Ортогонални оператори

Определение:
Нека A е квадратна матрица елементите, на която са реални числа. Казваме, че тази матрица е ортогонална, ако тя е обратима и обратната и съвпада с неината транспонирана , т.е. $A^{-1} = A'$.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

За да докажем, че една матрица е ортогонална трябва да проверим, че са изпълнени равенствата $A\,A' = A'A = E$. Ще е да проверим само едното от тези равенства тъй-като доказателството на другото е същото. Наистина
Нека $A\,A' = E$ тогава
$\det(A).\det(A') = 1 \Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$
$\Rightarrow$ съществува A^{-1}. Като умножим отляво двете страни на равенството $A\,A' = E$ с A^{-1} получаваме $A^{-1} = A'$.

В произведението AA' всъщност се умножава ред на матрицата A с ред на матрицата A в смисъл на стандартното скаларно произведение. Поради тава $A\,A' = E$ всъщност означава, че когато умножаваме един ред на матрицата A със себе си получаваме 1, а ако умножим два различни реда получаваме 0. Това означава, че редовете на матрицата A образуват ортонормиран базис относно стандартното скаларно произведение. Следователно матрицата A е ортогонална тогава и само тогава, когато редовете й образуват ортонормиран базис относно стандартнато скаларно произведение. По същият начин се убеждаваме (от $A'A=E$), че една матрица е ортогонална тогава и само тогава, когато стълбовете й образуват ортонормиран базис относно стандартнато скаларно произведение. Поради това е вярно :
Следствие: *Ако редовете на една матрица образуват ортонормиран базис, тогава стълбовете й също образуват ортонормиран базис и обратно.*

По-горе доказахме всъщност, че детерминантата на квадратна матрица (ортогонална) е 1 или –1.Има обаче такива матрици, на които детерминантите са ± 1, но те не са ортогонални.
Задача: Да се измисли пример за такава матрица която има детерминанта 1, но не е ортогонална.

Твърдение1:
Матрицата на прехода от ортонормиран базис към ортонормиран базис е ортогонална.
Д-во:
Нека $e_1, \dots, e_n$ и $e^*_1, \dots, e^*_n$ са ортонормирани базиси, като

$e^*_1 = \tau_{11}e_1 + \tau_{12}e_2 + \dots + \tau_{1n}e_n$
………………………………
$e^*_n = \tau_{n1}e_1 + \tau_{n2}e_2 + \dots + \tau_{nn}e_n$

имаме $(e^*_i, e^*_j) = \tau_{i1}\tau_{j1} + \tau_{i2}\tau_{j2} + \dots + \tau_{in}\tau_{jn}$, защото $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис.
Понеже $e^*_1 \dots e^*_n$ е ортонормиран, $(e^*_i, e^*_j) = \delta_{ij}$(символ на Кронекер). следователно

$$\tau_{i1}\tau_{j1} + \tau_{i2}\tau_{j2} + \dots + \tau_{in}\tau_{jn} = \delta_{ij}$$

, което означава, че стълбовете на матрицата на прехода образуват ортонормиран базис. Поради това матрицата на прехода е ортогонална.

Определение:
Нека L е евклидово пространство и A е линеен оператор в L. Казваме, че този линеен оператор е ортогонален, ако $(A(x), A(y)) = (x,y)$ за всички x,y от L.

Свойства на ортогоналните оператори:

Свойство 1:
Ортогоналните оператори запазват дължините на векторите, т.е. $|A(x)| = |x|$
Д-во:
$|A(x)| = \sqrt{(A(x), A(x))} = \sqrt{(x,x)} = |x|$
Свойство 2:
Ортогоналните оператори запазват ортогоналността, т.е. ако два вектора са ортогонални, то и техните образи също са ортогонални.
Д-во:
Нека $(x, y) = 0$. Понеже $(A(x), A(y)) = (x,y)$ имаме $(A(x), A(y)) = 0$, т.е. $A(x)$ и $A(y)$ са ортогонални.

Свойство 3:
Ортогоналните оператори изобразяват ортонормиран базис в ортонормиран базис.
Д-во:
Нека $e_1, \dots, e_n$ е ортогонален базис.
Тъй-като оператора запазва дължините имаме $|e_i| = |A(e_i)|$. Тъй-като операторът запазва ортогоналността всеки два от векторите $A(e_1), \dots, A(e_n)$ са ортогонални. Следователно $A(e_1), \dots, A(e_n)$ е ортонормиран базис□

Твърдение 2:
Ако един линеен оператор изобразява ортонормиран базис в ортонормиран базис, тогава той е ортогонален.
Д-во:
Нека $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис и $e^*_1 = A(e_1), \dots, e^*_n = A(e_n)$ също е ортонормиран базис.
Да разгледаме

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \text{ и } y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$$

тогава имаме

$$A(x) = \xi_1 e^*_1 + \dots + \xi_n e^*_n \text{ и } A(y) = \mu_1 e^*_1 + \dots + \mu_n e^*_n$$

Тъй-като $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис имаме $(x,y) = \xi_1\mu_1 + \dots + \xi_n\mu_n$
От това, че $e^*_1, \dots, e^*_n$ е ортонормиран базис следва $(A(x), A(y)) = \xi_1\mu_1 + \dots + \xi_n\mu_n$
И така $(A(x),A(y)) = (x,y) \Rightarrow A$ е ортогонален оператор□

Твърдение 3:
Матрицата на ортогонален оператор в ортонормиран базис е ортогонална.
Д-во:
Нека $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис и

$A(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \dots + \alpha_{1n}e_n$

…………………………..

$A(e_n) = \alpha_{n1}e_1 + \dots + \alpha_{nn}e_n$

Тъй-като $A(e_1), \dots, A(e_n)$ е ортонормиран базис, матрицата на линейния оператор A може да се разглежда като матрица на прехода от ортонормирания базис $e_1, \dots, e_n$ към ортонормирания базис $A(e_1), \dots, A(e_n)$. Съгласно **Тв.1** тази матрица е ортогонална

Твърдение 4:
Ако един линеен оператор в ортонормиран базис има ортогонална матрица, тогава този линеен оператор е ортогонален.
Д-во:
Нека $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис и

$A(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \dots + \alpha_{1n}e_n$

……………………………..

$A(e_n) = \alpha_{n1}e_1 + \ldots + \alpha_{nn}e_n$

Понеже базисът е ортонормиран имаме

$$(A(e_i), A(e_j)) = \alpha_{i1}\alpha_{j1} + \ldots + \alpha_{in}\alpha_{jn}$$

От това, че матрицата A на A е ортогонална следва

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \ldots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \delta_{ij}$$

От тези разсъждения получаваме, че $(A(e_i), A(e_j)) = \delta_{ij}$
, т.е. $A(e_1), \ldots, A(e_n)$ е ортонормиран базис.Разглежданият линеен оператор изобразява ортонормиран базис в ортонормиран базис. Съгласно **Тв.2** той е ортогонален

Твърдение 5:

Ако един ортогонален оператор има собствен вектор,то неговата собствена стойност е 1 или –1.

Д-во:

Нека A е ортогонален оператор и $A(u) = \lambda u$, $u \neq 0$ тогава

$$(A(u), A(u)) = (\lambda u, \lambda u) = \lambda^2(u,u),$$

но $(A(u), A(u)) = (u,u)$. Следователно $(u,u)= \lambda^2$. Понеже $(u,u) \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.