Примерни въпроси за първи тест — задачи

Въпрос 1. Колко е модулът и аргументът на числата $\sqrt{3}+i$ и $1-i$.

Въпрос 2. Пресметнете комплексното число $\dfrac{(1+3i)(2-i)}{3+4i}$.

Въпрос 3. Нека $z = 1+\sqrt{3}\,i$ и $w = 1-i$. Пресметнете w^{101} и стойностите на $\{\sqrt[8]{z}\}$ в $\mathbb{C}$.

Въпрос 4. Пресметнете детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & \dots & n-4 & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 5 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Въпрос 5. Изберете вярното развитие на детерминантата $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ по втория ѝ ред:

а) $4(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; в) $-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; в) нито едно от предните.

Въпрос 6. Изберете верния отговор за стойността на следната детерминанта на Вандермонд $W(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$:

а) $(b-a)(c-a)(c-b)$; б) $(a-b)(a-c)(b-c)$; в) нито едно от предните.

Въпрос 7. Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & i^2 & (-i)^2 \\ 1 & -1 & i^3 & (-i)^3 \end{vmatrix}$.

Въпрос 8. Умножете следните матрици:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

Въпрос 9. Ако $f(x) = x^2 - 3x + 2$ и $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, пресметнете $f(A)$.

Въпрос 10. Намерете общото решение на системата $\left| \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + \ \ x_4 &= 1 \\ x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned} \right.$.

Въпрос 11. Намерете фундаментална система решения на системата $\left| \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned} \right.$.

Въпрос 12. Колко е рангът на матриците:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Въпрос 13. Линейно зависими или линейно независими са векторите:

а) $a_1 = (0,0,0)$ и $a_2 = (1,2,3)$; б) $a_1 = (1,2,3)$ и $a_2 = (2,4,6)$; в) $a_1 = (1,2,3)$ и $a_2 = (0,1,5)$.

Въпрос 14. Кои от следните системи вектори са базис на 3-мерното пространство:

а) $\left| \begin{array}{c} e_1 = (1,2,3) \\ e_2 = (2,4,6) \\ e_3 = (3,6,10) \end{array} \right.$; б) $\left| \begin{array}{l} e_1 = (0,0,0) \\ e_2 = (1,2,3) \\ e_3 = (0,1,0) \end{array} \right.$; в) $\left| \begin{array}{l} e_1 = (1,2,3) \\ e_2 = (0,2,5) \\ e_3 = (0,0,1) \end{array} \right.$.

Въпрос 15. Нека e_1, e_2, e_3 е базис на 3-мерно линейно пространство и $\left| \begin{array}{lrrr} b_1 = & e_1 + & 2e_2 + & 3e_3 \\ b_2 = & & 4e_2 + & 5e_3 \\ b_3 = & & & 6e_3 \end{array} \right.$. Напишете матрицата на прехода от базиса e_1, e_2, e_3 към b_1, b_2, b_3 и запишете координатите на вектора $x = b_1 - b_2 + 2b_3$ в базиса e_1, e_2, e_3.

Въпрос 16. Една матрица е обратима,ако:

а) е неособена; б) е особена.

Въпрос 17. Ако $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$, то A^{-1} е:

а) $-\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$.

Въпрос 18. Ортогонализирайте по метода на Грам-Шмид векторите $a = (1,2,3)$ и $b = (3,4,1)$.

Въпрос 19. Нека $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са вектори, ъгълът между които е 60° и $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$. Ако $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$ намерете:

а) скаларното произведение $(\vec{a}, \vec{b})$; б) дължината на вектора $\vec{a}$.

Въпрос 20. Дадени са точките $M_1(1,1,-1)$, $M_2(-1,3,2)$, $M_3(2,-1,0)$ и $M_4(0,1,-2)$. Намерете:

а) координатите на точката A, която е среда на M_3M_4;
б) скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$;
в) дължината на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
г) ъгълът между векторите $\overrightarrow{{}_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$;
д) векторното произведение $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}$;
е) лицето на триъгълника $\triangle M_1M_2M_4$;
ж) смесеното произведение $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4})$;
з) обема на тетраедъра $M_1M_2M_3M_4$.