# Цялозатворени пръстени. Цели разширения на пръстени.

## 5. Цяло затваряне. Целозатворени пръстени.

Дефиниция 5.1. Нека пръстенът $R$ е разширение на пръстена $S$. Множеството

$$\widetilde{S} = \{\alpha \in R : \alpha \text{ е цял над } S\}$$

се нарича *цяло затваряне на $S$* в $R$.

Забележка 5.1. Ясно е, че $S \subset \widetilde{S}$,

Пример 5.2. Цялото затваряне на пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$ в полето на комплексните числа $\mathbb{C}$ е пръстенът на целите алгебрични числа.

Пример 5.3. Цялото затваряне на пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$ в полето $\mathbb{Q}[i]$ е пръстенът на целите гаусови числа $\mathbb{Z}[i]$.

Теорема 5.4. *Нека пръстенът $R$ е разширение на пръстена $S$. Цялото затваряне $\widetilde{S}$ на $S$ в $R$ е подпръстен на $R$.*

Доказателство. Нека $\alpha, \beta \in \widetilde{S}$, т.е. $\alpha$ и $\beta$ са цели над $S$. Според Твърдение 4.7 всеки елемент на пръстена $S[\alpha, \beta]$ е цял над $S$. Тъй като $\alpha + \beta,\ \alpha\beta \in S[\alpha, \beta]$, то елементите $\alpha + \beta$ и $\alpha\beta$ също са цели над $S$. Следователно $\alpha + \beta, \alpha\beta \in \widetilde{S}$. □

Дефиниция 5.2. Нека пръстенът $R$ е разширение на пръстена $S$. Казваме, че $S$ е *цялозатворен* в $R$, когато $\widetilde{S} = S$.

Дефиниция 5.3. Казваме, че пръстенът $R$ е *цялозатворен*, когато $R$ е област и $R$ е цялозатворен в своето поле от частни.

Твърдение 5.5. *Всеки факториален пръстен е цялозатворен.*

Доказателство. Нека $R$ е факториален пръстен с поле от частни $K$. Тогава всеки елемент $\alpha \in K$ се представя като

$$\alpha = \frac{a}{b}, \qquad a, b \in R,$$

където $a$ и $b$ са взаимно прости елементи на $R$. Ако $\alpha$ е цял над $R$, то съществува моничен полином $f$ с коефициенти в $R$,

$$f = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n \in R[x],$$

такъв че $f(\alpha) = 0$. Тогава

$$\begin{aligned} a^n &= -(a_1 a^{n-1} b + \cdots + a_{n-1} a b^{n-1} + a_n b^n) \\ &= -b(a_1 a^{n-1} + \cdots + a_{n-1} a b^{n-2} + a_n b^{n-1}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

От (5.1) следва, че $b$ дели $a^n$. Тъй като $a^n$ и $b$ са взаимно прости, то $b$ е обратим елемент (единица) на $R$. Следователно $\alpha \in R$. □

Пример 5.6. Нека $U \neq \emptyset$ е свързано отворено подмножество на $\mathbb{C}$. Ще означаваме с $\mathcal{O}(U)$ пръстена на всички холоморфни функции в $U$. От свързаността на $U$ следва, че $\mathcal{O}(U)$ е област. Нека $K(U)$ е полето от частни на $\mathcal{O}(U)$. Ясно е, че $K(U)$ е подполе на полето $\mathcal{M}(U)$ на всички мероморфни фунции в $U$. От теоремата на Вайерщрас ([**1**], Теорема 15.11) следва, че $K(U)$ съвпада с $\mathcal{M}(U)$ ([**1**], Теорема 15.12).
Нека се убедим, че пръстенът $\mathcal{O}(U)$ не е факториален. Лесно се вижда, че неразложимите елементи в пръстена $\mathcal{O}(U)$ са холоморфните функции от вида $p(z) = u(z)(z - z_0)$, $z_0 \in U$, където $u(z)$ е обратима холоморфна функция в $U$. Нека $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ е безкрайно множество от комплексни числа, което няма точка на сгъстяване в $U$. Според теоремата на Вайерщрас, съществува холоморфна функция $0 \neq f(z) \in \mathcal{O}(U)$, такава че $f(z_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тъй като $f(z)$ не може да се представи като крайно произведение на неразложими елементи на $\mathcal{O}(U)$, то $\mathcal{O}(U)$ не е факториален пръстен.
Сега ще докажем, че пръстенът $\mathcal{O}(U)$ е цялозатворен. Нека $h \in \mathcal{M}(U)$ е мероморфна функция, такава че

