ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ВИСША АЛГЕБРА

специалност Приложна Математика

Вариант 1, 28 юни 2011г.

Име:
Факултетен №

Задача 1. (1.5 точки) Да се докаже, че:
(а) множеството

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & p & q \\ 0 & r & s \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \;\middle|\; r \in \mathbb{Q}^*, \quad p, q, s \in \mathbb{Q} \right\}$$

е група относно обичайното умножение на матрици;
(б) подмножеството

$$N = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & p & q \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \;\middle|\; p, q, s \in \mathbb{Q} \right\}$$

е нормална подгрупа на G с фактор-група $G/N \simeq (\mathbb{Q}^*, .)$;
(в) изображението

$$\psi : G \longrightarrow \mathrm{im}\psi,$$

$$\psi(A) = M^{-1}AM \quad \text{за} \quad \forall A \in G$$

и произволна обратима матрица $M \in GL_3(\mathbb{Q})$ е изоморфизъм на групи.

Задача 2. (0.5 точки) Нека $\mathbb{Z}_6$ и $\mathbb{Z}_2$ са пръстените от остатъци при деление с 6, съответно с 2. Да се докаже, че изображението

$$\varphi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2,$$

$$\varphi(a + 6\mathbb{Z}) = a + 2\mathbb{Z} \quad \text{за} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

е епиморфизъм на пръстени и да се намери ядрото $\ker\varphi$ на φ.

Задача 3. Да се намери стойността на симетричната рационална функция

$$\Sigma(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{1 - x_1} + \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{1 - x_2} + \frac{x_3^2 + x_3 - 1}{1 - x_3}$$

в корените x_1, x_2, x_3 на полинома

$$f(x) = x^3 + 4x - 4.$$

Задача 4. Да се докаже, че полиномът

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$$

е неразложим над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ВИСША АЛГЕБРА

специалност Приложна Математика

Вариант 2, 28 юни 2011г.

Име:
Факултетен №

Задача 1. (1.5 точки) Да се докаже, че:
(а) множеството

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} p & q & r \\ 0 & p & s \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \;\middle|\; p \in \mathbb{Q}^*, \quad q, r, s \in \mathbb{Q} \right\}$$

е група относно обичайното умножение на матрици;
(б) подмножеството

$$N = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & q & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \;\middle|\; q, r, s \in \mathbb{Q} \right\}$$

е нормална подгрупа на G с фактор-група $G/N \simeq (\mathbb{Q}^*, .)$;
(в) изображението

$$\psi : G \longrightarrow \mathrm{im}\psi,$$

$$\psi(A) = M^{-1}AM \quad \text{за} \quad \forall A \in G$$

и произволна обратима матрица $M \in GL_3(\mathbb{Q})$ е изоморфизъм на групи.

Задача 2. (0.5 точки) Нека $\mathbb{Z}_{10}$ и $\mathbb{Z}_2$ са пръстените от остатъци при деление с 10, съответно с 2. Да се докаже, че изображението

$$\varphi : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_2,$$

$$\varphi(a + 10\mathbb{Z}) = a + 2\mathbb{Z} \quad \text{за} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

е епиморфизъм на пръстени и да се намери ядрото $\ker\varphi$ на φ.

Задача 3. Да се намери стойността на симетричната рационална функция

$$\Sigma(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \frac{x_1^2 - 5x_1 + 5}{1 - x_1} + \frac{x_2^2 - 5x_2 + 5}{1 - x_2} + \frac{x_3^2 - 5x_3 + 5}{1 - x_3}$$

в корените x_1, x_2, x_3 на полинома

$$f(x) = x^3 - 14x + 14.$$

Задача 4. Да се докаже, че полиномът

$$f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 3 \in \mathbb{Z}[x]$$

е неразложим над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ВИСША АЛГЕБРА

специалност Приложна Математика

Вариант 3, 28 юни 2011г.

Име:
Факултетен №

Задача 1. (1.5 точки) Да се докаже, че:
(а) множеството

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Q}^*, \quad p, q, r \in \mathbb{Q} \right\}$$

е група относно обичайното умножение на матрици;
(б) подмножеството

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; p, q, r \in \mathbb{Q} \right\}$$

е нормална подгрупа на G с фактор-група $G/N \simeq (\mathbb{Q}^*, .)$;
(в) изображението

$$\psi : G \longrightarrow \mathrm{im}\psi,$$

$$\psi(A) = M^{-1}AM \quad \text{за} \quad \forall A \in G$$

и произволна обратима матрица $M \in GL_3(\mathbb{Q})$ е изоморфизъм на групи.

Задача 2. (0.5 точки) Нека $\mathbb{Z}_6$ и $\mathbb{Z}_3$ са пръстените от остатъци при деление с 6, съответно с 3. Да се докаже, че изображението

$$\varphi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_3,$$

$$\varphi(a + 6\mathbb{Z}) = a + 3\mathbb{Z} \quad \text{за} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

е епиморфизъм на пръстени и да се намери ядрото $\ker \varphi$ на φ.

Задача 3. Да се намери стойността на симетричната рационална функция

$$\Sigma(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \frac{x_1^2 + 2x_1 - 4}{1 - x_1} + \frac{x_2^2 + 2x_2 - 4}{1 - x_2} + \frac{x_3^2 + 2x_3 - 4}{1 - x_3}$$

в корените x_1, x_2, x_3 на полинома

$$f(x) = x^3 - 13x + 13.$$

Задача 4. Да се докаже, че полиномът

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$$

е неразложим над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ВИСША АЛГЕБРА

специалност Приложна Математика

Вариант 4, 28 юни 2011г.

Име:
Факултетен №

Задача 1. (1.5 точки) Да се докаже, че:
(а) множеството

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \;\middle|\; p \in \mathbb{Q}^*, \quad q, r, s \in \mathbb{Q} \right\}$$

е група относно обичайното умножение на матрици;
(б) подмножеството

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & q & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; q, r, s \in \mathbb{Q} \right\}$$

е нормална подгрупа на G с фактор-група $G/N \simeq (\mathbb{Q}^*, .)$;
(в) изображението

$$\psi : G \longrightarrow \mathrm{im}\psi,$$

$$\psi(A) = M^{-1}AM \quad \text{за} \quad \forall A \in G$$

и произволна обратима матрица $M \in GL_3(\mathbb{Q})$ е изоморфизъм на групи.

Задача 2. (0.5 точки) Нека $\mathbb{Z}_{10}$ и $\mathbb{Z}_5$ са пръстените от остатъци при деление с 10, съответно с 5. Да се докаже, че изображението

$$\varphi : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_5,$$

$$\varphi(a + 10\mathbb{Z}) = a + 5\mathbb{Z} \quad \text{за} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

е епиморфизъм на пръстени и да се намери ядрото $\ker \varphi$ на φ.

Задача 3. Да се намери стойността на симетричната рационална функция

$$\Sigma(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \frac{x_1^2 - 3x_1 + 3}{1 - x_1} + \frac{x_2^2 - 3x_2 + 3}{1 - x_2} + \frac{x_3^2 - 3x_3 + 3}{1 - x_3}$$

в корените x_1, x_2, x_3 на полинома

$$f(x) = x^3 - 8x + 8.$$

Задача 4. Да се докаже, че полиномът

$$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \in \mathbb{Z}[x]$$

е неразложим над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа.