Пръстени. Основни понятия

Определение:
Нека К е непразно множество, в което са дефинирани следните две операции:
първата: на всеки два елемента a, b $\in$ К съпоставя елемент a + b $\in$ К, който се нарича сума на
a и b
втората: на всеки два елемента a, b $\in$ К съпоставя елемент a.b $\in$ К, който се нарича произведение на a и b.
Казваме,че относно тези операций К е пръстен, ако са изпълнени следните условия:

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ - *асоциативност на събирането*
(2) $a + b = b + a$ - *комутативност на събирането*
(3) съществува нулев елемент 0 Є К такъв, че a + 0 = a, за всяко a $\in$ К
(4) За всяко a $\in$ К съществува противоположен елемент –a $\in$ К такъв, че a + (-a) = 0
(5) $(a.b).c = a.(b.c)$ - *асоциативност на умножението*
(6) $(a + b).c = ac + bc$ - *дясна дистрибутивност на умножението*
(7) $c.(b + c) = ca + cb$ - *лява дистрибутивност на умножението*

Примери:
1) нулев пръстен – това е пръстен, който се състои от един единствен нулев елемент
2) **C** $\supset$ **R** $\supset$ **Q** $\supset$ **Z** $\supset$ **2Z** Всички пръстени, които се съдържат в комплексните числа се наречат числови пръстени
3) квадратните матрици от n^{ти} ред
4) множеството на всички функций с обща дефиниционна област относно обичайните операций от анализа

Ако в един пръстен a.b = b.a, тогава този пръстенът се нарича комутативен. От разглежданите примери единствено 3) не е комутативен пръстен.

Твърдение:
Нека К е пръстен , тогава a.0=0.a = 0, за всяко a $\in$ К

Д-во:
Имаме $0 + 0 = 0 \Rightarrow a(0 + 0) = a.0 \Rightarrow a.0 + a.0 = a.0$. Като прибавим към двете страни противоположния елемент на a.0 получаваме a.0 = 0. Равенството 0.a = 0 се доказва по същия начин□

Определение:
Нека К е пръстен и a $\in$ К. Казваме, че a е делител на нулата, ако a $\neq$ 0 и съществува елемент b$\in$К, b $\neq$ 0 такъв ,че или a.b = 0, или b.a = 0.

Примери:
1) в **C**, **R**, **Q**, **Z** няма делители на нулата, тъй като произведението на две ненулеви числа е различно от нула
2) в пръстена на квадратните матрици от n^{ти} ред, матрицата А е делител на нулата, тогава и само тогава когато А е ненулева и detA = 0. Да се докаже.
3) в пръстена на функциите $f_1(x) \neq 0$ $f_2(x) \neq 0$, но $f_1(x).f_2(x) = 0$ за всяко x
$\Rightarrow f_1(x).f_2(x)$ е нулева функция, което означава, че f_1, f_2 са делители на нулата

Определение:
Казваме,че К е пръстен с единица, ако съществува е $\in$ К, е $\neq$ 0 такъв, че а.е = е.а = а за всяко а $\in$К

Примери:
От разгледаните по-горе примери на пръстени нулевият тпръстен няма единица, тъй като пръстените с единица имат поне два елемента. Съществува пръстен с единица, който има точно два елемента и този пръстен е единтвен.

Определение:
Нека К е пръстен с единица е $\in$ К. Казваме, че елемента а $\in$ К е обратим, ако съществува a^{-1} $\in$ К, такъв, че $a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$.

Примери:
1) В **C**, **R**, **Q** – всеки ненулев елемент е обратим.
2) В **Z** обратими са 1 и –1.
3) В пръстенът на квадратните матрици от n^{ти}. Единичната матрица е единича на този пръстен и матрицата А е обратима тогава и само тогава, когато detA $\neq$ 0.

Твърдение:
Обратимите елементи в пръстен с единица не са делители на нулата.

Д-во:
Нека а е обратим и a.b = 0. Като умножим двете страни на това равенство с a^{-1} получаваме b = 0. По същия начин от b.a = 0 получаваме b = 0. Следователно а не е делител на нулата□

Определение:
Нека К е комутативен пръстен с единица. Казваме, че К е поле, ако всеки ненулев елемент на К е обратим.

Следствие:
От твърдението следва, че в полето няма делители на нулата.

Определение:
Нека K *е пръстен и* K’ *е подмножество на* K , K’ $\neq \emptyset$. *Казваме, че* K’ *е подпръстен на* K, *ако са изпълнени следните условия:*
(1) *От* a,b $\in$ K $\Rightarrow$ a + b є K’ *и* a.b $\in$ K’
(2) *От* a $\in$ K’ $\Rightarrow$ -a $\in$ K’

Условието (1) всъщност означава, че подпръстена наследява операциите на пръстена.

Примери:
1) {0} и К са подпръстени,които се наричат несобствени подпръстени
2) $\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbf{2}\mathbb{Z}$**.** В тази верига всеки пръстен е подпръстен на предходния
3) Пръстените на квадратните матрици от n^{ти} ред. В него диагоналните и скаларните матрици образуват подпръстени.
4) В пръстена на функциите с обща дефиниционна област, непрекъснатите функции образуват подпръстен. Функциите, които имат първа производна също образуват подпръстен.

Твърдение:
Относно наследените операции, подпръстена също е пръстен.

Д-во:

Трябва да се проверят седемте аксиоми за пръстена. Верността на всички аксиоми е очевидна с изключение на третата и четвъртата аксиома. Поради това ще проверим верността на тези две аксиоми. От К’ $\neq \varnothing$ следва, че съществува а $\in$ К’

съгласно (2) имаме -а $\in$ К’. От (1) получаваме а + (-а) $\in$ К’ $\Rightarrow$ 0 $\in$ К’.

Четвъртата е изпълнена съгласно (2).□