$$h^n + a_1 h^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{5.2}$$

където $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}(U)$ са холоморфни фунции. Да предположим, че $h$ има полюс от ред $k > 0$ в точката $z_0 \in U$. Тогава редът на полюса на мероморфната функция $a_1 h^{n-1} + \cdots + a_n$ в точката $z_0$ е най-много $(n-1)k$. От тук следва, че мероморфната функция $h^n + a_1 h^{n-1} + \cdots + a_n$ има полюс от ред $nk$ в точката $z_0$, което очевидно противоречи на (5.2). Полученото противоречие показва, че $h$ няма полюси в $U$, т.е. $h \in \mathcal{O}(U)$.

Ще използуваме основната идея на Пример 5.6, за да дадем друго доказателство на Твърдение 5.5. Нека $K$ е полето от частни на факториалния пръстен $R$ и нека $p \in R$ е неразложим елемент. Тогава за всеки елемент $x \in K^*$ съществува представяне

$$x = \frac{a}{b} p^v, \quad a, b \in R \setminus \{0\},\ v \in \mathbb{Z}, \tag{5.3}$$

такова че $p$ не дели нито $a$, нито $b$. Нещо повече, ако

$$x = \frac{a'}{b'} p^{v'}, \quad a', b' \in R \setminus \{0\},\ v' \in \mathbb{Z}, \tag{5.4}$$

е друго такова представяне, то $v = v'$. Наистина, без ограничение на общността можем да предполагаме, че $v' \geq v$. Тогава от (5.3) и (5.4) получаваме

$$p^{v'-v} a' b = a b'. \tag{5.5}$$

Тъй като $p$ не дели нито $a$, нито $b'$, то от (5.5) следва, че $v = v'$. Това показва, че изображението $v_p : K^* \to \mathbb{Z}$, дефинирано с формулата $v_p(x) = v$, $x \in K^*$, е коректно определено. Ние ще разширим изображението $v_p$ до изображение от $K$ в $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, като положим $v_p(0) = \infty$. Не е трудно да се провери, че така дефинираното изображение $v_p : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ има следните свойства:

(i) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$;

(ii) $v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$;

(iii) $v_p(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$;

(iv) $v_p(x) \geq 0$ за всеки $x \in R$.

В следващата лема са формулирани няколко следствия от (i) - (iv).

Лема 5.7. *Нека $R$ е факториален пръстен с поле от частни $K$ и нека $p$ е неразложим елемент в $R$. Тогава:*

*(i) $v_p(x^{-1}) = -v_p(x)$ за всеки $x \in K^*$; $v_p(u) = 0$ за всеки $u \in R^*$;*

*(ii) ако $x \in R$, то $p^v$ дели $x \Leftrightarrow v_p(x) \geq v$;*

*(iii) ако $x, y$ са елементи на $K$, такива че $v_p(x) \neq v_p(y)$, то*

$$v_p(x+y) = \min\{v_p(x), v_p(y)\};$$

Доказателство. (i) От $v_p(1 \cdot 1) = v_p(1) + v_p(1)$ следва, че $v_p(1) = 0$. Тъй като $v_p(x^{-1}x) = v_p(1) = 0$, то $v_p(x^{-1}) = -v_p(x)$. Нека $u \in R^*$. Тогава съществува $u' \in R^*$, такъв че $uu' = 1$. Тъй като $v_p(u) + v_p(u') = v_p(1) = 0$ и $v_p(u) \geq 0$, $v_p(u') \geq 0$, то $v_p(u) = 0$.

