Евклидови пространства

Лема: Нека $A = (a_{ij})$ е квадратна матрица от n-ти ред. Тогава е вярно равенството:

$$(x_1 \ldots\ldots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} a_{ij} x_i x_j, \quad n^2 \text{ - събираеми}$$

Д-во:

$$\begin{aligned} \sum a_{ij} x_i x_j &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \ldots + a_{1n}x_1y_n + \\ &+ a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{2n}x_2y_n + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \ldots + a_{nn}x_ny_n = \\ &= x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n) + \ldots + x_n(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n) = \end{aligned}$$

$$(x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{pmatrix} = (x_1 \ldots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$$

Определение:
Нека L е линейно пространство над полето на реалните числа **R** и за всеки два елемента x и y є L е дефинирано реално число $(x,y) \in$ **R**. Казваме, че L е Евклидово пространство, ако са изпълнени следните условия:

1. $(x,y) = (y,x)$
2. $(x, y + z) = (x,y) + (x,z)$
3. $(\lambda x,y) = \lambda (x,y)$
4. $(x,x) \geq 0$ и $(x,x) = 0$ само, когато $x = 0$

Числото (x,y) се нарича скаларно произведение на x,y. Равенствата (1) – (4) се наричат аксиоми на скаларното произведение.

Примери:

1. Линейното пространство на геометричните вектори.
   $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$, $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$
   Ако единият от векторите е нулев,
   $(\vec{a},\vec{b}) = 0.$
2. В $V_n = \{(\alpha_1 \ldots \alpha_n) | \alpha_i \in R\}$
   $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
   $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$
   $(a,b) \overset{def}{=} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$ – стандартно скаларно произведение
3. C[a,b] – линейно пространство на непрекъснатите функций в [a,b]
   $f(x),g(x) \in C[a,b]$
   $(f(x),g(x)) = \int_a^b f(x).g(x)\, dx$

Непосредствени следствия от аксиомите:

1. $(0,x) = 0$, за всяко $x \in L$
   Д-во: в 3) полагаме $\lambda = 0$
2. Ако $(x,y) = 0$, за всяко y є L, тогава $x = 0$
   Д-во: полагаме $y = x \Rightarrow (x,x) = 0$, съгласно (4) $\Rightarrow x = 0$
3. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$
   Д-во: $(z,x+y) = (x+y,z) = (x,z)+(y,z) = (z,x)+(z,y)$
4. $(x, \lambda y) = \lambda (x,y)$
   Д-во: $(x, \lambda y) = (\lambda y,x) = \lambda(y,x) = \lambda(x,y)$

5. $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m$

$y = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$

Тогава $(x,y) = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}} \alpha_i \mu_i (a_i, b_i)$ (#) $\Rightarrow$ m.n събираеми

Д-во:

Чрез последователно прилагане на аксиомите (2) и (3) и следствия (3) и (4).

Пресмятане на скалорното произведение чрез Координатите в произволен базис

L – евклидово пространство; $e_1, \ldots, e_n$ е базис на L

$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$

$y = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$

От (#) $\Rightarrow (x,y) = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j)$

Полагаме $(e_i, e_j) = \tau_{ij}$. Нека $A = (\tau_{ij})$.

$\tau_{ij} = \tau_{ji} \Rightarrow A$ е симетрична матрица

Съгласно лемата: (# #) $(x,y) = (\alpha_1 \,.\,.\, \alpha_i) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ .\,. \\ \beta_n \end{pmatrix}$

Матрицата А се нарича матрица на скаларното произведение в базиса $e_1, \ldots, e_n$.

Kak се променя матрицата на скаларното произведение при смяна на базиса?

Понеже $(e_i,e_j) = (e_j,e_i) \rightarrow \tau_{ij} = \tau_{ji}$, за всеки i,j → А симетрична матрица(при транспониране не се променя).

Забележка: Ако А е произволна матрица и дефинираме (x,y) чрез равенството (# #), тогава (x,y) удовлетворява (2) и (3) аксиоми. Ако искаме А да бъде симетрична ще бъде изпълнена (1) аксиома. Не всяка симертична матрица, обаче задава чрез това равенство скаларното произведение. Тази симетрична матрица трябва да бъде такава, че да е изпълнена и четвъртата аксиома.

Определение:

Нека L е Евклидово пространство и $x \in L$.

Числото $\sqrt{(x,x)}$ се нарича дължина на x и се бележи с $|x|$, т.е. $\sqrt{(x,x)} = |x|$

Тъй като $(x,x) \ge 0$ дължината е дефинирана коректно.

