Ортогоналност

Определение:
Нека L е евклидово пространство и $x,y \in L$. Казваме, че x и y са ортогонални, ако $(x,y) = 0$.

Пример:
1) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ортогонални $\Leftrightarrow \angle(\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ$ или единият от векторите е нулев
2) В E_n $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ са ортогонални $\Leftrightarrow \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = 0$
3) В $C[a,b]$ функциите $f(x)$ и $g(x)$ са ортогонални $\Leftrightarrow \int_a f(x).g(x)\,dx = 0$

Теорема на Питагор:
Нека L е евклидово пространство и $x_1, \ldots, x_k \in L$ и всеки два от тези вектори са ортогонални. Тогава $|x_1 + \ldots + x_k|^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2$

Д-во:
$|x_1, \ldots, x_k|^2 = (x_1 + \ldots + x_к, x_1 + \ldots + x_к) = \sum_{i=1}^{k}(x_i,x_i) + \sum_{i\neq j}(x_i,x_j)$. Понеже $(x_i,x_j) = 0$, $i\neq j$ имаме
$|x_1 + \ldots + x_k|^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2$ □

Определение:
Нека L е евклидово пространство и $x_1, \ldots, x_k \in L$. Казваме, че $x_1, \ldots, x_k$ е ортогонална система, ако:
1) $x_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$
2) всеки два от векторите $x_1, \ldots, x_k$ са ортогонални

Твърдение 1:
Всяка ортогонална система от вектори е линейно независима.

Д-во:
Нека $x_1, \ldots, x_k$ е ортогонална система. Да допуснем, че $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_к x_к = 0$. Тогава

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_к x_к, x_1) = \lambda_1(x_1,x_1) + \lambda_2(x_1,x_2) + \ldots + \lambda_к(x_к,x_1) = 0$$

Понеже $(x_i,x_j) = 0$, $i\neq j$
$\Rightarrow \lambda_1(x_1,x_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 |x_1|^2 = 0$
$x_1 \neq 0 \Rightarrow |x_1| \neq 0 \Rightarrow |x_1|^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Аналогично се доказва, че $\lambda_2, \ldots, \lambda_к$ са равни на нула.

Следствие:
Нека L е крайномерно евклидово пространство, $\dim L = n$. Тогава броя на векторите във всяка ортогонална система не надминава n.

Определение:
Нека L е крайномерно евклидово пространство и $e_1, \ldots, e_n$ е базис. Казваме, че този базис е ортогонален, ако всеки два негови вектора са ортогонални, т.е. ако елементите на този базис образуват ортогонална система.

Теорема 2:
Всяко ненулево крайномерно евклидово пространство има ортогонален базис.

Д-во:
Нека L е евклидово пространство, $\dim L = n$, $n \geq 1$ и $f_1, \ldots, f_n$ е произволен базис на L.
Ортогоналният базис, който търсим ще получим чрез последователна промяна на векторите от базиса $f_1, \ldots, f_n$. За първи вектор на новия базис взимаме $e_1 = f_1$. Втория вектор го търсим във вида $e_2 = f_2 + \lambda_1 f_1$. Искаме $(e_1,e_2) = 0$. Поради това $(f_2 + \lambda_1 e_1, e_1) = (f_2,e_1) + \lambda(e_1,e_1) = 0$.
$\Rightarrow \lambda = -(f_2,e_1) / (e_1,e_1)$.
Ако λ бъде избрана от последното равенство, тогава e_1 и e_2 са ортогонални.
Защо e_2 не е нулев?
$e_2 = f_2 + \lambda_1 f_1$. Ако допуснем, че $f_2 + \lambda_1 f_1 = 0$, понеже коефициента пред f_2 е 1 $\Rightarrow f_1$ и f_2 са линейно зависими, което е противоречие, защото те са част от базис. И така f_1 и f_2 са линейно независими.
Векторът e_3 търсим във вида. $e_3 = f_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. Искаме e_3 да е ортогонален, т. е. $(e_3,e_1) = 0$ и $(e_3,e_2) = 0$