(ii) Ако $x \in R$ се дели на $p^v$, то $x = p^v a$ за някой $a \in R$. Следователно $v_p(x) = v_p(p^v) + v_p(a) \geq v$, защото $v_p(a) \geq 0$ за всеки $a \in R$. Обратно, нека $x \in R$ и $v_p(x) \geq v$. Да представим $x$ като $x = p^{v'}a$, където $a \in R$ и $p$ не дели $a$. Тогава $v' = v_p(x) \geq v$, откъдето следва, че $p^v$ дели $a$.

(iii) Можем да предполагаме без ограничение на общността, че $v_p(y) > v_p(x)$. Тогава

$$v_p(y) > v_p(x) = v_p(x+y-y) \geq \min\{v_p(x+y), v_p(-y)\} = \min\{v_p(x+y), v_p(y)\}.$$

Следователно $\min\{v_p(x+y), v_p(y)\} = v_p(x+y)$, откъдето $v_p(x) \geq v_p(x+y)$. Тъй като $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\} = v_p(x)$, то $v_p(x+y) = v_p(x)$. Окончателно $v_p(x+y) = v_p(x) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}$. □

Ако $R$ е факториален пръстен и $x \in R$, то $v_p(x) \geq 0$ за всеки неразложим елемент $p \in R$. Обратното твърдение също е вярно:

Лема 5.8. *Нека $R$ е факториален пръстен с поле от частни $K$. Ако за елемента $x \in K$ е вярно, че $v_p(x) \geq 0$ за всеки неразложим елемент $p \in R$, то $x \in R$.*

Доказателство. Нека $v_p(x) \geq 0$ за всеки неразложим елемент $p \in R$. Да представим $x$ като

$$x = \frac{a}{b}, \quad a \in R,\ b \in R \setminus \{0\}.$$

Нека $b = u\prod_{i=1}^{r} p_i$, $u \in R^*$ и $p_i$, $i = 1, \dots, r$, са неразложими елементи в $R$. Ще докажем, че $x \in R$, като използуваме индукция по броя $r$ на неразложимите делители на $b$. Ако $r = 0$, то $b$ е обратим в $R$ и $x \in R$. Нека $r \geq 1$. Да предположим, че твърдението е доказано за всички елементи

$$x' = \frac{a'}{b'}, \quad a' \in R,\ b' \in R \setminus \{0\},$$

такива че $b' = u'\prod_{i=1}^{s} p'_i$, $s < r$, $u' \in R^*$ и $p'_i$, $i = 1, \dots, s$, са неразложими елементи в $R$. От $v_{p_1}(b) > 0$ и $v_{p_1}(a) - v_{p_1}(b) = v_{p_1}(x) \geq 0$ следва, че $v_{p_1}(a) \geq 1$. Тогава съществува елемент $a' \in R$, такъв че $a = p_1 a'$. Нека $b' = u\prod_{i=2}^{r} p_i$. Сега $x = \dfrac{a'}{b'}$ и броят на неразложимите делители на $b'$ е $r-1$. Следователно $x \in R$ според индукционната хипотеза. □

*Второ доказателство на Твърдение 5.5.* Достатъчно е да докажем , че ако елементът $\alpha \in K$ е цял над $R$, то $v_p(\alpha) \geq 0$ за всеки неразложим елемент в $p \in R$ (виж Лема 5.8). Нека $a_1, \dots, a_n$ са елементи на $R$, такива че

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{5.6}$$

Да предположим, че $v_p(\alpha) = k < 0$ за някой неразложим елемент $p \in R$. Тъй като

$$v_p(a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n) \geq \min\{v_p(a_1\alpha^{n-1}), \dots, v_p(a_n)\} \geq (n-1)k,$$

то $v_p(\alpha^n) = nk < v_p(a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n)$. Сега от Лема 5.7 (iii) следва, че

$$v_p(\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n) = \min\{v_p(\alpha^n), v_p(a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n)\} = nk,$$

което очевидно противоречи на (5.6). $\square$

## 6. Цели разширения на пръстени

Дефиниция. Казваме, че разширението $R$ на пръстена $S$ е *цяло разширение* на $S$, когато всеки елемент на $R$ е цял над $S$.

