Изоморфизъм на групи

Определение:
Казваме,че групите G и G' са изоморфни, ако съществува 1-1 изображение

$$G \xrightarrow{\varphi} G'$$

такова, че ако

$$x \xrightarrow{\varphi} x' \;\; и \;\; y \xrightarrow{\varphi} y',$$

тогава $xy \xrightarrow{\varphi} x'y'$, *ако операцията е мултипликативна и* $x + y \xrightarrow{\varphi} x' + y'$ *ако операцията е адитивна. Изображението* φ *с тези свойства се нарича изоморфизъм на* G *и* G'.

Примери:
1) Всеки изоморфизъм на линейни пространства е изоморфизъм на техните адитивни групи.

2) **Z** относно "+"

$$m \xrightarrow{\varphi} 2m \;.$$

Изображението φ е изоморфизъм между Z и нейната подгрупа 2Z.

3) Нека G е мултипликативна група на положтелните реални числа, а G′ е адитивна група на всичките реални числа. Изображението $x \to \ln(x)$, за всяко x > 0, x ∈ G е 1-1 изображение между G и G′. Равенството ln(xy) = lnx + lny означава, че изображението ln е изоморфизъм на групата G и групата G′.

Теорема 1:
Всеки две безкрайни циклични групи са изоморфни.

Д-во:
Нека $G = < a >$ и $|a| = \infty$, $G' = < b >$ и $|b| = \infty$. Тогава от миналата лекция имаме, че

$$G = < a > = \{a^0 = e, a^{\pm 1}, ..., a^{\pm k}, ...\}$$

$$G' = < b > = \{b^0 = e, b^{\pm 1}, ..., b^{\pm k}, ...\}$$

Разглеждаме изображението

$$a^k \xrightarrow{\varphi} b^k, \; \forall\, k \in \text{Z}.$$

Понеже степените на а са различни и степените на b също са различни, изображението φ е 1-1 изображение.

Нека $a^k \xrightarrow{\varphi} b^k$ и $a^l \xrightarrow{\varphi} b^l$. Тогава

$$a^k a^l = a^{k+l} \xrightarrow{\varphi} b^{k+l} = b^k b^l .$$

Следователно φ е изоморфизъм.□

<u>Теорема 2:</u>
Всеки две крайни циклични групи с равни редове са изоморфни.

<u>Д-во:</u>
Нека G и G' са групи.

$$G =< a >= \{a^0 = e, a^1, ..., a^{n-1}\}, |a| = n$$

$$G' =< b >= \{b^0 = e, b^1, ..., b^{n-1}\}, |b| = n$$

дефинираме изображението

$$a^k \xrightarrow{\varphi} b^k , k = 0, 1, ..., n-1$$

Ясно е, че φ е 1-1 изображение между G и G′.
Нека

$$a^k \xrightarrow{\varphi} b^k \quad \text{и} \quad a^s \xrightarrow{\varphi} b^s \ .$$

Нека k + s = nq + r, където 0 ≤ r < n. Тогава

$$a^k a^s = a^{k+s} = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = a^r \xrightarrow{\varphi} b^r .$$

Но

$$b^r = (b^n)^q b^r = b^{nq+r} = b^{k+s} = b^k b^s .$$

Следователно

$$a^k a^s \xrightarrow{\varphi} b^k b^s .$$

Следователно φ е изоморфизъм.□

<u>Хомоморфизъм на групи</u>

<u>Определение:</u>
Нека G и G′ са групи. Казваме, че изображението $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм на групата G в G′, ако то изобразява произведението(сумата) в произведение(сума), т.е. ако $x \xrightarrow{\varphi} x'$ и $y \xrightarrow{\varphi} y'$ тогава

$$xy \xrightarrow{\varphi} x'y' \; (x + y \xrightarrow{\varphi} x' + y').$$

Примери:

1) Всеки изоморфизъм на групи е специален вид хомоморфизъм

2) G и G′ са произволни групи и e′ е неутрален елемент на G′ тогава изображението

$$g \xrightarrow{\varphi} e' \text{ за всяко } g \in G$$

е хомоморфизъм на G в G'.

