Софийски Университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

Писмен Изпит по "Алгебра I"

Спец. "Софтуерно Инженерство"
23.01.2007, Вариант 1

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ___________

Указания:

1. Моля, попълнете Вашите лични данни на заглавната страница на изпита и в началото на всяка от останалите 10 страници.
2. Изпитът се състои от 10 задачи. Всяка напълно решена задача се оценява с 4 точки. За да получите отлична оценка е достатъчно да съберете 24 точки. Студенти, които съберат по-малко от 6 точки, няма да бъдат допуснати до устния изпит.
3. Крайната оценка F се пресмята по формулата $F = 2 + \dfrac{\min(T, 24)}{6}$, където T е общият брой събрани точки по всички задачи. *Само обосновани решения на задачите ще бъдат оценявани с пълен брой точки.*
4. Моля, записвайте решението на всяка задача *непосредствено* след нейния текст. За чернова можете да използвате задната част на листата. Ако се нуждаете от допълнителни листа, трябва да се обърнете се към преподавателите, които провеждат изпита.
5. Използването на калкулатор и помощни материали, различни от химикалка и/или молив, *не е разрешено*. **Всяка обмяна на информация между студентите, касаеща задачите от изпита, ще бъде тълкувана като опит за преписване.**
6. Желаем Ви успешна работа!

Задача	Точки
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
Общ брой точки:	
Оценка:	

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 1. *Да се реши матричното уравнение*

$$X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Име: __________________________________ Група: ______ Ф.Н.: __________

Задача 2. *Нека* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *е базис на линейното пространство* V *и нека* $g : V \to \mathbb{R}$ *е линейна функция, такава че* $g(\boldsymbol{e}_1) = 1$, $g(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = -1$, $g(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = 2$. *Да се намери* $g(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3)$.

Решение.

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 3. *Да се намери рангът на матрицата* $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ *в зависимост от стойностите на параметъра* λ.

Решение.

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ___________

Задача 4. *Нека*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и нека} \quad B = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix},$$

където Δ_{ij} *е адюнгираното количество на елемента* a_{ij} *на матрицата* A*,* $1 \leq i, j \leq 3$*. Да се пресметне* $\det B$*, ако е известно, че* $\det A = -6$.

Решение.

Име: ______________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 5. *Нека* $U = l(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ *и* $W = l(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$*, където*

$$\boldsymbol{a}_1 = (-1, 0, 1, 2) \qquad \boldsymbol{b}_1 = (0, 1, 2, 3)$$
$$\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 0, -1) \qquad \boldsymbol{b}_2 = (3, 2, 1, 0).$$

Да се намерят базиси на линейните подпространства $U + W$ *и* $U \cap W$.

Решение.

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ___________

Задача 6. *Нека линейният оператор* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *има матрица* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *в стандартния базис на* $\mathbb{R}^3$.

[1 точка] *а) Да се намерят собствените стойности на* φ.

[3 точки] *б) Да се намери ортонормиран базис на* $\mathbb{R}^3$, *в който матрицата* D *на* φ *е диагонална, както и тази матрица* D.

Решение.

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 7. *Нека* $f : V \to V$ *и* $g : V \to V$ *са линейни оператори, такива че* $fg = 0$ *(т.е.* $f(g(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$ *за всеки вектор* $\boldsymbol{x}$ *от* V*). Да се докаже, че:*

[1 точка] *а)* $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} f$;

[3 точки] *б)* $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Ker} g) \geq \dim V$.

Решение.

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 8. *Нека* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *е линеен оператор със собствени стойности* $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

[1 точка] *а) Да се докаже, че* φ *е изоморфизъм.*

[1 точки] *б) Да се докаже, че всеки собствен вектор на* φ *е собствен вектор на* φ^{-1}.

[2 точки] *в) Да се намерят всички собствени стойности на* φ^{-1}.

Решение.

Име: ______________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 9. *Нека V е линейно пространство и нека $f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$ е полилинейна антисиметрична функция. Да се докаже, че ако $k > \dim V$, то $f = 0$ (т.е. $f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = 0$ за всички вектори $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ от V).*

Решение.

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 10. *Нека линейният оператор $\varphi : V \to V$ има една и съща матрица A във всеки базис на линейното пространство V. Да се докаже, че съществува число λ, такова че $\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ за всеки вектор $\boldsymbol{x}$ от V.*

Решение.