Забележка 6.1. Ако пръстенът $R$ е крайнопороден $S$-модул, то $R$ е цяло разширение на $S$ (виж Теорема 4.6). Пръстенът на целите алгебрични числа е цяло разширение на пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$, което не е крайнопороден $\mathbb{Z}$-модул.

Твърдение 6.2 (транзитивност). *Нека $T \subset S \subset R$ са разширения на пръстени. Разширението $T \subset R$ е цяло тогава и само тогава, когато разширенията $T \subset S$ и $S \subset R$ са цели.*

Доказателство. От дефиницията на цял елемент е ясно, че ако $\alpha \in R$ е цял над $T$, то $\alpha$ е цял и над $S$. От тук следва, че ако $T \subset R$ е цяло разширение, то разширенията $T \subset S$ и $S \subset R$ също са цели.
Обратно, да предположим, че $T \subset S$ и $S \subset R$ са цели разширения. Нека $\alpha \in R$ и нека $f = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in S[X]$ е моничен полином, такъв че $f(\alpha) = 0$. Да забележим, че пръстенът $S_0 = T[a_1, \ldots, a_n]$ е крайнопороден $T$-модул, защото елементите $a_1, \ldots, a_n \in S$ са цели над $T$. Освен това, тъй като $f \in S_0[X]$, елементът $\alpha$ е цял над $S_0$ и затова пръстенът $S_0[\alpha]$ е крайнопороден $S_0$-модул. Сега Лема 6.2 влече, че $S_0[\alpha]$ е крайнопороден $T$-модул, откъдето следва, че $\alpha$ е цял над $T$. $\square$

Твърдение 6.3. *Ако областта $R$ е цяло разширение на пръстена $S$, то $R$ е поле тогава и само тогава, когато $S$ е поле.*

Доказателство. Да припомним, че един линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно векторно пространство $V$ е сюрективен, тогава и само тогава, когато е инжективен (по друг начин: $\operatorname{im}\varphi = V \Leftrightarrow \ker\varphi = \{0\}$).
Ако $S$ е поле и $0 \neq \alpha \in R$, то пръстенът $R_0 = S[\alpha]$ е крайномерно векторно пространство над $S$. Нека $\varphi_\alpha : R_0 \to R_0$ е изображението, определено с формулата $\varphi_\alpha(r) = \alpha r$, $r \in R_0$. Тогава $\varphi_\alpha$ е линеен оператор, който е инжективен, защото $R_0$ е област. Според горната забележка съществува елемент $\beta \in R_0$, такъв че $\varphi_\alpha(\beta) = 1$, т.е. $\alpha\beta = 1$. Следователно всеки елемент $0 \neq \alpha \in R$ има обратен и $R$ е поле.
Обратно, нека $R$ е поле и нека $0 \neq s \in S$. Тъй като $s$ е обратим в $R$, то съществува елемент $s^{-1} \in R$, такъв че $s^{-1}s = 1$. Тъй като $s^{-1}$ е цял над $S$, то съществува моничен полином $f = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in S[X]$, такъв че $f(s^{-1}) = 0$, т.е.

$$s^{-n} + a_1 s^{-n+1} + \cdots + a_n = 0, \qquad a_1, \ldots, a_n \in S. \tag{6.1}$$

Умножавайки (6.1) по $s^{n-1}$, получаваме

$$s^{-1} = -(a_1 + \cdots + a_n s^{n-1}), \qquad a_1, \ldots, a_n \in S,$$

откъдето следва, че $s^{-1} \in S$. $\square$

Пример 6.4. Пръстенът $\mathbb{Q}[X]/(X^2)$ е цяло разширение на $\mathbb{Q}$, което не е поле.

