Симетрични полиноми

Определение:
Казваме,че полиномът $f(x_1, \dots, x_n)$ е симетричен, ако при всяко разместване на променливите той не се променя, т.е.

$$f(x_{i_1},\dots,x_{i_n}) = f(x_1,\dots,x_n)$$

за всяка пермутация $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ на числата от 1 до n.

Тъй-като всяко разместване на променливите може да се реализира на няколко етапа като на всеки етап се разменят само две променливи, за да проверим че един полином е симетричен достатъчно е да проверим че той не се променя когато разменим местата на кои да е две променливи.

Пример:
$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$
$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$

$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$

$\sigma_{n-1} = x_1x_2 \dots x_{n-1} + \dots + x_2x_3 \dots x_n$

$\sigma_n = x_1x_2 \dots x_n$

Полиномите $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ са симетрични, защото когато разместваме променливите редът на събираемите се променя, но сумата им остава същата. И се наричат елементарни симетрични полиноми на променливите $x_1, \dots, x_n$.

Ако $Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ е едночлен, тогава $f(x_1, \dots, x_n) = A\sigma_1^{\alpha_1}\dots\sigma_n^{\alpha_n}$ е симтричен полином на $x_1, \dots, x_n$, защото при произволно разместване на променливите $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ не се променят. Следователно не се променя $f(x_1, \dots, x_n)$.
По общо ако $g(x_1, \dots, x_n)$ е произволен полином, тогава $g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ е симетричен полином на $x_1, \dots, x_n$, защото от всеки едночлен на g се получава симетричен полном на $x_1, \dots, x_n$, а сумата на симетрични полиноми е също симетричен полином.

Ще са ни необходими следните две леми.

Лема 1:
Нека $Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ е едночлен, $A \neq 0$. Тогава

Гл.едночлен на ($A\sigma_1^{\alpha_1}\dots\sigma_n^{\alpha_n}$) = $Ax_1^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}x_2^{\alpha_2+\dots+\alpha_n}\dots\dots\dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}x_n^{\alpha_n}$

Д-во:
Имаме

гл. едночлен $(\sigma_1) = x_1 \Rightarrow$гл. едночлен ($\sigma_1^{\alpha_1}$) $= x_1^{\alpha_1}$.

гл. едночлен $(\sigma_2) = x_1x_2 \Rightarrow$ гл. едночлен ($\sigma_2^{\alpha_2}$) = ($(x_1x_2)^{\alpha_2}$)

……………………………………………………………………

гл. едночлен $(\sigma_n) = x_1x_2 \dots x_n \Rightarrow$гл. едночлен ($\sigma_n^{\alpha_n}$) = $(x_1x_2\dots\dots x_n)^{\alpha_n}$

Следователно

гл едн. ($A\sigma_1^{\alpha_1}...\sigma_n^{\alpha_n}$) = $A\,x_1^{\alpha_1}\ (x_1x_2)^{\alpha_2}\ ....(x_1x_2.....x_n)^{\alpha_n} = Ax_1^{\alpha_1+...+\alpha_n}x_2^{\alpha_2+...+\alpha_n}........x_{n-1}^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}x_n^{\alpha_n}$

Лема 2:

Нека $f(x_1, \dots, x_n)$ е симетричен полином, който е ненулев и гл едночлен (f) = $Ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$. Тогава $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$.

Д-во:

Нека $f(x_1,...x_n) = Ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n} + ...$

В $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ разместваме x_1 и x_2 и получаваме

$$f(x_2, x_1,...x_n) = Ax_2^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n} + ...$$

следователно $Ax_2^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$ е еночлен на $f(x_2,x_1, \dots, x_n)$.

Понеже f е симетричен $f(x_2, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Следователно $Ax_2^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$ е едочлен на $f(x_1, \dots, x_n)$. Този едночлен не може да е по-голям от главния едночлен $Ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$. Поради това $\alpha_2 \geq \alpha_1$.

Разместваме променливите x_2 и x_3 и получаваме

$$f(x_1,...x_n) = Ax_1^{\alpha_1}x_3^{\alpha_2}x_2^{\alpha_3}...x_n^{\alpha_n} + ...$$

Следователно $Ax_1^{\alpha_1}x_3^{\alpha_2}x_2^{\alpha_3}...x_n^{\alpha_n}$ е еночлен на $f(x_1, x_3, x_2, \dots, x_n)$.

