Пръстени на полиномите на една променлива

Определение:
Нека K е комутативен пръстен. Полином на променлива x над пръстена K, наричаме израз от вида:

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

, където $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ и се наричат коефициенти на f(x)

Полагаме $a_0x^0 = a_0$ и $a_1x^1 = a_1x$. Така, че всеки полином ще има вида $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$
Ако всички коефициенти на f(x) са равни нула, f(x) се нарича нулев полином. Ако f(x) е ненулев, тогава най-голямото естествено число n, за което коефициента пред x^n е различен от нула се нарича степен на f(x) и се бележи ст(f(x)) или deg(f(x))

Примери:
1) ст.$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$
Полиномите от нулева степен и нулевия полином се наричат константи.
2) ст.$f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$
Единствено нулевият полином няма определена степен. Множеството на всички полиноми над пръстена K се бележи с K[x]. Константите образуват подмножество, което съвпада с пръстена K, поради това $K \subseteq K[x]$. Полиномите от вида a_nx^n се наричат едночлени. По-нататък за удобство едночлените с нулеви коефициенти няма да ги пишем. По принцип x^n не е полином, защото няма коефициент. Ако в основния пръстен K има единица, тогава ще считаме, че x^n е полином с коефициент *e*, т.е. $x^n = e.\ x^n$

Определение:
Казваме, че два полинома са равни в алгебричен смисъл, ако те съвпадата буквално, или се различават само с едночлени с нулеви коефициенти.

Примери:
$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_3x^3$
$g(x) = a_0 + a_2x^2 + a_3x^3$
$h(x) = a_0 + 0.x + a_2x^2 + a_3x^3 + 0.x^4$
f(x) и g(x) са равни, защото съвпадата буквално
f(x) и h(x) са равни, защото се различават само с едночлени с нулеви коефициенти

Определение:
Нека K е комутативен пръстен и $f(x) \in K[x]$. Нека $\alpha \in K[x]$.
Ако $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in K[x]$, тагава $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n \in K[x]$ се нарича стойност на f(x) при $x = \alpha$. Ако $f(\alpha) = 0$ казвме, че α е корен на f(x)

Определение:
Нека K е комутативен пръстен и $f(x), g(x) \in K[x]$. Казваме, че f(x) и g(x) са равни във функционален смисъл, ако $f(\alpha) = g(\alpha)$, за всяко $\alpha \in K$.

Ако два полинома са равни в алгебричен смисъл, то очевидно те са равни и във функционален смисъл. Обратното не е вярно.

Примери:
Ако K е пръстенът състоящ се само от два елемента нула и единица, тогава полиномите x^2+1 и x^4+1 над пръстена K са равни във функционален смисъл. Ясно е, че в алгебричен смисъл те не са равни.

Операции

Определение:
Нека K *е комутативен пръстен.*

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in K[x]$
$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m \in K[x]$

Предполагаме, че $m \leq n$.
Сума на $f(x)$ *и* $g(x)$ *наричаме полинома*

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, x + (a_2 + b_2)\, x^2 + \ldots\ldots + (a_m + b_m)\, x^m + \ldots + a_nx^n$$

Нека $f_0(x) = a_0$, $f_1(x) = a_1x, \ldots, f_n(x) = a_nx_n$. Ако пресметнем сумата $f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x)$ с помощта на дефиницията за сума на полиноми ще получим $f(x)$, което означава, че всеки полином е сума на своите едночлени.

Определение:
Нека K *е комутативен пръстен. Произведение на* $f(x)$ *и* $g(x)$ *наричаме полинома*

$$f(x).g(x) = c_0 + c_1x + \ldots.. + c_{n+m}x^{n+m}$$

, където

$$c_0 = a_0.b_0$$
$$c_1 = a_0.b_1 + a_1b_0$$
$$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$$
$$\vdots$$
$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \ldots.. + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i+j=k} a_ib_j\ ,$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$c_{n+m} = a_nb_m$$

т.е. два полинома се умножават като всеки едночлен от единия умножим с всеки едночлен на другия и направим приведение на подобните едночлени.

Твърдение:
Нека К е комутативен пръстен. Относно въведените операции K[x] също е пръстен. Константите образуват подпръстен на K[x], който съвпада с основния пръстен К така, че можем да считаме, че пръстена от полиномите K[x] е разширение на основния пръстен К.
Ако К има единица е, тогава този пръстен разглеждан като полином от нулева степен, ще бъде единица и в пръстена на полиномите.

Проверката да се извърши самостоятелно.

Твърдение:
Нека K *е комутативен пръстен, в който няма делители на нулата и* $f(x), g(x) \in K[x]$ *са ненулеви полиноми. Тогава е вярна равенството*

$$\text{ст.}(\ f(x).g(x)\ ) = \text{ст.}f(x) + \text{ст.}g(x) \qquad (1)$$

Д-во:
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0 \Rightarrow$ ст.$f(x) = n$
$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$, $b_m \neq 0 \Rightarrow$ ст.$g(x) = m$
$f(x).g(x) = a_0b_0 + \ldots + a_nb_nx^{n+m}$
Понеже в пръстена К няма делители на нулата $\Rightarrow a_nb_m \neq 0 \Rightarrow$ст.($f(x).g(x)$) = $n + m$ = ст.$f(x)$ + ст.$g(x)$

<u>Следствие:</u>
Ако в пръстена K *няма делители на нулата, тогава в пръстена* K[x] *също няма делители на нулата.*