Пръстен на полиномите от няколко променливи

Определение:
Нека К *е комутативен пръстен. Едночлен на променливите $x_1, \dots, x_n$ над пръстена* К *наричаме израз от вида*

$$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$$

, *където* α_i *са цели неотрицателни числа,* $A \in$ К *и се нарича коефициент на този едночлен.*

Тези от променливите във даден едночлен, чиито степени са равни на нула няма да ги пишем, но ще ги подразбираме. Така например вместо $Ax_1^3x_2^0x_3^7$ ще пишем $Ax_1^3x_3^7$, а едночлена $Ax_1^0\dots x_n^0$ ще отъждествяваме с коефициенто A ще го наричаме константа.

Определение:
Казваме,че едночлените $Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ и $Bx_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}$ *са подобни, ако* $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$

Определение:
Нека К *е комутативен пръстен. Полином на променливите* $x_1, \dots, x_n$ *над пръстена* К *наричаме израз от вида:*

$f(x_1, \dots, x_n) = Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} + Bx_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n} + \dots\dots\dots\dots + Cx_1^{\gamma_1}\dots x_n^{\gamma_n}$

където едночлените в дясната част са над пръстена К *и всеки два от тях не са подобни. Елементите A, B, . . ., C* $\in$ К *се наричат коефициенти на* $f(x_1, \dots, x_n)$

Множеството на всички полиноми на променливите $x_1, \dots, x_n$ над пръстена К ще бележим с К$[x_1, \dots, x_n]$. Тъй-като едночлените от вида $Ax_1^0\dots x_n^0$ отъждествяваме с коефициента A, имаме че
К $\subset$ К$[x_1, \dots, x_n]$.

Определение:
Нека К *е пръстен. Казваме че два полинома от* К$[x_1, \dots, x_n]$ *са равни, ако те съвпадат буквално или се различават само с едночлени с нулени коефициенти.*

Ще дефинираме операции в К$[x_1, \dots, x_n]$, както следва.

Определение:
Нека $Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ *и* $Bx_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ *са два подобните едночлена. Сума на тези едночлени наричаме едночлен*

$$(A+B)x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}.$$

Определение:
Нека $f(x_1, \dots, x_n)$ *и* $g(x_1, \dots, x_n)$ *са два полиноми на променливите* $x_1, \dots, x_n$ *над пръстена* К. *Сума на тези полиноми наричаме полинома, който се получава по следния начин: към едночлените на f дописваме едночлените на g със съответен знак и извършваме приведение на подобните едночлени.*

Определение:
Нека $Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ *и* $Bx_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}$ *са два едночлена. Произведение на тези едночлени наричаме едночлена*

$$ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}.$$

Определение:

Нека f($x_1, . . , x_n$) *и* g($x_1, . . , x_n$) *са два полиноми на променливите* $x_1, . . , x_n$ *над пръстена* K. *Произведение на тези полиноми наричаме полинома, който се получава по следния начин: всеки едночлен на f се умножава с всеки едночлен на g и извършваме приведение на подобните едночлени.*

Твърдение:

Нека K *е комутативен пръстен. Относновъведените операции* K[$x_1, . . ,x_n$] *също е комутативен пръстен. Константите образуват подпръстен на* K[$x_1, . . , x_n$], *който съвпада с първоначалния пръстен* K. *Ако* K *има единица,тогава* K[$x_1, . . , x_n$] *сащо има единица (това е единицата на пръстена* K *разглеждана като едночлен с нулеви степени на променливите).*

Доказателството на твърдението да се направи самостоятелно.

Определение:

Нека $Ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ *е ненулев едночлен, т.е.* $A \neq 0$. *Степен на този едночлена наричаме числото*

$\alpha_1 + . . + \alpha_n$. *Ако* $f(x_1, . . , x_n)$ *е ненулев полином, тогава степен на f наричме максималната от степените на ненулевите едночлени на f.*

Пример:

1) $f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2x_2^3\ x_3^4 + 7x_1x_2^7\ x_3^8 - 21x_2^{14}\ x_3^2 \Rightarrow$ ст(f) = 16

Ако степените на едночлените на *f* са равни на к казваме, че *f* е еднороден полином от степен к, или че *f* е к-*форма*.

2) $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 +….+a_nx_n$ - 1-*форма*(линейна)

2-*формите* са всъщност квадратичните форми.

Лексикографска наредба на ненулеви едночлени

Определение:

Нека $\varphi_1 = Ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ и $\varphi_2 = Bx_1^{\beta_1}...x_n^{\beta_n}$ *са ненулеви едночлени, които не са подобни. Казваме, че* φ_1 *е по-голям в лексикографски смисъл от* φ_2, *ако съществува* i *такова, че*

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, . . ,\ \alpha_i = \beta_i, \text{ но } \alpha_{i+1} > \beta_{i+1}$$

, *т.е. ако първата ненулева разлика* $\alpha_1 - \beta_1,\ \alpha_2 - \beta_2, . . ,\ \alpha_n - \beta_n$, *е положителна.*

Със следващите твърдения ще изясним че лексикографската наредба има обичайните свойства на неравенствата.

Твърдение 1:

Нека $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *са едночлени такива че* $\varphi_1 > \varphi_2$ *и* $\varphi_2 > \varphi_3$. *Тогава* $\varphi_1 > \varphi_3$.

