Симетрични оператори

Определение:
Нека A *= (α_{ij}) е квадратна матрица. Казваме, че тази матрица е симетрична, ако A' = A, т.е. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, за всички i и j.*

Определение:
Нека L е евклидово пространство и A е линеен оператор в L. Казваме, че този ленеен оператор е симетричен, ако (A*(x) , y) = (x ,* A*(y)) , за всички x,y.*

Твърдение 1:
Матрицата на симетричен линеен оператор в ортонормиран базис е симетрична.
Д-во:
Нека $e_1, \dots, e_n$ е ортогонален базис и

$A(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \dots + \alpha_{nn}e_n$

. . . .

$A(e_n) = \alpha_{nn}e_1 + \dots + \alpha_{nn}e_n$

Тогава $(A(e_i) , e_j) = (\alpha_{i1}e_1 + \dots + \alpha_{in}e_n , e_j) = 0 + \dots + 0 + \alpha_{ij}(e_j , e_j) + 0 + \dots + 0 = \alpha_{ij}$.
и $(e_i , A(e_j)) = (e_i , \alpha_{j1}e_1 + \dots + \alpha_{jn}e_n) = 0 + \dots + 0 + \alpha_{ji}(e_i , e_i) + 0 + \dots + 0 = \alpha_{ji}$
понеже $(A(e_i) , e_j) = (e_i , A(e_j))$ имаме $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ за всички i,j $\Rightarrow$ матрицата на A е симетрична.

Твърдение 2:
Ако един линеен оператор има в ортонормиран базис симетрична матрица, тогава този оператор е симетричен.
Д-во:
Нека $e_1, \dots, e_n$ е ортогонален базис

$A(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \dots + \alpha_{nn}e_n$

. . . .

$A(e_n) = \alpha_{nn}e_1 + \dots + \alpha_{nn}e_n$

Да разгледаме $x = \xi_1e_1 + \dots + \xi_ne_n$ и $y = \mu_1e_1 + \dots + \mu_ne_n$
Ако $A(x) = \alpha_1e_1 + \dots + \alpha_ne_n$ и $A(y) = \beta_1e_1 + \dots + \beta_ne_n$
Тогава

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ .\,. \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ .\,. \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Където A е матрица на оператора A в базиса $e_1, \dots, e_n$. Транспонираме това равенството и получаваме

(1) $$(\alpha_1 \dots \alpha_n) = (\xi_1 \dots \xi_n)A'$$

Имаме също, че

(2) $$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ .\,. \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ .\,. \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Понеже $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис

$$(\mathcal{A}(x), y) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)\begin{pmatrix}\mu_1\\ ..\\ \mu_n\end{pmatrix} =^{(1)} (\xi_1 \dots \xi_n)A'\begin{pmatrix}\mu_1\\ ..\\ \mu_n\end{pmatrix}$$

$$(x, \mathcal{A}(y)) = (\xi_1 \dots \xi_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ ..\\ \beta_n\end{pmatrix} =^{(2)} (\xi_1 \dots \xi_n)A\begin{pmatrix}\mu_1\\ ..\\ \mu_n\end{pmatrix}$$

От последните равенства и $A = A' \Rightarrow (\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}(y)) \Rightarrow \mathcal{A}$ е симетричен.

<u>Теорема 1:</u>
Корените на характеристичния полином на всяка симетрична матрица елементите, на която са реални числа, също са реални числа.
<u>Д-во:</u>
Нека $A = (\alpha_{ij})$ е симетрична, т.е. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$
В доказателството ще използваме теоремата на Д'Аламбер, според която корените на всеки полином с реални коефициенти са комплексни числа.
$f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$
понеже $\alpha_{ij} \in \mathbf{R} \Rightarrow$ коефициентите на $f(\lambda)$ са реални числа.
От теоремата на Д'Аламбер $\Rightarrow$ корените на $f(\lambda)$ са комплексни.
Ще докажем, че тези комплексни корени всъщност са реални числа.
И така нека β е корен на $f(\lambda) \Rightarrow \beta \in \mathbf{C}$
Т.е. $\det(A - \beta E) = 0$
Разглеждаме линейната квадратна хомогенна система :

$$(A - \beta E)\begin{pmatrix}x_1\\ ..\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ ..\\ 0\end{pmatrix}$$

От $\det(A - \beta E) = f(\beta) = 0 \Rightarrow$ тази система има ненулево решение $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ и някое $\alpha_i \neq 0$.
От $\beta \in \mathbf{C} \Rightarrow$ коефициентите на тази система също ще са комплексни числа. Следователно нейните решения също ще са комплексни числа
$\Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ и някое $\alpha_i \neq 0$. Имаме

$$(A - \beta E)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ .\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ .\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix}\beta_1\\ ..\\ \beta_n\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}\alpha_1\\ ..\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

Умножаваме двете страни на това равенство с реда $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ от ляво, където $\bar{\alpha}_i$ е комплексно спрегнатото на α_i . Получаваме :

$$\underbrace{(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ ..\\ \alpha_n\end{pmatrix}}_{\gamma} = \beta(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ ..\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \beta(\bar{\alpha}_1\alpha_1 + \dots + \bar{\alpha}_n\alpha_n) = \underbrace{\beta(|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)}_{\mathbf{\Delta}}$$

Тъй-като някое $\alpha_i \neq 0$ имаме $\mathbf{\Delta} \neq 0$ и $\beta = \gamma / \mathbf{\Delta}$
Понеже $\mathbf{\Delta} \in \mathbf{R}$ **,**за да докажем, че β е реално трябва да се провери, че $\gamma \in \mathbf{R}$
От лемата $\Rightarrow \gamma = \sum a_{ij}\, \bar{\alpha}_i\, \alpha_j$
Разглеждаме комплексно спрегнатото $\bar{\gamma} = \sum_{i,j} \bar{a}_{ij}\, \bar{\bar{\alpha}}_i\, \bar{\alpha}_j = \sum_{i,j} a_{ij}\alpha_i\, \bar{\alpha}_j$.
Следователно $\bar{\gamma}$ и γ се състоят от всевъзможните произведения $\bar{\alpha}_i\alpha_j$ със съответен коефициент.