Забележка 6.5. От Твърдение 6.3 следва, че пръстените от цели алгебрични числа не са полета. Наистина, всеки пръстен от цели алгебрични числа $R$ е цяло разширение на пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$. Тъй като $\mathbb{Z}$ не е поле, то и $R$ не е поле.

Следващата лема е едно просто, но полезно наблюдение.

Лема 6.6. *Нека пръстенът $R$ е цяло разширение на пръстена $S$ и нека $\varphi : R \to \overline{R}$ е сюрективен хомоморфизъм на пръстени. Да означим с $\overline{S}$ подпръстена $\varphi(S) \subset \overline{R}$. Тогава пръстенът $\overline{R}$ е цяло разширение на пръстена $\overline{S}$.*

Доказателство. Нека $\overline{\alpha} \in \overline{R}$ и нека $\alpha$ е елемент на $R$, такъв че $\overline{\alpha} = \varphi(\alpha)$. Съществува моничен полином $f = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in S[X]$, такъв че $f(\alpha) = 0$. Нека $\overline{f} = X^n + \varphi(a_1)X^{n-1} + \cdots + \varphi(a_n) \in \overline{S}[X]$. Да проверим, че $\overline{f}(\overline{\alpha}) = 0$:

$$\begin{aligned}\overline{f}(\overline{\alpha}) &= \overline{\alpha}^n + \varphi(a_1)\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \varphi(a_n)\\ &= \varphi(\alpha)^n + \varphi(a_1)\varphi(\alpha)^{n-1} + \cdots + \varphi(a_n)\\ &= \varphi(\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n) = \varphi(f(\alpha)) = 0.\end{aligned}$$

Следователно всеки елемент $\overline{\alpha} \in \overline{R}$ е цял над $\overline{S}$. □

Нека пръстенът $R$ е цяло разширение на пръстена $S$, $I$ е идеал в $R$ и $J = I \cap A$. Да означим с $i : R \to R/I$ естественият хомоморфизъм от $R$ във факторпръстена $R/I$. Според теоремата за хомоморфизмите на пръстени, пръстенът $i(S)$ е естествено изоморфен на факторпръстена $S/J$. Използувайки този изоморфизъм, ние ще отъждествяваме $S/J$ с $i(S)$, и ще разглеждаме факторпръстена $S/J$ като подпръстен на факторпръстена $R/I$.

Лема 6.7. *Нека пръстенът $R$ е цяло разширение на пръстена $S$, $I$ е идеал в $R$ и $J = I \cap A$. Тогава фактор-пръстенът $R/I$ е цяло разширение на фактор-пръстена $S/J$.*

Доказателство. Твърдението следва от Лема 6.6, защото $i : R \to R/I$ е сюрективен хомоморфизъм на пръстени. □

Забележка 6.8. Не е трудно да се види, че Лема 6.6 и Лема 6.7 са еквивалентни.

Твърдение 6.9. *Ако пръстенът $R$ е цяло разширение на пръстена $S$ и $\mathfrak{P}$ е прост идеал в $R$, то $\mathfrak{P}$ е максимален идеал в $R$ тогава и само тогава, когато $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap S$ е максимален идеал в $S$.*

Доказателство. От Лема 6.7 следва, че $R/\mathfrak{P}$ е цяло разширение на $S/\mathfrak{p}$. Следователно $R/\mathfrak{P}$ е поле тогава и само тогава, когато $S/\mathfrak{p}$ е поле (Твърдение 6.3). □

Твърдение 6.10. *Нека областта $R$ е цяло разширение на областта $S$ и нека $I$ е идеал в $R$. Ако $I \neq \{0\}$, то $I \cap S \neq \{0\}$.*

Доказателство. Нека $0 \neq \alpha \in I$. Тогава съществуват $s_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$, такива че $\alpha^n + \sum_{i=1}^n s_i\alpha^{n-i} = 0$. Тъй като $R$ е област, то можем да предполагаме, че $s_n \neq 0$. Нека $\beta = \alpha^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} s_i\alpha^{n-i} \in R$. Тогава $\beta\alpha = -s_n \neq 0$. Освен това $\beta\alpha \in I \cap S$, откъдето следва, че $I \cap S \neq \{0\}$. □

Пример 6.11. Нека $R = \mathbb{Q}[X]/(X^2)$, $x = X + (X^2) \in R$ и $I$ е главният идеал породен от $x$ в $R$. Тогава $R$ е цяло разширение на $\mathbb{Q}$, $I \neq \{0\}$, но $I \cap \mathbb{Q} = \{0\}$.

