Основна теорема на алгебрата. Следствия.

Основна теорема на алгебрата(Теорема на Даламбер):
*Всеки неконстантен полином f(x) $\in$ **C**[x] има комплексен корен.*

Ще са ни нееобходими следните две леми.

Лема 1:
*Нека f(x) $\in$ **R**[x] и ст. f(x) е нечетно число. Тогава f(x) има реален корен.*

Д-во:
Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, $a_n \neq 0$
ст. $f(x) = n$, n – нечетно число

$$h(x) = \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_0}{a_n} + \ldots + x^n\right)$$

$f(x)$ има реален корен тогава и само тогава, когато h(x) има реален корен. Следователно достатъчно е да докажем, че h(x) има реален корен. Тъй-като ст.(h(x)) е нечетна имаме

$$\lim_{x \to -\infty}(h(x)) = -\infty \text{ и } \lim_{x \to +\infty}(h(x)) = +\infty.$$

следователно съществува $x_1 \in \mathbf{R}$ такова, че $h(x_1) < 0$ и съществува $x_2 \in \mathbf{R}$ такова, че $h(x_2) < 0$. тъй като h(x) е непрекъсната, съществува $x_0 \in [x_1, x_2]$ такова, че $h(x_0) = 0$, т.е. x_0 е корен на h(x)□

Лема 2:
*Нека $ax^2 + bx + c \in$ **C**[x], $a \neq 0$. Тогава $ax^2 + bx + c$ има комплексен корен.*

Д-во:

Корените на $ax^2 + bx + c$ са $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b^2 - 4a \in \mathbf{C} \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4a} \in \mathbf{C} \Rightarrow x_{1,2} \in \mathbf{C}$□

Преди доказателството на теоремата на Даламбер ще докажем следното по-слабо твърдение:

Теорема 1:
Нека f(x) е неконстантен полином с реални коефициенти. Тогава f(x) има комплексен корен.

Д-во:
Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, $a_n \neq 0$ и ст. $f(x) = n$
Нека $n = 2^s.k$, k – нечетно число.
Доказателството ще извършим по индукция относно s.
База s = 0.
В тази ситуация n е нечетно число и от Лема1 следва, че f(x) има даже реален корен.

Нека $s \geq 1$. Разглеждаме разширение E на полето на комплексните числа **C** над, което $f(x)$ се разлага на линейни множители.

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n),$$

където $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in$ E и са корени на $f(x)$ в E.
Разглеждаме

$$H(x\,;x_1,\ldots,x_n)=\prod_{1\le i\le j\le n}[x-(x_i+x_j+cx_ix_j)] \quad \left(\binom{n}{2} \text{ множителя}\right),$$

където c е произволно реално число. След като развием дясната част и направим съответните опростявания ще получим полином на променливата x, коефициентите на който са от пръстена на полиномите $\mathbf{R}[x_1,\ldots,x_n]$. Разглеждаме транспозицията $x_i \leftrightarrow x_j$ при тази транспозиция имаме

$$x_i + x_j + cx_ix_j \leftrightarrow x_j + x_i + cx_jx_i$$

$$x_i + x_k + cx_ix_k \leftrightarrow x_j + x_k + cx_jx_k,\ k \ne j$$

Множителите, в които не участват x_i и x_j не се променят. Следователно произволна при транспозиция на променливите множителите на $H(x;\,x_1,\ldots,x_n)$ се разместват, но тяхното произведение не се променя. Следователно при всяко разместване на променливите коефициентите на $H(x;\,x_1,\ldots,x_n)$ не се променят. Това означава, че коефициентите пред степените на x са симетрични полиноми от пръстена $\mathbf{R}[x_1,\ldots,x_n]$. Съгласно основното следствите на теоремата за симетрични полиноми коефициентите на $h(x) = H(x;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ще бъдат реални числа, т.е.

$$(*)\quad h(x)=\prod_{1\le i\le j\le n}[x-(\alpha_i+\alpha_j+c\alpha_i\alpha_j)] \in \mathbb{R}[x]$$

Имаме

$$\text{ст.}h(x)=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2^s k(2^s k-1)}{2}=2^{s-1}\underline{k(2^sk-1)}=2^{s-1}k',$$ където k' е нечетно число.