Коефициентът пред $\bar{\alpha}_i\alpha_j$ в γ е a_{ij}, а коефициентът пред $\bar{\alpha}_i\alpha_j$ в $\bar{\gamma}$ е α_{ji}.
Понеже матрицата е симетрична $\Rightarrow \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \Rightarrow \gamma = \bar{\gamma} \Rightarrow \gamma \in \mathbf{R} \Rightarrow \beta \in \mathbf{R}$□

Теорема 2:
Нека L е крайномерно ненулево евклидово пространство. Всеки симетричен оператор в L има собствени вектори, които образуват ортонормиран базис. В този базис матрицата на оператора е диагонална и числата по главния диагонал са собствените стойности на тези собствени виктори.
Д-во:
Нека A е симетричен оператор в л
Индукция по $n = \dim L$.
База: $n = 1 \Rightarrow L = \{ \lambda u \mid u \neq 0 \}$
Всеки ненулев вектор от L е собствен вектор на разглеждания оператор.
Ако изберем този вектор u да има дължина 1, тогава този вектор ще образува ортонормиран базис и ще бъще собствен.
Нека $n \geq 2$. В ортонормиран базис матрицата на симетричния линеен оператор е симетрична, следователно(от Теорема1) корените на характеристичния полином ще бъдат реални. Тъй-като тези корени принадлежат на основното поле, те ще бъдат собствени стойности. Поради това съществува $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ – собствена стойност на разглеждания линеен оператор. Нека e_1 е съответния собствен вектор,т.е. $A(e_1) = \lambda_1 e_1$. Тъй-като ако един вектор е собствен, то и след като го нормираме отново получаваме собствен вектор със същата собствена стойност, можем да предположим, че $|e_1| = 1$.
Допълваме вектора e_1 до базис $e_1, f_2, \dots, f_n$. Този базис го ортогонализираме по метода на Грам - Шмид и получаваме $e_1, f_2', \dots, f_n'$ ортогонален базис на L. Нормираме векторите от този базис и получаваме $e_1', e_2', \dots, e_n'$ ортонормиран базис.
Нека $L_1 = \ell(e_2', \dots, e_n') = \{ \lambda_2 e_2' + \dots + \lambda_n e_n' \}$.
Понеже $e_2', \dots, e_n'$ са линейно независими $\Rightarrow \dim L_1 = n-1$.
Ще докажем следната характеристика на
(*) $\qquad L_1$: $x \in L_1 \Leftrightarrow (x, e_1) = 0$

1) Нека $x \in L_1 \Rightarrow x = \xi_2 e_2' + \dots + \xi_n e_n'$
$(x, e_1) = (\xi_2 e_2' + \dots + \xi_n e_n', e_1) = 0$

2) Нека $(x, e_1) = 0$ и $x = \xi_1 e_1' + \xi_2 e_2' + \dots + \xi_n e_n'$. И тогава
$(x, e_1) = (\xi_1 e_1' + \xi_2 e_2' + \dots + \xi_n e_n', e_n) = \xi_1(e_1, e_1) = \xi_1$
$\Rightarrow \xi_1 = 0$, т.е. $x \in L_1$.
Разглеждаме $x \in L_1$ тогава
$(x, A(e_1)) = (x, \lambda_1 e_1) = \lambda_1(x, e_1) =^{(*)} 0$
Понеже $(x, A(e_1)) = (A(x), e_1)$ имаме $(A(x), e_1) = 0$. съгласно (*) $A(x) \in L_1$.
И така ако $x \in L_1$, тогава $A(x) \in L_1$. Това ни дава право да разглеждаме A като линеен оператор в подпространството L_1.
Тъй-като $\dim L_1 = n-1$, за ограничението на A върху L_1 можем да приложим индуктивната хипотеза, и да направим извода, че съществува ортонормиран базис $e_2, \dots, e_n$ в L_1 от собствени вектори на A ,т.е.
$A(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 2, \dots, n$
$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$
За да докажем, че $e_1, e_2, \dots, e_n$ е търсения базис,остава да езясним, че e_1 е ортогонален на останалите.
Понеже $e_i \in L_1$, $i = 2, \dots, n$ от (*) сведва $(e_i, e_1) = 0$, $i = 2, \dots n$
Теоремата е доказана□

Следствие:

За всяка симетрична матрица A, елементите на която са реални числа, съществува ортогонална матрица T такава, че $T^{-1}AT$ да е диагонална,като по диагонала са корените на характеристичния полином на A.

Д-во:

Нека A е квадратна матрица матрица от n-ти ред и $A = A'$.

Нека L е евклидово пространство и $\dim L = n$. Разглеждаме ортонормирания базис $e_1, \dots, e_n$ на L.

Дефинираме линейния оператор A като линеен оператор, матрицата на който в базиса $e_1, \dots, e_n$ е дадената матрица A.

От **Т. 2** следва, че съществува ортонормиран базис $e_1^* \dots e_n^*$ от собствени вектори, т.е. $A(e_i^*) = \lambda_i e_i^*$.

В този базис матрицата на линейния оператор е

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Знаем, че $A^* = T^{-1}AT$, където T е матрицата на прехода. Съгласно **Тв.1** матрицата T е ортогонална, т.е. $T^{-1} = T'$. поради това имаме

$$A^* = T'AT \square$$