Примери:

1. В V_n със стандартно скаларно произведение (E_n)

$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \Rightarrow (a,a) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \Leftrightarrow |a| = \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2)} = \sqrt{(a,a)}$

2. В C[a,b] $|f(x)| = \sqrt{\left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)}$

Основни свойства на дължината

Свойство 1: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Д-во:

$|x| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x,x)} = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Свойство 2: $|\lambda x| = |\lambda||x|$ за всяко $\lambda \in \mathbf{R}$

Д-во:

$(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 (x,x) = \lambda^2 |x|^2$

$|\lambda x|^2 = \lambda^2 |x|^2 \Rightarrow |\lambda x| = |\lambda||x|$

Ако x е ненулев вектор, тогава вектора $\frac{1}{|X|}$. x ще бележим с $\frac{x}{|X|}$.

Свойство 3: $\left| \frac{x}{|x|} \right| = 1, x \ne 0$

Д-во: $|x|$

В равенството $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$ полагаме $\lambda = 1/|x|$.

Ако $|x| = 1$, казваме че вектора x е нормиран.

Теорема (неравенство на Коши-Буняковски):

Нека L е евклидово пространство и $x,y \in L$. Тогава

(*) $$|(x,y)| \le |x||y|$$

Равенството се достига тогава и само тогава, когато x и y са линейно зависими.

Д-во:

1) Доказателство на неравенството (*)

   Ако $x = 0$ или $y = 0$ неравенството (*) е очевидно.

   Нека $x \ne 0$ и $y \ne 0$

   Разглеждаме $(x + ty, x + ty) \ge 0$ за всяко $t \in R$ (съгласно (4))

   $\Rightarrow (x,x) + 2(x,y)t + t^2(y,y) \ge 0$ за всяко $t \in R$

   $y \ne 0 \Rightarrow (y,y) \ne 0$. Следователно лявата част на неравенството е квадратен тричлен.

   Понеже този квадратен тричлен не приема отрицателни стойности за неговата дискриминанта D имаме :

   $D = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \le 0$

   откъдето

   $(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$

   $|(x,y)| \le |x||y|$ □

2) Случай на равенство:

   а)Нека x и y са линейно зависими. Тогава единият от тези вектори се получава от другия с умножаване с подходяща константа. Нека например $y = \lambda x$. Тогава

   $|(x,y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda (x,x)| = |\lambda|(x,x) = |\lambda||x|^2$

   $|x||y| = |x||\lambda x| = |x||\lambda||x| = |\lambda||x|^2$

   $\Rightarrow \ |(x,y)| = |x||y|$ □

   б)Нека $|(x,y)| = |x||y|$. Тогава очевидно векторите са линейно зависими. Нека $x \ne 0$ и $y \ne 0$. Тогава $(x,x) + 2(x,y)t + (y,y)t^2 = (x + ty, x + ty)$ е квадратен тричлен и $D = 0$

   $\Rightarrow$ този квадратен тричлен има реален корен $t_0 \in \mathbf{R}$. За този корен t_0 имаме $(x + t_0y, x + t_0y) = 0$

   От 4) $\Rightarrow x + t_0y = 0 \Rightarrow$ x и y са линейно зависими □

Примери:

1) В E_n (V_n със стандартно скаларно произведение)

   $a = (\alpha_1 \ldots.. \alpha_n)$

   $b = (\beta_1 \ldots. \beta_n)$

   $|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \ldots. + \alpha_n \beta_n| \le \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots. + \alpha_n^2)}\sqrt{(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots. + \beta_n^2)}$

2) В C[a,b] $\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \le \sqrt{\int_a^b f(x)^2dx} \,.\, \sqrt{\int_a^b g(x)^2dx}$

Неравенство на триъгълника:

$|x + y| \le |x| + |y|$

Д-во:

$|x + y|^2 = (x+y\ ,\ x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2 \le |x|^2 + 2|(x,y)| + |y|^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$

$\Rightarrow |(x+y)|^2 \le (|x| + |y|)^2 \Rightarrow\ |x + y| \le |x| + |y|$

Задача:*Да се докаже, че равенството в неравенството на триъгълника имаме тогава и само тогава, когато единият от векторите може да се получи от другия при умножаване с неотрицателна константа.*

Тъй като неавенството на триъгълника е вярно за всяко x, y като заместим y с y-x ще получим вярно неравенство.

$|y| \le |x| + |y - x| \Rightarrow |y - x| \ge |y| - |x|$ за всяко x,y