И така $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ и ст.$h(x) = 2^{s-1}k'$, където k' е нечетно число. Съгласно индуктивната хипотеза $h(x)$ има комплексен корен $\beta \in \mathbf{C}$. Заместваме в (*) и получаваме

$$h(\beta)=\prod_{1\le i\le j\le n}[\beta-(\alpha_i+\alpha_j+c\alpha_i\alpha_j)]=0$$

Тъй-като в E няма делители на нулата, имаме $\beta = \alpha_i + \alpha_j + c\alpha_i\alpha_j$ за някои индекси i и j. И така за всяко реално число $c \in \mathbf{R}$ съществуват индекси i и j такива, че $\alpha_i + \alpha_j + c\alpha_i\alpha_j \in \mathbf{C}$. Понеже двойките индекси (i, j), където $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le n$ са краен брой, а реалните числа са безброй много съществуват реални числа $c_1 \ne c_2$, за които при едни и същи индекси i и j имаме:

$$\alpha_i + \alpha_j + c_1\alpha_i\alpha_j = z_1 \in \mathbb{C}$$
$$\alpha_i + \alpha_j + c_2\alpha_i\alpha_j = z_2 \in \mathbb{C}$$

като извадим тези равенства получаваме

$$(c_1 - c_2)\alpha_i\alpha_j = z_1 - z_2 \in \mathbb{C},\ c_1 \ne c_2$$

и

$$\alpha_i\alpha_j = q = \frac{z_1-z_2}{c_1-c_2} \in \mathbb{C}$$

Поради това $\alpha_i + \alpha_j = p = z_1 - c_1\alpha_i\alpha_j \in \mathbb{C}$.

Разглеждаме

$$t(x) = (x-\alpha_i)(x-\alpha_j) = x^2 - (\alpha_i + \alpha_j)x + \alpha_i\alpha_j = x^2 - px + q \in \mathbb{C}[x]$$

От Лема 2 имаме, че $t(x)$ има комплексен корен γ. Заместваме в (**) и получаваме

$$t(\gamma) = (\gamma - \alpha_i)(\gamma - \alpha_j) = 0$$

Тъй като в F няма делители на нулата имаме, че $\gamma = \alpha_i$ или $\gamma = \alpha_j$. Следователно α_i или α_j е комплексно число. Теорема 1 е доказана□

Д-во на Теоремата на Даламбер:
Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$, $a_n \neq 0, n \geq 1$
Ако коефициентите са реални Теоремата на Даламбер следва от Теорема 1.
Ще предполагаме, че не всичките коефициенти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са реални. Разглеждаме полинома

$$f_1(x) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1x + \ldots + \overline{a}_nx^n .$$

Където $\overline{a}_i$ е комплексно спрегнатото число на a_i. Разглеждаме също

$$h(x) = f(x).f_1(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{2n}x^{2n},$$

Тъй-като $b_k = \sum_{i+j=k} a_i\overline{a}_j$ имаме $\overline{b}_k = \sum_{i+j=k} \overline{a}_i a_j$. Следователно $b_k = \overline{b}_k$, за всяко к = 0, . . , 2n, т.е. h(x) $\in$ R[x]. От Теорема1 имаме, че h(x) има комплексен корен $\alpha \in \mathbb{C}$. Следователно

$$h(\alpha) = f(\alpha).f_1(\alpha) = 0 .$$

Тъй като в полето няма делители на нулата, или $f(\alpha) = 0$, или $f_1(\alpha) = 0$.
Ако $f(\alpha) = 0$, тогава $f(x)$ има комплексен корен α и теоремата е доказана.
Нека $f_1(\alpha) = 0$, т.е. $\overline{a}_0 + \overline{a}_1\alpha + \ldots + \overline{a}_n\alpha^n = f_1(\alpha) = 0$. Тогава $\overline{f_1(\alpha)} = 0$, т.е.

$$\overline{\overline{a}}_0 + \overline{\overline{a}}_1\overline{\alpha} + \ldots + \overline{\overline{a}}_n(\overline{\alpha})^n = \underbrace{a_0 + a_1\overline{\alpha} + \ldots + a_n(\overline{\alpha})^n}_{f(\overline{\alpha})} = 0,$$

