Софийски Университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

Писмен Изпит по "Алгебра I"

Спец. "Софтуерно Инженерство"
22.01.2008, Вариант 1

Име: ______________________ Група: ______ Ф.Н.: ___________

Указания:

1. Попълнете Вашите лични данни на заглавната страница на изпита и в началото на всяка от останалите 8 страници.
2. Изпитът се състои от 8 задачи. Всяка напълно решена задача се оценява с 5 точки.
3. *Само обосновани решения на задачите ще бъдат оценявани с пълен брой точки.*
4. Записвайте решението на всяка задача *непосредствено* след нейния текст. За чернова можете да използвате обратната част на листата. Ако се нуждаете от допълнителни листа, трябва да се обърнете към преподавателите, които провеждат изпита.
5. Използването на калкулатор и помощни материали, различни от химикалка и/или молив, *не е разрешено*.
6. Желаем Ви успешна работа!

Задача	Точки
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Общ брой точки:	

Име: ____ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 1. *Да се намерят всички стойности на a и b, за които линейната система*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= b \end{aligned}$$

има безброй решения.

Решение.

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 2. *Нека*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Намерете размерностите и базиси на линейните пространства $R(A^t)$, $R(A)$, $N(A)$ *и* $N(A^t)$.

Решение.

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 3. *Да се намери рангът на матрицата* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \lambda \\ 2 & 2 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *в зависимост от стойностите на параметъра* λ.

Решение.

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 4. *Да се докаже, че матрицата A има ранг 1, точно когато A може да се представи като $A = BC$, където $B \neq 0$ е матрица с един стълб, а $C \neq 0$ е матрица с един ред.*

Решение.

ИМЕ: ____________________ ГРУПА: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 5. *С метода на най-малките квадрати да се намери най-добрата линейна апроксимация $y = ax + b$ към следните измервания:*

$$y = 1 \text{ за } x = 1, \quad y = 1 \text{ за } x = 2, \quad y = 3 \text{ за } x = 3, \quad y = 3 \text{ за } x = 4.$$

Решение.

Име: ____________________ Група: ______ Ф.Н.: ___________

Задача 6. *Да се пресметне детерминантата*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & \cdots & -6 & -6 \\ 1 & -6 & 1 & \cdots & -6 & -6 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & -6 & -6 & \cdots & 1 & -6 \\ 1 & -6 & -6 & \cdots & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Име: ______________________ Група: ______ Ф.Н.: ___________

Задача 7. *Нека линейният оператор* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *има матрица* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *спрямо стандартния базис на* $\mathbb{R}^3$.

[2 точки] *а) Да се намерят собствените стойности на* f;

[3 точки] *б) Да се намери базис на* $\mathbb{R}^3$, *спрямо който матрицата* D *на* f *е диагонална, както и тази матрица* D.

Решение.

Име: ______________________________ Група: ______ Ф.Н.: ____________

Задача 8. *Нека V е линейно пространство и нека $f : V \to V$ е линеен оператор, такъв че всеки ненулев вектор $\boldsymbol{u} \in V$ е собствен вектор на f. Да се докаже, че съществува число λ, такова че $f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$ за всеки вектор $\boldsymbol{u} \in V$.*

Решение.