Бинарни операции.Полугрупи.Независимост на произведението от скобите.

Определение: *Нека X е множество, $X \neq \emptyset$. Казваме, че в X е зададена бинарна операция, ако на всяка наредена двойка елементи от X е съпоставен елемент от X, т.е. бинарната операция е изображение на Декартовия квадрат на множеството X в множеството X.*

Ако резултатът от прилагането на бинарната операция за елементите (x_i, x_j) е означен с x_i+x_j , казваме, че бинарната операция е адитивна.

$x_i + x_j$ се нарича сума на x_i и x_j

Ако резултаът от прилагането на бинарната операция за елементите (x_i, x_j) е означен с $x_i.x_j$, казваме, че бинаранта операция е мултипликативна.

$x_i.\ x_j$ се нарича произведение на x_i и x_j.

Във всеки пръстен са зададени две операции, едната адитивна, а другата мултипликативна. В ЛП е дефинирана само една адитивна БО. Другата операция не е бинарна.

Ако $x_i.x_j = x_j.x_i$ $(x_i + x_j = x_j + x_i)$, казваме,че бинаранта операция е комутативна.
Ако $(x_j.x_i)x_k = x_i(x_jx_k)$ $[(x_i + x_j) + x_k = x_i +(x_j + x_k)]$, казваме,че бинаранта операция е асоциативна.

Комутативността и асоциативността са независими свойства, в смисъл, че едното не следва от другото.

Пример:
1) Умножението на квадратни матрици е асоциативно, но не е комутативно.
2) В ***Z*** дефинираме нова операция:
   m, n $\in$ ***Z***
   $m*n = -(m+n)$

   $(1*2)*3 = (-3)*3 = 0$
   $1*(2*3) = 1*(-5) = 4$

   Следователно тази операция не е асоциативна, но е очевидно комутативна.
3) Векторното произведение не е нито комутативно, нито асоциотивна операция.

Определение: *Нека Г е множество, $Г \neq \emptyset$, в което е дефинирана бинарна операция. Казваме, че относно тази операция Г е полугрупа, ако тази операция е асоциативна.*

При квадратните матрици и двете операции са асоциативни, което означава, че квадратните матрици от даден ред относно двете операции са полугрупи. Всъщност това е вярно за всеки пръстен.

Полугрупа на изображенията на дадено множество в себе си

Нека Ω е множество, $\Omega \neq \emptyset$. С $M(\Omega)$ означаваме множеството на всичките изображения на Ω в Ω, т.е.

$$M(\Omega)= \{\varphi \mid \Omega \xrightarrow{\varphi} \Omega\}.$$

Нека $\varphi,\psi \in M(\Omega)$, тогава $\varphi\psi$ е изображението, което се дефинира по следния начин:

$$\varphi\psi(\alpha) = \varphi(\ \psi(\alpha)\ ) \text{ за всяко } \alpha \in \Omega$$

$\varphi\psi$ се нарича произведение на φ и ψ.
Ясно е че $\varphi\psi \in$ M(Ω).

Твърдение: *Относно въведената операция, M(Ω) е полугрупа.*

Д-во:

Трябва да проверим, че операцията е асоциативна.
Нека $\alpha \in \Omega$ и $\eta,\varphi,\psi \in$ M(Ω) и

$$(\#)\ \alpha \xrightarrow{\psi} \alpha' \xrightarrow{\varphi} \alpha'' \xrightarrow{\eta} \alpha'''$$

От (#) следва

$$(\eta\varphi)\psi(\alpha) = \eta\varphi(\psi(\alpha)) = \eta\varphi(\alpha') = \eta(\alpha'') = \alpha'''$$

и

$$\eta(\varphi\psi)(\alpha) = \eta(\varphi\psi(\alpha)) = \eta(\varphi(\psi(\alpha))) =^{(\#)} \eta(\varphi(\alpha')) =^{(\#)} \eta(\alpha'') =^{(\#)} \alpha'''$$

следователно $(\eta\varphi)\psi(\alpha) = \eta(\varphi\psi)(\alpha)$, за всяко $\alpha \in \Omega$, т.е. $(\eta\varphi)\psi = \eta(\varphi\psi)$.□

Теорема: *Във всяка полугрупа произведението (сумата) на краен брой елементи не зависи от начина, по който са поставени скобите.*

Д-во:

Доказателството ще направим за мултипликативна операция(за адитивна е същото).
Нека Г е полугрупа, $x_1,x_2\ldots x_n \in \Gamma$, $n \geq 3$.
Произведението $(\ldots((((x_1x_2)x_3)x_4)x_5)\ldots x_{n-1})x_n$, означаваме с: $[x_1x_2\ldots x_n]$.
Ясно е, че

$$[x_1x_2\ldots x_n] = [x_1x_2\ldots x_{n-1}]x_n \qquad (*)$$

Индукция по *n*
Базата на индукцията *n* = 3 е очевидна понеже съвпада с асоциативния закон.

Нека $n \geq 4$
С $\{x_1x_2\ldots x_n\}$ означаваме произведението на тези елементи, в което скобите са поставени по някакъв начин.
Трябва да докажем,че $\{x_1x_2\ldots x_n\} = [x_1x_2\ldots x_n]$?

Тъй като операцията е бинарна, на всеки етап се умножават два елемента, следователно при окончателното пресмятане на произведението също се умножават два елемента.
Следователно имаме следното:

$$\{x_1x_2\ldots x_n\} = \{x_1x_2\ldots x_k\}\{x_{k+1}\ldots x_n\}$$

Ако $k = n-1$ имаме, че $\{x_1x_2\ldots x_n\}=\{x_1x_2\ldots x_{n-1}\}x_n$.
Съгласно индуктивната хипотеза $\{x_1x_2\ldots x_{n-1}\}=[x_1x_2\ldots x_{n-1}]$ и от (*) имаме

$$\{x_1x_2\ldots x_n\} = [x_1x_2\ldots x_n]$$

Нека *k<n-1*.
Съгласно индуктивната хипотеза $\{x_1 \ldots x_k\} = [x_1 \ldots x_k] \Rightarrow \{x_{k+1} \ldots x_n\} = [x_{k+1} \ldots x_n]$.
Следователно имаме, че $\{x_1 \ldots x_n\}=[x_1 \ldots x_k][x_{k+1} \ldots x_n]$. Съгласно (*) е изпълнено равенството

$$[x_{k+1} \ldots x_n]=[x_{k+1} \ldots x_{n-1}]x_n$$

поради това

$$\{x_1 \ldots x_n\} = [x_1 \ldots x_к]([x_{k+1} \ldots x_{n-1}]x_n) = ([x_1 \ldots x_k][x_{k+1} \ldots x_{n-1}])x_n,$$

защото операцията е асоциативна.
Съгласно индуктивната хипотеза

$$[x_1 \ldots x_k][x_{k+1} \ldots x_{n-1}] = [x_1 \ldots x_{n-1}]$$

Следователно

$$\{x_1 \ldots x_n\} = [x_1 \ldots x_{n-1}]x_n =^{(*)} [x_1 \ldots x_n]$$

Теоремата е доказана.□