Теорема за епиморфизмите на групи

Теорема за епиморфизмите на групи

Нека G *и* G' *са групи и* $G \xrightarrow{\varphi} G'$ *е епиморфизъм. Означаваме* $Ker(\varphi) = N$. *Тогава изображението* ψ, *което се дефинира по следния начин:*

Ако $a \xrightarrow{\varphi} a'$, *тогава* $aN \xrightarrow{\psi} a'$
е изоморфизъм м/у факторгрупата Z/N *и групата* G'.

Д-во:

Защо ψ **е изображение** (защо всеки съседен клас при ψ има единствен образ)?

Нека $aN = bN$ и нека $a \xrightarrow{\varphi} a'$ и $b \xrightarrow{\varphi} b'$
От $aN = bN$ имаме, че $a^{-1}bN \in N = Ker(\varphi)$ което е равносилно на

$$a^{-1}b \xrightarrow{\varphi} e',$$

където e' е неутралният елемент на G'. Понеже φ е епиморфизъм имаме

$$a^{-1}b \xrightarrow{\varphi} (a')^{-1}b'$$

получаваме

$$(a')^{-1}b' = e' \Rightarrow a' = b'$$

т.е.

$$\psi(aN) = \psi(bN).$$

Това означава, че ψ е изображение.

Защо ψ **е "върху"?**
Нека $a' \in G'$ е произволен елемент. Понеже φ е "върху" имаме, че съществува елемент $a \in G$, такъв че $a \xrightarrow{\varphi} a'$. От дефиницията на ψ имаме $aN \xrightarrow{\psi} a'$. Следователно за произволен елемент $a' \in G'$ съществува елемент $a \in G$, такъв че $aN \xrightarrow{\psi} a'$. Доказахме, че ψ е "върху".

Защо ψ **изобразява различните елементи в пазлични?**

Нека $aN \neq bN$. Това означава, че $a^{-1}b \notin N = Ker(\varphi)$. Ако $a \xrightarrow{\varphi} a'$ и $b \xrightarrow{\varphi} b'$, тогава $\psi(aN) = a'$ и $\psi(bN) = b'$. Понеже φ е епиморфизъм

$a^{-1}b \xrightarrow{\varphi} (a')^{-1}b'$. Понеже $a^{-1}b \notin N = Ker(\varphi)$ имаме $(a')^{-1}b' \neq e'$ т.е. $b' \neq a'$ или $\psi(aN) \neq \psi(bN)$.

До тук доказахме, че ψ е 1-1 изображение.

Остава да докажем, че ψ изобразява произведение в произведение.

Нека aN и bN са произволни съседни класове. Ако $a \xrightarrow{\varphi} a'$ и $b \xrightarrow{\varphi} b'$, понеже φ е епиморфизъм, имаме $ab \xrightarrow{\varphi} a'b'$. Това означава, че $abN \xrightarrow{\psi} a'b'$ и като използваме, че $abN = (aN)(bN)$ получаваме

$$(aN)(bN) \xrightarrow{\psi} a'b'.$$

Получихме, че $\psi(abN) = \psi(aN)\psi(bN)$, с което теоремата е доказана.□

<u>**Забележка:**</u>

Теорема 2 от предишната лекция твърди, че всяка факторгрупа е епиморфен образ на групата. От Теоремата за епиморфизмите на групи следва, че с точност до изоморфизъм други епиморфни образи на групата няма.

Ако групата е адитивна и $N \triangleleft G$ тогава

$$G/N = \{a + N \mid a \in G\}$$

съседните класове се събират по следния начин:

$$(a+N) + (b+N) = (a+b) + N.$$