

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ВИСША АЛГЕБРА I
специалност Математика
04.07.2005

Задача 1. а) Да се намери най-големия общ делител на полиномите

$$f = x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{и} \quad g = x^2 + 3x + 2;$$

б) Да се намерят всички a и b , за които 1 е двукратен корен на полинома

$$f = ax^{n+1} + bx^n + 1;$$

в) Да се намери остатъкът при деление на полинома $f = x^n - 3^{n-1}x + 1$ с полинома $g = x^3 - 3x^2$.

Задача 2. Нека $n \in \mathbb{N}$, $A = \mathbb{Z}[x]$ и нека

$$I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : n \mid f(0)\}, \quad J = \{f \in \mathbb{Z}[x] : n \mid f(0) \text{ и } n \mid f(1)\}.$$

Да се докаже, че $I \triangleleft A$, $J \triangleleft A$ и $A/I \cong \mathbb{Z}_n$. Колко елемента има факторпръстенът A/J ?

Задача 3. Нека

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_{14}, a \text{ е обратим в } \mathbb{Z}_{14} \right\},$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}_{14} \right\}.$$

а) Да се докаже, че G е група относно операцията умножение на матрици, $H \triangleleft G$ и да се пресметнат редовете на G и H ;

б) Да се докаже, че $G/H \cong \mathbb{C}_6$.