

## ПИСМЕН ИЗПИТ ПО "АЛГЕБРА I"

СПЕЦ. "СОФТУЕРНО ИНЖЕНЕРСТВО"  
22.01.2008, ВАРИАНТ 3

ИМЕ: \_\_\_\_\_ ГРУПА: \_\_\_\_\_ Ф.Н.: \_\_\_\_\_

### Указания:

1. Попълнете Вашите лични данни на заглавната страница на изпита и в началото на всяка от останалите 8 страници.
2. Изпитът се състои от 8 задачи. Всяка напълно решена задача се оценява с 5 точки.
3. Само обосновани решения на задачите ще бъдат оценявани с пълен брой точки.
4. Записвайте решението на всяка задача *непосредствено* след нейния текст. За чернова можете да използвате обратната част на листата. Ако се нуждаете от допълнителни листа, трябва да се обърнете към преподавателите, които провеждат изпита.
5. Използването на калкулатор и помощни материали, различни от химикалка и/или молив, *не е разрешено*.
6. Желаем Ви успешна работа!

ЗАДАЧА	Точки
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
ОБЩ БРОЙ ТОЧКИ:	

ИМЕ: \_\_\_\_\_ ГРУПА: \_\_\_\_\_ Ф.Н.: \_\_\_\_\_

**Задача 1.** Да се намерят всички стойности на  $a$  и  $b$ , за които линейната система

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= b \\x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 3 \\3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

има безброй решения.

**Решение.**

ИМЕ: \_\_\_\_\_ ГРУПА: \_\_\_\_\_ Ф.Н.: \_\_\_\_\_

**Задача 2.** Нека

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Намерете размерностите и базиси на линейните пространства  $R(A^t)$ ,  $R(A)$ ,  $N(A)$  и  $N(A^t)$ .

**Решение.**

ИМЕ: \_\_\_\_\_ ГРУПА: \_\_\_\_\_ Ф.Н.: \_\_\_\_\_

**Задача 3.** Да се намери рангът на матрицата  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 \\ \lambda & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  в зависимост от стойностите на параметъра  $\lambda$ .

**Решение.**

ИМЕ: \_\_\_\_\_ ГРУПА: \_\_\_\_\_ Ф.Н.: \_\_\_\_\_

**Задача 4.** Да се докаже, че матрицата  $A$  има ранг 1, точно когато  $A$  може да се представи като  $A = BC$ , където  $B \neq 0$  е матрица с един сълб, а  $C \neq 0$  е матрица с един ред.

**Решение.**

ИМЕ: \_\_\_\_\_ ГРУПА: \_\_\_\_\_ Ф.Н.: \_\_\_\_\_

**Задача 5.** С метода на най-малките квадрати да се намери най-добрата линейна апроксимация  $y = ax + b$  към следните измервания:

$$y = 2 \text{ за } x = 0, \quad y = 2 \text{ за } x = 1, \quad y = 1 \text{ за } x = 2, \quad y = 1 \text{ за } x = 3.$$

**Решение.**

ИМЕ: \_\_\_\_\_ ГРУПА: \_\_\_\_\_ Ф.Н.: \_\_\_\_\_

**Задача 6.** Да се пресметне детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & \cdots & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & \cdots & -3 & -3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -3 & -3 & \cdots & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 & \cdots & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Решение.**

ИМЕ: \_\_\_\_\_ ГРУПА: \_\_\_\_\_ Ф.Н.: \_\_\_\_\_

**Задача 7.** Нека линейният оператор  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  има матрица  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  спрямо стандартния базис на  $\mathbb{R}^3$ .

[2 точки] а) Да се намерят собствените стойности на  $f$ ;

[3 точки] б) Да се намери базис на  $\mathbb{R}^3$ , спрямо който матрицата  $D$  на  $f$  е диагонална, както и тази матрица  $D$ .

**Решение.**



ИМЕ: \_\_\_\_\_ ГРУПА: \_\_\_\_\_ Ф.Н.: \_\_\_\_\_

**Задача 8.** Нека  $V$  е линейно пространство и нека  $f : V \rightarrow V$  е линеен оператор, такъв че всеки ненулев вектор  $\mathbf{u} \in V$  е собствен вектор на  $f$ . Да се докаже, че съществува число  $\lambda$ , такава че  $f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$  за всеки вектор  $\mathbf{u} \in V$ .

**Решение.**