Понеже f е симетричен, то $f(x_1, x_3, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

Следователно $Ax_1^{\alpha_1}x_3^{\alpha_2}x_2^{\alpha_3}...x_n^{\alpha_n}$ е едочлен на $f(x_1, \dots, x_n)$. Този едночлен не може да е по-голям от главния едночлен $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$. Следователно $\alpha_2 \geq \alpha_3$ и т.н.

Основният резултат за симетрични полиноми ни дава следната:

Теорема:

Нека F е поле. Тогава за всеки симетричен полином $f(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n]$ съществува полином $g(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n]$ такъв, че $f(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Д-во:

Ако $f(x_1, \dots, x_n)$ е нулевият полином, тогава твърдението е очевидно. Нека $f(x_1, \dots, x_n)$ е ненулев и

$$f(x_1, \dots, x_n) = Ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n} + \dots, A \neq 0$$

Където $Ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ е главният едночлен на f. Разглеждаме

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = A\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}...\sigma_n^{\alpha_n}.$$

От Лема2 следва, че φ_1 е едночлен на $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Поради това φ_1 е симетричен полином на $x_1,...,x_n$.

Съгласно Лема1

$$\text{гл. едночлен } (\varphi_1) = \text{гл. едночлен } (f). \qquad (*)$$

Разглеждаме полинома $f_1 = f - \varphi_1$. Ако f_1 е нулев полином, тогава $f = \varphi_1$ и теоремата е доказана. Ако f_1 е ненулев полином от (*) следва, че

гл. едночлен (f_1) < гл. едночлен (f).

Полиномът f_1 като разлика на два симетрични полинома също е симетричен полином. Нека

$$f(x_1, \ldots, x_n) = Bx_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} + \ldots$$

където $Bx_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$ е главен едночлен на f. Разглеждаме

$$\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = B\sigma_1^{\beta_1-\beta_2}\sigma_2^{\beta_2-\beta_3} \ldots\ldots \sigma_n^{\beta_n}.$$

Съгласно Лема2, φ_2 е едночлен на $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Следователно φ_2 е симетричен полином на $x_1,\ldots,x_n$.

От Лема1 следва, че

гл. едночлен (φ_2) = гл. едночлен (f_1) (**)

Разглеждаме $f_2 = f_1 - \varphi_2$. Ако f_2 е ненулев полином той ще е симетричен и от (**) става ясно, че главния едночлен на f_2 е по-малък от главния едночлен f_1. За f_2 правим същите разсъждения както за f_1 и т.н.т. По този начин получаваме следната редица от полиноми:

$$f_0 = f,\ f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots, f_n, \ldots \qquad (\#)$$

със следните свойства:

1) всеки от тези полиноми е симетричен
2) гл. едночлен(f_i) < гл. едночлен (f_{i-1})
3) $f_i = f_{i-1} - \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, където $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ е едночлен на $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, който се определя от главения едночлен на f_{i-1}. По-точно, ако $Cx_1^{\gamma 1} \ldots x_n^{\gamma n}$ е главният едночлен на f_{i-1} тогава

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = C\sigma_1^{\gamma_1-\gamma_2}\sigma_2^{\gamma_2-\gamma_3} \ldots\ldots \sigma_n^{\gamma_n}.$$

за тези полиноми имаме:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = f - \varphi_1 \\ f_2 = f_1 - \varphi_2 \\ \vdots \\ f_n = f_{n-1} - \varphi_n \end{array}\right\} \Rightarrow f = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n + f_n$$

От последното равенство става ясно,че ако някой полином f_k от (#) е нулев,тогава $f = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k$ Понеже φ_i са едночлени на $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ с коефициенти от полето F ➔ f е полином на $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ с коефициенти от полето F и теоремата ще бъде доказана.