$(e_3,e_1) = 0 \Rightarrow (f_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 , e_1) = (f_3,e_1) + \lambda_1(e_1,e_1) + \lambda_2(e_1,e_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -(f_3,e_1) / (e_1,e_1)$
$(e_3,e_2) = 0 \Rightarrow (f_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 , e_2) = (f_3,e_2) + \lambda_1(e_1,e_2) + \lambda_2(e_2,e_2) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -(f_3,e_2) / (e_2,e_2)$
При намерените стойности на λ_1 и λ_2 от тези равенства, e_3 ще бъде ортогонолен на e_1 и e_2.
Защо $e_3 \neq 0$?
Понеже $(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)$ е линейна комбинацая на f_1 и f_2 векторът $e_3 = f_3 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)$ е линейна комбинация на f_1, f_2, f_3 и коефициента пред f_3 в тази линейна комбинация е 1. Ако допуснем,че $e_3 = 0$ следва, че векторите f_1, f_2, f_3 са ленейно зависими. Това е противоречие, защото те са част от базис.
Векторът e_4 го търсим $e_4 = f_4 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)$, λ_1и λ_2 са различни от предишните.
От $(e_4,e_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -(f_4,e_1) / (e_1,e_1)$
$(e_4,e_2) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -(f_4,e_2) / (e_2,e_2)$
$(e_4,e_3) = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -(f_4,e_3) / (e_3,e_3)$
При така намерените стойности e_4 ще бъде ортогонален на e_1, e_2, e_3 . Векторът e_4 не е нулев (доказва се по същият начин както за вектора e_3). Продължавайки по този начин в крайна сметка ще достигнем до ортогоналната система $e_1, \ldots, e_n$. Ясно е, че това ще бъде търсеният базис. Този алгоритъм за намиране на ортогонален базис е известен като алгоритъм на Грам - Шмид.

Определение:
Нека L е евклидово пространство и dimL = n, $n \geq 1$ и $e_1, \ldots, e_n$ е базис на L. Казваме, че този базис е ортонормиран, ако:
1) $|e_i| = 1, i = 1, \ldots, n$
2) *всеки два от тези вектора са ортогонални, т.е. $e_1, \ldots, e_n$ е ортогонална система*

Ако $e_1, \ldots, e_n$ е ортогонален базис, тагава $\frac{e_1}{|e_1|}, \ldots, \frac{e_n}{|e_n|}$ е ортонормиран базис така, че съществуването на ортонормиран базис е очевидно.

Нека $e_1, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис. Тогава

$$(e_i,e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (e_i,e_j) = \delta_{ij} \text{ – символ на Кронекер}$$

т.е. $(e_i,e_j) = \delta_{ij}$ където δ_{ij} е символът на Кронекер □

Пресмятане на скаларното произведение чрез координатите в ортонормиран базис

Нека L е евклидово пространство, dim$L$ = n и $e_1, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис. Ако
$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$
$y = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$
имаме

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mu_i (e_i,e_i) + \sum_{i \neq j} \xi_j \mu_j (e_j,e_j)$$

понеже $(e_i,e_j) = 0$, $i \neq j$ следва
$(x,y) = \xi_1 \mu_1 + \ldots + \xi_n \mu_n$
Последното равенство може да се запише в матричен вид по следния начин :

$$(x,y) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ .. \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Изоморфизъм на Евклидови пространства

Определение:
Нека L и L' са евклидови пространства. Казваме, че тези пространства са изоморфни като евклидови пространства, ако те са изоморфни като линейни пространства и съществува

изоморфизъм $L \xrightarrow{\varphi} L'$, който запазва скаларното произведение в смисъл, че ако $x \xrightarrow{\varphi} x'$ и $y \xrightarrow{\varphi} y'$, тогава $(x,y) = (x',y')$.

Теорема:

Нека L и L' са евклидови пространства и $\dim L = \dim L' = n$. Тогава L и L' са изоморфни като евклидови пространства.

Д-во:

Нека

$e_1, \ldots, e_n$ е ортогонален базис на L и $e_1', \ldots, e_n'$ е ортогонален базис на L'

ако $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n \in L$ дефинираме

$$x \xrightarrow{\varphi} x' = \xi_1 e_1' + \ldots + \xi_n e_n' \in L'$$

това, че φ е изоморфизъм между L и L' вече е доказано в предишните лекции. Остава да проверим, че φ запазва скаларното произведение.

Нека $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$ и $y = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$ тогава

$$x \xrightarrow{\varphi} x' = \xi_1 e_1' + \ldots + \xi_n e_n' \text{ и } y \xrightarrow{\varphi} y' = \mu_1 e_1' + \ldots + \mu_n e_n'$$

понеже $e_1, \ldots, e_n$ е ортогонален базис имаме

$$(x, y) = \xi_1 \mu_1 + \ldots + \xi_n \mu_n .$$

От това, че $e_1', \ldots, e_n'$ е ортогонален базис следва

$$(x', y') = \xi_1 \mu_1 + \ldots + \xi_n \mu_n$$

Доказахме, че $(x,y) = (x',y')$. Следователно φ е изоморфизъм на L и L' като евклидови пространства