т.е. $f(\overline{\alpha}) = 0$ или комплексното число $\overline{\alpha}$ е корен на $f(x)$□

Следствие 1:
Над полето на комплексните числа C *неразложими са само полиномите от първа степен.*

Д-во:
Трябва да се докаже, че за всеки полином от степен по-голяма или равна на две е разложим в $\mathbb{C}$.
Нека f(x) $\in \mathbb{C}$[x] и ст.f(x) $\geq$ 2. Съгласно Теоремата на Даламбер f(x) има корен $\alpha \in \mathbb{C}$. Следователно $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ и $(x-\alpha), g(x) \in \mathbb{C}$[x]. От ст.$f$(x) $\geq$ 2 следва, че ст.g(x) $\geq$ 1. Следователно f(x) е разложим над полето на комплексните числа.

Следствие 2:
Всеки неконстантен полином от $\mathbb{C}$[x] *се разлага на линейни множители над* $\mathbb{C}$.

Д-во:
Съгласно Следствие1 в каноничното разлагане на всеки неконстантен полином ще участват само полиноми от първа степен, което представлява желаното разлагане.

Определение:
Казваме, че полето F е алгебрично затворено, ако всеки неконстантен полином от F[x] се разлага на линейни множители над F.

От Следствие 2 става ясно, че полето на комплексните числа е алгебрично затворено.

Следствие 3:
Над полето на реалните числа неразложими са полиномите от първа степен и тези полиноми над $\mathbb{R}$ от втора степен, които нямат реални корени. Други неразложими полиноми в $\mathbb{R}$[x] няма.

Д-во:
1) Нека *f(x)* има реални коефициенти и ст.f(x) = 2.
Ако *f(x)* е разложим над $\mathbb{R}$, тогава корените на f(x) са реални. Ако f(x) има реален корен α, тогава f(x) се разлага във вида:

$$f(x) = (x-\alpha)g(x) \text{ и } (x-\alpha), g(x) \in \mathbb{R}[x],$$

където ст.g(x) = 1. Следователно f(x) е разложим над $\mathbb{R}$. Поради това един полином с реални коефициенти от втора степен е разложим над $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато има реални корени. Следователно един полином от втора степен е неразложим над полето на реалните числа тогава и само тогава, когато няма реални корени.
2) Нека ст.f(x) ≥ 3 и f(x) ∈ $\mathbb{R}$ [x]. Трябва да докажем, че f(x) е разложим над $\mathbb{R}$.
Ако f(x) има реален корен α, тогава f(x) се разлага във вида:

$$f(x) = (x-\alpha)g(x) \text{ и } (x-\alpha), g(x) \in \mathbb{R}[x],$$

където ст.g(x) ≥ 2. Следователно f(x) е разложим над $\mathbb{R}$.

Нека f(x) няма реални корени. Тогава от теоремата на Даламбер следва, че f(x) има комплексен корен, който не е реален, т.е. $\alpha \neq \overline{\alpha}$. Следователно в каноничното разлагане на f(x) ще участва $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$, т.е.

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})g(x)$$
$$f(x) = (x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha.\overline{\alpha})g(x)$$

Тъй като $x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha.\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$ [x] следва, че g(x) ∈ $\mathbb{R}$ [x]. От ст.f(x) ≥ 3, следва ст.g(x) ≥ 1. Следователно f(x) е разложим над $\mathbb{R}$ □

Следствие 4:
Всеки неконстантен полином f(x) ∈ $\mathbb{R}$ [x] може да се разложи по следния начин:

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

където $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и $x^2 + p_jx + q_j \in \mathbb{R}$[x] и нямат реални корени.

Д-во:

От Следствие3 в каноничното разлагане на f(x) ще участват линейни множители и квадратни тричлени, които нямат реални корени.

<u>Следствие 5:</u>

Ако един неконстантен полином с реални коефициенти няма реални корени, тогава той се разлага на произведение на квадратни тричлени, които нямат реални корени. В тази ситуация полиномът има четна степен. □