3) разглеждаме пълната линейна група $GL_n(F)$ над полето F. Нека $A \in GL_n(F)$. Дефинираме:

$$A \longrightarrow \det(A).$$

Равенството $\det(AB) = \det A.\det B$ означава, че това изображение е хомоморфизъм на групата $GL_n(F)$ в мултипликативната група на полето F. Докажете, че този хомоморфизъм и епиморфизъм.

4) Нека G е мултипликативната група на комплексните числа. Разглеждаме изображението

$$z \xrightarrow{\varphi} |z|.$$

Тъй като е вярно равенството $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$, изображението φ е хомоморфизъм на G в мултипликативната група на реалните положителни числа. Ясно е, че този хомоморфизъм е епиморфизъм.

Основни свойства на хомоморфизмите

Свойство 1:
Хомоморфизмите изобразяват неутрален елемент в неутрален елемент.

Д-во:

Нека G и G' са групи и $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм. Нека e е неутралният елемент на G, а e' е неутралният елемент на G'

Ако $e \xrightarrow{\varphi} x' \in G$, тогава $e = ee \xrightarrow{\varphi} x'x'$. Следователно $x'x' = x'$. Като умножим двете страни на това равенство с обратния елемент на x' получаваме $x' = e'$.□

Свойство 2:
При хомоморфизъм на групи обратният елемент се изобразява в обратен, т.е. ако $x \xrightarrow{\varphi} x'$, *тогава* $x^{-1} \xrightarrow{\varphi} (x')^{-1}$.

Д-во:

Нека $x \xrightarrow{\varphi} x'$ *и* $x^{-1} \xrightarrow{\varphi} y$, тогава

$$e = xx^{-1} \xrightarrow{\varphi} x'y \ .$$

Съгласно Свойство 1, $x'y = e'$. Следователно $y = (x')^{-1}$ □

Определение:

Нека G и G′ са групи и

$$G \xrightarrow{\varphi} G'$$

е хомоморфизъм. Образ на този хомоморфизъм наричаме

$$Im(\varphi) = \{x' \in G' \mid \text{за който съществува } x \in G \text{ такъв, че } x \xrightarrow{\varphi} x'\}.$$

Ядро на този хомоморфизъм наричаме

$$Ker(\varphi) = \{ x \in G \mid x \xrightarrow{\varphi} e' \ \text{(неутрален елемент на } G'\text{)} \}$$

Ясно е че $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq G'$ и $\mathrm{Ker}(\in) \subseteq G$.

Свойство 3:

Нека $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм на групата G в групата G′. Тогава Im(φ) е подгрупа на G′.

Д-во:

Нека $x', y' \in Im(\varphi)$. Тогава съществуват x, y такива, че $x \xrightarrow{\varphi} x'$ и $y \xrightarrow{\varphi} y'$. Понеже φ е хомоморфизъм имаме

$$xy \xrightarrow{\varphi} x'y'.$$

Следователно $x'y' \in Im(\varphi)$. От Свойство 2 имаме $x^{-1} \xrightarrow{\varphi} (x')^{-1}$ следователно $(x')^{-1} \in Im(\varphi)$.□

Свойство 4:

Нека $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм на групата G в групата G′. Тогава Ker(φ) е подгрупа на G.

Д-во:

Нека *e* е неутралният елемент на G, а e' е неутралният елемент на G'.

Съгласно Свойство 1 имаме $e \xrightarrow{\varphi} e'$. Следователно $Ker(\varphi) \neq \emptyset$

Нека x,y $\in Ker(\varphi)$. Тогава

$$xy \xrightarrow{\varphi} e'e' = e'.$$

Следвателно xy $\in Ker(\varphi)$. От Следствие 2 имаме

$$x^{-1} \xrightarrow{\varphi} (e')^{-1} = e'$$

Следователно $x^{-1} \in Ker(\varphi)$.□