Твърдение 6.12. *Нека $R$ е пръстен от алгебрични числа и $\mathfrak{P}$ е прост идеал в $R$. Ако $\mathfrak{P} \neq \{0\}$, то $\mathfrak{P}$ е максимален идеал в $R$.*

Доказателство. Нека $\mathfrak{p} = \mathbb{Z} \cap \mathfrak{P}$. Тъй като $\mathfrak{P} \neq \{0\}$, то от Твърдение 6.10 следва, че $\mathfrak{p} \neq \{0\}$. Следователно $\mathfrak{p}$ е максимален идеал в $\mathbb{Z}$. Сега от Твърдение 6.9 следва, че $\mathfrak{P}$ е максимален идеал в $R$. □

## Приложение: Факториални пръстени

Нека $R$ е област. Ще означаваме с $R^*$ множеството на обратимите елементи в $R$:

$$R^* = \{x \in R : xy = 1 \text{ за някой } y \in R\}.$$

От определението е ясно, че $R^*$ е група относно умножението в $R$. Един елемент $0 \neq a \in R$ се нарича *разложим*, когато съществуват елементи $b, c \in R \backslash R^*$, такива че $a = bc$. Един елемент $0 \neq p \in R \setminus R^*$ се нарича *неразложим*, когато той не е разложим. Елементите $a, b \in R$ се наричат *асоциирани*, когато $a$ дели $b$ и $b$ дели $a$. Два елемента $a, b \in R$ са асоциирани тогава и само тогава, когато $a = bu$, за някой $u \in R^*$. Ако $p$ е неразложим елемент в $R$ и $q \in R$ е делител на $p$, то или $q \in R^*$ или $q$ е асоцииран с $p$.

Дефиниция. Казваме, че областта $R$ е *факториален* пръстен, когато са изпълнени следните условия:

(i) Всеки елемент $0 \neq a \in R$ има представяне

$$a = u \prod_{i=1}^{r} p_i,$$

където $u \in R^*$, а $p_i \in R$, $i = 1, \ldots, r$, са неразложими елементи в $R$;

(ii) ако

$$a = u \prod_{i=1}^{r} p_i = v \prod_{j=1}^{s} q_j$$

са две такива представяния, то $r = s$ и след подходяща пермутация на множителите елементът $p_i$ е асоцииран с елемента $q_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Твърдение 1. *Ако $R$ е факториален пръстен и $p$ е неразложим елемент в $R$, то главният идеал $(p)$ е прост.*

Доказателство. Трябва да докажем, че ако $a$ и $b$ са елементи на $R$, такива че $p$ дели произведенеието $ab$, то $p$ дели някой от множителите $a$ и $b$. Нека елементът $c \in R$ е такъв че $pc = ab$. Да разложим $a, b$ и $c$ на неразложими елементи:

$$a = u \prod_{i=1}^{r} p_i, \quad b = u' \prod_{j=1}^{r'} p'_j, \quad c = u'' \prod_{k=1}^{r''} p''_k.$$

Тогава

$$u''\, p \prod_{k=1}^{r''} p''_k = uu' \prod_{i=1}^{r} p_i \prod_{j=1}^{r'} p'_j. \tag{0.2}$$

От тъждество (0.2) следва, че $p$ е асоцииран с някой от неразложимите елементи в множеството $\{p_i\}_{i=1}^{r} \cup \{p'_{j'}\}_{j=1}^{r'}$. Следователно $p$ дели някой от множителите $a$ и $b$. $\square$

# Библиография

[1] У. Рудин, Реален и комплексен анализ, “Наука и Изкуство”, София 1984.