Д-во:

Нека $\varphi_1 = Ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$, $\varphi_2 = Bx_1^{\beta_1}...x_n^{\beta_n}$ и $\varphi_3 = Cx_1^{\gamma_1}...x_n^{\gamma_n}$.

От $\varphi_1 > \varphi_2$ имаме, че съществува i такова, че

$$\alpha_1 = \beta_1, . . , \alpha_i = \beta_i \text{ и } \alpha_{i+1} > \beta_{i+1} \qquad (*)$$

От $\varphi_2 > \varphi_3$ имаме, че съществува j такова, че

$$\beta_1 = \gamma_1, . . , \beta_j = \gamma_j \text{ и } \beta_{j+1} > \gamma_{j+1} \qquad (**)$$

Случай 1: i > j. От (*) и (**) имаме

$$\alpha_1 = \gamma_1, \ldots, \alpha_j = \gamma_j \text{ и } \alpha_{j+1} = \beta_{j+1} \geq \gamma_{j+1}$$

следователно $\varphi_1 > \varphi_3$.

Случай 2: i = j. От (*) и (**) имаме

$$\alpha_1 = \gamma_1, \ldots, \alpha_i = \gamma_i, \alpha_{i+1} > \beta_{i+1} = \beta_{j+1} > \gamma_{j+1}$$

следователно $\varphi_1 > \varphi_3$

Случай 3: i < j. От (*) и (**) имаме

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_i = \beta_i, \alpha_{i+1} > \beta_{i+1} = \gamma_{i+1}, \text{ защото } i+1 \leq j.$$

Следователно $\varphi_1 > \varphi_3$□

<u>Твърдение 2:</u>
Нека $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ са ненулеви едночлени и $\varphi_1 > \varphi_2$. Тогава $\varphi_1\varphi_3 > \varphi_2\varphi_3$.

<u>Д-во:</u>
Нека
$\varphi_1 = Ax_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$
$\varphi_2 = Bx_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}$
$\varphi_3 = Cx_1^{\gamma_1}\ldots x_n^{\gamma_n}$
От $\varphi_1 > \varphi_2$ следва, че съществува такова i, че

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_i = \beta_i \text{ и } \alpha_{i+1} > \beta_{i+1} \qquad (\#)$$

Имаме
$\varphi_1\varphi_3 = ACx_1^{\alpha_1+\gamma_1}\ldots x_n^{\alpha_n+\gamma_n}$
$\varphi_1\varphi_3 = BCx_1^{\beta+_1\gamma_1}\ldots x_n^{\beta_n+\gamma_n}$
От (#) получаваме $\alpha_1 + \gamma_1 = \beta_1 + \gamma_1, \ldots, \alpha_i + \gamma_i = \beta_i + \gamma_i$ и $\alpha_{i+1} + \gamma_{i+1} > \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}$.
Следователно $\varphi_1\varphi_3 > \varphi_2\varphi_3$□

<u>Твърдение 3:</u>
Нека $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ са едночлени. Ако $\varphi_1 > \varphi_2$ и $\varphi_3 > \varphi_4$, тогава $\varphi_1\varphi_3 > \varphi_2\varphi_4$.

<u>Д-во:</u>
Имаме

$\varphi_1\varphi_3 > \varphi_2\varphi_3$ от Тв2
$\varphi_2\varphi_3 > \varphi_2\varphi_4$ от Тв2

от последните неравенства и Тв1 следва $\varphi_1\varphi_3 > \varphi_2\varphi_4$□

<u>Определение</u>:
Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е ненулев полином. Най-големият в лексикографски смисъл едночлен на f се нарича главен едночлен на f.

Тъй като *f* се състои от неподобни едночлените, главения едночлен се определя еднозначно.

Пример:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{2x_1^2x_2x_3}_{\text{главен едночлен}} + x_1x_2^7x_3^{57} + x_1x_2^{77}x_3^{44} - 7x_2^{1054}x_3^{2004}$$

Теорема:

Нека K *е комутативен пръстен, без делители на нулата. Тогава главният едночлен на произведението на краен брой полиноми е равен на произведението на главните едночлени на тези полиноми.*

Д-во:

Достатъчно е да докажем теоремата за произведение два полинома.

Нека

$$f(x_1, \dots, x_n) = Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} + \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

, където $Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ е главният едночлен на *f*, т.е. всеки едначлен на φ е по-малък от $Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$

$$g(x_1, \dots, x_n) = Bx_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n} + \psi(x_1, \dots, x_n)$$

, където $Bx_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}$ е главният едночлен на *g*, т.е. всеки едначлен на ψ е по-малък от $Bx_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}$.

Тогава

$$f.g = ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n} + Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\psi + Bx_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}\varphi + \psi\varphi$$

Трябва да докажем, че главният едночлен на f.g е $ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$. Този едночлен е ненулев, защото в K няма делители на нулата и $A \neq 0, B \neq 0$.

$ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$ е по-голям от всеки едночлен на $Ax_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\psi$ съгласно Твърдение2

$ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$ е по-голям от всеки едночлен на $Bx_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}\varphi$ съгласно Твърдение2

$ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$ е по-голям от всеки едночлен на φψ съгласно Твърдение3

Следователно $ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$ е главен едночлен на fg

С това теоремата е доказана.□

Следствие:

Ако в пръстена K *няма делители на нулата, тогава в* K[$x_1, \dots, x_n$] *също няма делители на нулата.*