Теорема на Хамилтон – Кейли

Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и A е квадратна матрица
$f(A) =^{def} a_0E + a_1A + \ldots + a_{n-1}A^{n-1}$
Ако $f(A) = 0$ – нулевата матрица казваме, че матрицата A е корен на полинома $f(x)$

Пример:
Да разгледаме матрицата

$$A= \begin{pmatrix} a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2 & b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2 \\ c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2 & d_0+d_1\lambda+d_2\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Елементите, на която са квадратни тричлени на λ. Очевидно е вярно равенството.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\lambda^2.$$

От този пример става ясно, че е вярна следната:

Лема 1:
Нека елементите на квадратна матрица A *са полиноми от степен по-малка или равна на* n-1. *Тогава* A *може да се представи по следния начин:*
$A = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A^{n-1}\lambda^{n-1}$*, където* $A_0, \ldots, A_{n-1}$ *са матрици, които не зависят от* λ*, т.е. техните елементи са числа.*

Лема 2:
Нека F *е безкрайно поле и*

$$A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_s\lambda^s = B_0 + B_1\lambda + \ldots + Bs\lambda^s \text{ за всяко } \lambda \in F, \qquad (\#)$$

където $A_0, A_1, \ldots, A_s, B_0, B_1, \ldots, B_s$ *са матрици с елементи от полето* F(*и не зависят от* λ). *Тогава* $A_0 = B_0, \ldots, A_s = B_s$.
Следователно, ако в (#) се замести λ *с произволна квадратна матрица се получава вярно равенство.*
Д-во:
Нека

$$A = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_s\lambda^s = (a_{ij}) \qquad (1)$$

$A_0 = (a^0_{ij}), A_1 = (a^1_{ij}), \ldots, A_s = (a^s_{ij})$

$$B = B_0 + B_1\lambda + \ldots + B_s\lambda^s = (b_{ij}) \qquad (2)$$

$B_0 = (b^0_{ij}), B_1 = (b^1_{ij}), \ldots, B_s = (b^s_{ij})$
От (#) $\Rightarrow a_{ij} = b_{ij}$ за всяко i,j и всяко λ
От (1) $\Rightarrow a_{ij} = a^0_{ij} + a^1_{ij}\lambda + \ldots + a^s_{ij}\lambda^s$
От (2) $\Rightarrow b_{ij} = b^0_{ij} + b^1_{ij}\lambda + \ldots + b^s_{ij}\lambda^s$
$\Rightarrow a^0_{ij} + a^1_{ij}\lambda + \ldots + a^s_{ij}\lambda^s = b^0_{ij} + b^1_{ij}\lambda + \ldots + b^s_{ij}\lambda^s$ за всяко λ.
Това е равенство на полиноми във функционален смисъл. Тъй като полето е безкрайно тези полиноми ще бъдат равни и в алгебричен смисъл, т.е.
$\Rightarrow a^0_{ij} = b^0_{ij} \Rightarrow A_0 = B_0$
$a^1_{ij} = b^1_{ij} \Rightarrow A_1 = B_1$
$\vdots \qquad \vdots$
$a^s_{ij} = b^s_{ij} \Rightarrow A_s = B_s$

$\Rightarrow$ лемата е доказана

<u>Теорема(на Хамилтон – Кейли)</u>

Всяка квадратна матрица над дадено поле е корен на своя характеристичен полином

<u>Д-во:</u>

Тъй като в доказателството ще се използва Лема 2, а в доказателството й се използва, че полето е безкрайно, доказателство което ще дадем ще бъде вълидно само за безкрайно поле. Теоремата обаче е вярна за всяко поле

$A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in F$ – безкрайно поле

С В означаваме адюнгираната матрица на матрицата $A - \lambda E$ тогава.

$$B(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} \det(A - \lambda E) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \det(A - \lambda E) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; f(\lambda) \end{pmatrix} = f(\lambda).E$$

Където $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ е характеристичният полином. Имаме

$B(A - \lambda E) = f(\lambda)E$ за всяко $\lambda \in F$

Елментите на адюнгираната матрица В ще бъдат полиноми на λ от степен по-малка или равна на $n – 1$

Съгласно Лема1 имаме $B = B_0 + B_1\lambda + . . . + B_{n-1}\lambda^{n-1}$, където $B_0, B_1, . . , B_{n-1}$ не зависят от λ.

От (1) $\Rightarrow (B_0 + B_1\lambda + . . . + B_{n-1}\lambda^{n-1})(A - \lambda E) = f(\lambda)E$ за всяко λ. (2)

В (2) преобразуваме лявата част и получаваме

$$B_0A + (B_1A - B_0)\lambda + (B_2A - B_1)\lambda^2 + . . . + (B_{n-1}A - B_{n-2})\lambda^{n-1} - B_{n-1}\lambda^n = f(\lambda)E \qquad (3)$$

Нека $f(\lambda)=a_0 + a_1\lambda + . . . + a_n\lambda^n$ като заместим в дясната част на (3) получаваме

$$B_0A + (B_1A - B_0)\lambda + (B_2A - B_1)\lambda^2 + . . . + (B_{n-1}A - B_{n-2})\lambda^{n-1} - B_{n-1}\lambda^n =$$
$$= a_0 E+ a_1E\lambda + . . . + a_nE\lambda^n \qquad (4)$$

за всяко $\lambda \in F$. Съгласно Лема 2, като в равенство (4) заместим λ с матрицата А ще получим

$f(A) = B_0A + (B_1A - B_0)A + (B_2A - B_1)A^2 + . . . + (B_{n-1}A - B_{n-2})A^{n-1} - B_{n-1}A^n$

$f(A) = B_0A + B_1A^2 - B_0A + B_2A^3 - B_1A^2 + . . . + B_{n-1}A^n - B_{n-2}A^{n-1} - B_{n-1}A^n$

$\Rightarrow f(A) = 0$

Теоремата на Хамилтон-Кейли е доказана□

<u>Пресмятане степените на квадратна матрица чрез Теоремата на Хамилтон – Кейли</u>

А – квадратна матрица ат $n^{ти}$ ред.

$A, A^2, . . . , A^{n-1}$ пресмятат се непосредствено.

Нека $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + . . . + a_n\lambda^n$ е характеристичен полином на А. Съгласно теоремата на Хамилтон-Кейли имаме

$$E_0 + E_1A + . . . + a_nA^n = 0, a_n \neq 0 \qquad (*)$$

Откъдето пресмятаме $A^n = - (1/a_n)(a_0E + a_1A + . . . + a_{n-1}A^{n-1})$ при това пресмятане матрицата A^n я получаваме като линейна комбинация на матриците $E, A, A^2, . . . , A^{n-1}$ и не се налага да умножаваме матрици. Умножаваме двете страни на последното равенство с матрицата А

$A^{n+1} = -(1/a_n)(a_0A + a_1A^2 + . . . + a_{n-1}A^n)$ откъдето пресмятаме A^{n+1} и т.н.

От (*) $\Rightarrow A(a_0E + a_1A + . . . + a_{n-1}A^{n-1}) = - a_0E$. Предполагаме, че А е обратима, т.е. $\det(A) = a_0$, $a_0 \neq 0$

Откъдето пресмятаме A^{-1} като линейна комбинация на $E, A, A^2, . . . , A^{n-1}$□