Квадратични форми.Привеждане в каноничен вид

Определение:
Квадратична форма на променливите $x_1, . . ,x_n$ наричаме функция от вида:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, . . ,x_n) = {} & c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \dots\dots + c_{1n}x_1x_n + \\
& c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + \dots\dots + c_{2n}x_2x_n + \\
& + \dots\dots + \\
& + c_{n-1\,n-1}x_{n-1}^2 + c_{n-1\,n}\,x_{n-1}x_n + \\
& + c_{nn}x_n^2 ,
\end{aligned}
$$

където c_{ij} се наричат коефициенти на квадратичната форма и ще предполагаме,че са реални числа
Дефинираме $a_{ii} = c_{ii}$, $i = 1, . . , n$ и $a_{ij} = a_{ji} = ½\, c_{ij}$,ako $i \neq j$
По този начин дефинираме симетричната матрица $A = (a_{ij})$
С помощта на тази матрица можем да запишем квадратичната форма в следния вид:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, . . ,x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\
& + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \\
& + \dots\dots\dots + \\
& + a_{n1}x_nx_1 + \dots\dots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

От лемата $\Rightarrow f(x_1, . . ,x_n) = (x_1 \dots x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ .\,. \\ x_n \end{pmatrix}$

Това равенство се нарича матрично представяне на квадратичната форма на $f(x_1, . . ,x_n)$.
Симетричната матрица A се нарича матрица на квадратичната форма. Рангът на A се нарича ранг на квадратичната форма и се бележи с rg(f)
rf(f) = rg(A)

Определение:
Равенствата:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \tau_{11}y_1 + \tau_{12}y_2 + \dots + \tau_{1n}y_n \\
x_2 &= \tau_{21}y_1 + \tau_{22}y_2 + \dots + \tau_{2n}y_n \qquad (1) \\
&\dots\dots\dots \\
x_n &= \tau_{n1}y_1 + \tau_{n2}y_2 + \dots + \tau_{nn}y_n
\end{aligned}
$$

се наричат линейна трансформация на променливите $x_1, . . ,x_n$. Матрицата $T = (\tau_{ij})$ се нарича матрица на тази трансформация. С помощта на матрицата T

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ .\,. \\ x_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y_1 \\ .\,. \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (1')$$

Казваме,че линейната трансформация (1) е обратима, ако T е обратима.

Ще разглеждаме само обратими линейни трансформации. Ако (1) е обратима тогава

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ .\,. \\ y_n \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ .\,. \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Линейната трансформация на променливите $y_1, . . ,y_n$ в (2) се нарича обратна линейна трансформация на (1).

$y_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (2')

$y_n = \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n$

, където $T^{-1} = (\alpha_{ij})$

Това, че (1) и (2') са взаимно обратни означава, че ако пресметнем от (2') при $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ и получим $y_1^0, \ldots, y_n^0$ тогава като заместим $y_1^0, \ldots, y_n^0$ в (1) ще получим първоначалните числа $x_1^0, \ldots, x_n^0$.

Преобразуване матрицата на квадратичната форма при линейна трансформация

Нека е дадена квадратичната форма

$$f(x_1 \ldots x_n) = (x_1 \ldots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

, където A е матрицата на f

Разглеждаме линейната трансформация

$x_1 = \tau_{11}y_1 + \tau_{12}y_2 + \ldots + \tau_{1n}y_n$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (1)

$x_n = \tau_{n1}y_1 + \tau_{n2}y_2 + \ldots + \tau_{nn}y_n$

която записваме в матричен вид по следния начин

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \; T = (\tau_{ij}) \qquad (1')$$

След като в квадратичната форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ заместим $x_1, \ldots, x_n$ чрез техните равни от равенството (1') ще получим нова квадратична форма $\tilde{f}(y_1, \ldots, y_n)$ на променливите $y_1, \ldots, y_n$.

Транспонираме (1') и получаваме

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)\, T^{-1} \qquad (1'')$$

Заместваме (1') и (1'') в (*) и получаваме

$$\tilde{f}(y_1, \ldots, y_n) = (y_1 \ldots y_n)\underbrace{T'AT}_{B} \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{f}(y_1, \ldots, y_n) = (y_1 \ldots y_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (**)$$

$B' = (T'AT)' = T'A'(T')' = T'A'T = T'AT = B \Rightarrow B$ е симетрична

От (**) $\Rightarrow$ коефициентът пред y_i^2 е равен на b_{ii}, а коефициетът пред y_iy_j е равен на $b_{ij} + b_{ji} = 2b_{ij}$ защото $b_{ij} = b_{ji}$.

$\Rightarrow$ B е матрицата на новата квадратична форма.

Така доказахме следната теорема:

Теорема 1:

Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е квадратичната форма с матрица A. Квадратичната форма $\tilde{f}(y_1 \ldots y_n)$, която се получава от $f(x_1, \ldots, x_n)$ след прилагането на линейната трансформация (1) има матрица T'AT , където T е матрицата на линейната трансформация.

Следствие 1:

При обратима линейна трансформация, ранга на квадратичната форма не се променя.

