quad [x, y, y, y, y],$$

$$[x, y, x, [x, y]], \quad [x, y, y, [x, y]].$$

В общия случай има комбинаторни алгоритми, които позволяват да се строи ефективно базис на свободната алгебра на Ли. Най-известните базиси са тези на Маршал Хол, Линдън и Ширшов. Вж например книгата на Бурбаки [B] или оригиналните статии на Хол [H], Линдън [L] и Ширшов [S].

## Литература


[B] Bourbaki, N. Éléments de mathématique. Fasc. XXXVII: Groupes et algèbres de Lie. Chap. II: Algèbres de Lie libres. Chap. III: Groupes de Lie. Actualites scientifiques et industrielles 1349. Paris: Hermann, 1972. Translation: Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 1–3, Elements of Math., Springer-Verlag, 1989.

[H] M. Hall, A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 575-581.

[L] R.C. Lyndon, On Burnside's problem. I, II, Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 202-215; **78** (1955), 329-332.

[S] А.И. Ширшов, О базах свободной алгебры Ли, Алгебра и логика **1** (1962), No. 1, 14-19.