ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
специалност Математика
28.01.2004

Задача 1. Да се намерят всички квадратни матрици от втори ред X, удовлетворяващи равенството $AX = B$, където:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 2. В зависимост от стойностите на параметъра λ, да се намери рангът на системата вектори:

а) $a_1 = (1,0,1,1), \quad a_2 = (1,1,1,0), \quad a_3 = (2,1,\lambda,1)$;

б)
$$\begin{array}{rl} a_1 & = (\,0,\ 1,\ 1,\ \dots,\ 1,\ 1\,), \\ a_2 & = (\,1,\ 0,\ \lambda,\ \dots,\ \lambda,\ \lambda\,), \\ a_3 & = (\,1,\ \lambda,\ 0,\ \dots,\ \lambda,\ \lambda\,), \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n-1} & = (\,1,\ \lambda,\ \lambda,\ \dots,\ 0,\ \lambda\,), \\ a_n & = (\,1,\ \lambda,\ \lambda,\ \dots,\ \lambda,\ 0\,). \end{array}$$

Задача 3. Нека U е подпространството на линейното пространство $\mathbb{R}^4$, състоящо се от решенията на хомогенната система

$$\left| \begin{array}{lll} x_1 & & = 0 \\ & x_3 & = 0 \end{array} \right. ,$$

а $W = l(a_1, a_2, a_3)$, където $a_1 = (0,1,0,1)$, $a_2 = (1,0,1,0)$, $a_3 = (1,1,1,1)$.

а) Да се намерят базиси на U, W и $U + W$;

б) Да се намери линеен оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, такъв че $\operatorname{Ker} \varphi = U$, $\operatorname{Im} \varphi = W$ (т.е да се напише матрицата на φ в стандартния базис на $\mathbb{R}^4$).

Задача 4. а) Нека e_1, e_2, e_3 е стандартният базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ и $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е линеен оператор действащ по правилото

$$\varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3) = (-\xi_2 - \xi_3)e_1 + (-\xi_1 - \xi_3)e_2 + (\xi_1 - \xi_2)e_3 \,.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D.

б) Да се докаже, че ако φ е симетричен оператор, действащ в крайномерното евклидово пространство V, то $V = \operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi$.