ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
спец. Математика
07.02.2006 г.

Задача 1. а) Пресметнете детерминантата от n-ти ред:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

б) Да се реши матричното уравнение $AX = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. В тримерното евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с ортонормиран базис e_1, e_2, e_3 е зададен линеен оператор φ, действащ по правилото

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= -e_3, \\ \varphi(e_2) &= -e_2, \\ \varphi(e_3) &= -e_1. \end{aligned}$$

а) Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на φ е диагонална.

б) Да се докаже, че $\varphi^3 + \varphi^2 - \varphi = \varepsilon$.

Задача 3. Нека $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, -1)$, $b = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ и $U = l(a_1, a_2)$, $V = l(b)$. В стандартния базис e_1, e_2, e_3 на $\mathbb{R}^3$ да се напише матрицата на такъв линеен оператор φ, за който $\operatorname{Ker} \varphi = U$ и $\operatorname{Im} \varphi = V$.

Задача 4. Нека φ и ψ са симетрични оператори, действащи в крайномерно евклидово пространство V, които комутират ($\varphi\psi = \psi\varphi$). Да се докаже, че съществува такъв ортонормиран базис на V, в който матриците на φ и ψ са диагонални.