Д-во:
$f(x_1, . . ,x_n)$ е квадратична форма с матрица А. $\tilde{f}(y_1, . . ,y_n)$ се получава след прилаганито на (1) и има матрица T'AT
$rg(f) = rg(A)$
$rg(\tilde{f}) = rg(T'AT)$
Понеже Т е обратима $\Rightarrow rg(T'AT) = rg(A) \Rightarrow rg(f) = rg(\tilde{f})$□

Следствие 2:
При обратима линейна трансформация знака на детерминантата на матрицата на квадратичната форма не се променя.

Д-во:
Нека f има матрица А. Тогава $\tilde{f}$ има матрица $T^{-1}AT$. Имаме

$det(T'AT) = detT'.detA.detT = detT'.detT.detA = (detT)^2.detA \Rightarrow sign(det(T'AT)) = signA$ □

Следствие 3:
Нека $\tilde{f}$ се получава като към f приложим линейната трансформация (1) и тази линейна трансформация е обратима. Нека обратната линейна трансформация на (1) е

$$y_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + ...+ \alpha_{1n}y_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\qquad (2)$$
$$y_n = \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + ...+ \alpha_{nn}y_n$$

Тогава, ако приложим към квадратичната форма $\tilde{f}$ линейната трансформация (2) ще получим първоначалната квадратична форма.

Д-во:
Нека след прилагането на (2) към $\tilde{f}\ (y_1, . . ,y_n)$ означим новополучената квадратична форма с $\tilde{\tilde{f}}(x_1, . . ,x_n)$. Тази квадратична форма има мартица
$(T^{-1})'(T'AT)\ T^{-1} = ((T^{-1})'T)\ A\ (TT^{-1}) = A$
Следователно $\tilde{\tilde{f}} = f$.□

От следствие 3 става ясно, че ако искаме да пресметнем стойността на $f(x_1, . . ,x_n)$ при $x_1 = x_1^0, . . ,x_n = x_n^0$ освен чрез непосредствено заместване, може най-напред да пресметнем $y_1^0, . . , y_n^0$ от (2) при $x_1 = x_1^0, . . ,x_n = x_n^0$ и след тава да заместим получените $y_1^0 , . . , y_n^0$ в новата квадратична форма, защото $f(x_1^0, . . ,x_n^0) = \tilde{\tilde{f}}\ (y_1^0, . . ,y_n^0)$.Този начин за пресмятане стойността на квадратичната форма е целесъобразен, когато новата квадратична форма е по-проста от първоначалната.

Каноничен вид на квадратичната форма

Нека е дадена линейната трансформация

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix},\ T = (\tau_{ij}) \qquad (1)$$

Определение:
Казваме,че линейната трансформация (1) привежда квадратичната форма $f(x_1, . . ,x_n)$ в каноничен вид, ако след прилагането й получаваме квадратична форма от вида

$$\tilde{f}(y_1....y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ...+ \lambda_n y_n^2 \qquad (2)$$

Линейната трансформация (1) трябва да бъде обратима, (2) се нарича канонични вид на $f(x_1....x_n)$.

Теорема 2:
Всяка квадратична форма може да се приведе в каноничен вид, даже с ортогонални трансформации.

Д-во:

Нека $f(x_1, . . ,x_n) = (x_1 . . . x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$, където A е матрица на $f(x_1, . . ,x_n)$

Понеже матрицата A е симетрична от следствието на Теорема 2 за симетричните оператори имаме, че съществува ортогонална матрица T такава, че

$$T'AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 \dots\dots 0 \\ 0 \dots\dots\dots 0 \\ 0 \dots\dots\dots \lambda_n \end{pmatrix}$$

Разглеждаме ортогоналната трансформация

$$\begin{pmatrix} x1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$$

, където T е взета от последното равенство

След като приложим тази линейна трансформация ще получаваме квадратичната форма

$$\tilde{f}(y_1, . . ,y_n) = (y_1 . . . y_n)(T'AT)\begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1 . . . y_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 \dots\dots 0 \\ 0 \dots\dots 0 \\ 0 \dots\dots \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + . . . + \lambda_n y_n^2 . \square$$

Твърдение:
Броят на ненулевите коефициенти във всеки каноничен вид на дадена квадратична форма е еднакъв и е равен на ранга на квадратияната форма.

Д-во:

Нека $\begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$, T е обратима

нека след прилагането на тази линейна трансформация получаваме

$f(x_1, . . ,x_n) \rightarrow \tilde{f}(y_1, . . ,y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + . . . + \lambda_n y_n^2$

Имаме rg(f) = rg(A) и

$$rg(f) = rg(\tilde{f}) = rg\begin{pmatrix} \lambda_1 \;. . . .\; 0 \\ . . . . \\ 0 \quad . . . .\; \lambda_n \end{pmatrix}$$ = броя на ненулевите числа λ_i, $i = 1, . . , n$

$\Rightarrow$ броят на ненулевите коефициенти λ_i в каноничния вид на $f(x_1, . . ,x_n)$ е равен на rg(f) = rg(A)$\square$