Да допуснем противното,т.е. че в (#) няма нулев полином.
От (2) следва, че главните едночлени на тези полиноми не са подобни.
Нека $Cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2} \ldots\ldots x_n^{\gamma_n}$ е главен едночлен на някой полином от (#).
Тогава съгласно (2), $Cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2} \ldots\ldots x_n^{\gamma_n}$ е по-малък от $Ax_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ (гл. едночлен(f)). Поради това $\gamma_1 \le \alpha_1$.
Понеже $Cx_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2} \ldots\ldots x_n^{\gamma_n}$ е главен едночлен на симетричен полином, съгласно Лема1 , $\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \ldots \ge \gamma_n$
И така

$$\alpha_1 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_n \qquad (\#\#)$$

Образуват наредени n-орки цели неотрицателни числа, всяко от които принадлежи на интервала $[0, \alpha_1]$. Но от целите неотрицателни числа в този интервал можем да образуваме само краен брой различни наредени n-орки.Оттук правим извода,че съществуват два главни едночлена,които са подобни.
Това е противоречие и с него теоремата е доказана.□

Следствие:
Нека F *е поле,* $f(x) \in F[x]$, ст.$f(x) \geq 1$. *Нека полето* E *е разширение на на* F*,такова,че над* E $f(x)$ *се разлага на линейни множители над* E *т.е.*

$$f(x) = A(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n), \text{ където } \alpha_1\ldots\alpha_n \in E.$$

Тогава ако $\varphi(x_1\ldots x_n)$ *е симетричен полином от* $F[x_1\ldots x_n]$ *е вярно, че* $\varphi(\alpha_1\ldots\alpha_n) \in F$.

Д-во:
Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx_n$, $a_n \neq 0$
Съгласно теоремата за $\varphi(x_1\ldots x_n)$,съществува $\psi(x_1\ldots x_n) \in F[x_1\ldots x_n]$,такъв, че $\varphi(x_1\ldots x_n) = \psi(\sigma_1\ldots\sigma_n)$.
Тогава $\varphi(\alpha_1\ldots\alpha_n) = \psi(\alpha_1+\ldots+\alpha_n, \ldots, \alpha_1\ldots\alpha_n)$.
От полученото равенство и формулите на Виет става ясно,че $\varphi(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ се получава като в $\psi(x_1\ldots x_n)$ заместим

$x_1 = - a_{n-1}/a_n$,
$x_2 = - a_{n-2} / a_n$,
……………………..,
$x_n = (-1)^n a_0 / a_n$.

Понеже $- a_{n-1}/a_n$, $- a_{n-2} / a_n$,......., $(-1)^n a_0 / a_n \in F$ и коефициентите на $\psi(x_1\ldots x_n)$ са от полето F следва, че $\varphi(\alpha_1\ldots\alpha_n) \in F$□

Пример:
$f(x) \in \mathbb{R}[x]$
$f(x) = A(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n)$
$\alpha_1\ldots\alpha_n \in E$, което е разширение на F.
$\varphi(x_1\ldots x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$, k е цяло положително число
$\varphi(\alpha_1\ldots\alpha_n) = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_n^k \in \mathbf{R}$,
ако $f(x) \in \mathbf{Q}[x] \Rightarrow \alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_n^k \in \mathbf{Q}$.

Дискриминанта на полином

Нека F е поле и $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx_n \in F[x]$, $a_n \neq 0$. Нека полето E е разширение на полето F и над E $f(x)$ се разлага на линейни множители

$$f(x) = A(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n) \text{ , ст.} f(x) \geq 2$$

Дискриминанта на $f(x)$ наричаме $D(f(x)) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$

Ако $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, да се провери ,че $D(f(x)) = b^2 - 4ac$

Да разгледаме полинома $h(x_1\ldots x_n) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_i - x_j)^2$

Тъй-като $h(x_1\ldots x_n)$ е симетричен полином, съгласно основното следствие имаме

$$D(f(x)) = h(\alpha_1\ldots\alpha_n) \in F \square$$

Очевидно са верни следните:

<u>Твърдение 1:</u>
Нека $f(x)$ е полином и ст.$f(x) \geq 2$. Тогава
$f(x)$ *има корен с кратност* $\geq 2 \iff D(f(x)) = 0$.

<u>Твърдение 2:</u>
Нека $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *и* ст.$f(x) \geq 2$.
Ако $D(f(x)) < 0$,*тогава* $f(x)$ *има нереален корен*.

<u>Задача 1:</u>
Нека $f(x)$ *е полином с реални коефициенти и* ст.$f(x) = 3$.
Корените на $f(x)$ *са реални* $\iff D(f(x)) \geq 0$.

<u>Задача 2:</u>
В $\mathbb{R}[x]$ *да се намери полином от четвърта степен,дискриминантата на който да е положителна и всичките му корени да не са реални.*