<u>Съседни класове. Тедрема на Лагранж. Следствия.</u>

<u>Определение.</u>
Нека G е мултипликативна група и A, B са нейни непразни подмножества произведение AB на тези подмножества наричаме подмножеството на G, което се дефинира с равенството

$$AB = \{g \in G \mid \quad g = ab, a \in A \text{ и } b \in B\}$$

Ако групата е адитивна сумата на $A + B$ се дефинира чрез равенството

$$A + B = \{g \in G \mid g = a + b, a \in A \text{ и } b \in B\}$$

Забележка:
По-принцип

$$AB \neq \{ab \mid a \in A \text{ и } b \in B\}$$

защото в дясната част може да има повторения, т.е. възможно е $ab = a_1 b_1$ и $a \neq a_1, b \neq b_1$. Ако обаче всичките произведения $ab, a \in A, b \in B$ са различни тогава равенството

$$AB = \{ab \mid a \in A \text{ и } b \in B\}$$

е вярно.

<u>Твърдение 1.</u>
Операцията произведение на подмножества на дадена група е асоциативна.

<u>Доказателство:</u>
Нека A, B и C са подмножества на групата G. Нека $g \in (AB)C$. Тогава

$$g = g_1 c, \ \ g_1 \in AB \text{ и } c \in C.$$

От $g_1 \in AB$ имаме

$$g_1 = ab, \quad a \in A \quad \text{и} \quad b \in B$$

следователно $g = (ab)c$, но $(ab)c = a(bc)$. Следователно $g = a(bc) \in A(BC)$. Доказахме, че

$$(AB)C \subseteq A(BC).$$

Обратното включване се доказва по същия начин.

<u>Следствие.</u>
Произведението на краен брой подмножества на дадена група не зависи от начина, по който са поставени скобите.

<u>Твърдение 2.</u>
Нека G е група и H е подгрупа на G. Тогава $HH = H$.

<u>Д-во:</u>

Всеки елемент на HH е произведение на два елемента на подгрупата H следователно $HH \subseteq H$. от друга страна $HH \supseteq eH = H$, така че $HH = H$ □

Определение.
Нека G *е група и* H *е нейна подгрупа. За всеки елемент* $g \in G$ *, произведението* gH *се нарича ляв съседен клас на подгрупата* H *в групата* G *. Елементът* g *се нарича представител на съседния клас* gH *.*

Твърдение 3.
Всеки съседен клас на дадена подгрупа е равномощен на тази подгрупа.

Д-во:
Нека $H = \{e, h, f, ...\}$. Понеже от $ga = gb$ следва $a = b$ имаме

$$gH = \{ge, gh, gf, ...\} .$$

Разглеждаме изображението

$$e \xrightarrow{\varphi} ge,$$
$$h \xrightarrow{\varphi} gh,$$
$$f \xrightarrow{\varphi} gf,$$
$$....................$$

Ясно е че φ изобразява подгрупата H върху съседния клас gH . Понеже елементите $ge, gh, gf, ...$ са различни, φ изобразява различните елементи в различни. И така, φ е 1-1 изображение между H и gH . Следователно

$$| gH | = | H | . \square$$

Твърдение 4.

$$g \in gH .$$

Д-во:
Следва от равенството $g = ge$.□

Следствие.
Вярно е равенството

$$G = \bigcup_{g \in G} gH .$$

Твърдение 5.
Нека G *е група и* H *е нейна подгрупа. Тогава*

$$gH = H \Leftrightarrow g \in H .$$

Доказателство:
1) Нека $gH = H$. Понеже $g \in gH$ имаме $g \in H$.

2) Нека $g \in H$. Тъй като всеки елемент на gH е произведение на два елемента от H имаме $gH \subseteq H$. За да докажем и обратното включване разглеждаме произволно $t \in H$. От очевидното равенство

$$t = g(g^{-1}t)$$

следва $t \in gH$ понеже $g^{-1}t \in H$. Доказахме, че $H \subseteq gH$ и поради това $H = gH$. □

Завележка:
От Твърдение 5 става ясно, че всяка подгрупа е ляв съседен клас на всеки от своите елементи и само на тях.

Твърдение 6.

$$aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H. \qquad (*)$$

Доказателство:
Очевидно е че равенството $aH = bH$ е еквивалентно на равенството $a^{-1}bH = H$. Поради това (*) следва от Твърдение 5. □

Твърдение 7.
Ако $b \in aH$, тогава $bH = aH$.

Доказателство:
От $b \in aH$ следва, че $b = ah$, където $h \in H$. Поради това $a^{-1}b = h \in H$. Съгласно Твърдение 6 $aH = bH$ □

Твърдение 8.
Два леви съседни класа на дадена подгрупа или съвпадат или не се пресичат.

Доказателство:
Нека H е подгрупа на дадена група и $aH \cap bH \neq \emptyset$. Тогава съществува $c \in aH \cap bH$.

От $c \in aH$ и Твърдение 6 имаме $cH = aH$.
От $c \in bH$ и Твърдение 6 имаме $cH = bH$.

Следователно $aH = bH$ □

Определение:
Нека G е група и H е подгрупа на G. Броят на различните съседни класове на H в G се нарича индекс на подгрупата на H в групата G и се бележи с [G:H].

Теорема(на Лагранж):
Нека G е крайна група и H е подгрупа на G. Тогава |G| = |H|.[G:H].Следователно |H| и [G:H] делят |G|.

Д-во:
Съгласно следствието от Твърдение 4 имаме

$$G = \bigcup_{g \in G} gH. \qquad (**)$$

След като в (**) премахнем повтарящите се съседни класове, получаваме

$$G = g_1H \bigcup g_2H \bigcup \ldots \bigcup g_kH ,$$

където k = [G:H]. Съгласно Твърдение 8, $g_iH \bigcap g_jH = \varnothing,\ i \neq j$. Следователно

$$|G| = |g_1H| + |g_2H| + \ldots + |g_kH|.$$

От последното равенство и Твърдение 3 следва

$$|G| = k\,|H| \ \square$$

Следствие 1:
Нека G е крайна група. Тогава редът на всеки елемент от G дели реда на G.

Д-во:
Редът на подгрупата <g> дели |G|. Но редът на <g> е равен на |g|. Следователно |g| дели |G|.□

Следствие 2:
Нека G е крайна група и |G| = n. Тогава $g^n = e$, за всяко $g \in G$.

Д-во:
Нека |g| = k. От Следствие1 следва, че к дели n. Следоватвателно n = k.s
$g^n = g^{ks} = (g^k)^s = e$.□

Задача 1:
Да се докаже, че ако редът на една група е просто число тагава тази група е циклична.

Задача 2:
Да се докаже, че ако една крайна група има повече от един елемента и няма собствени подгрупи, тогава редът на тази група е просто число.

Произведението H.g се нарича десен съседен клас. Всички свойства за левите съседни класове са верни и за десните съседни класове и се доказват по същия начин.

Задача 3:
Да се докаже, че изображението

$$gH \to Hg^{-1}$$

задава 1-1 изображение между левите съседни класове и десните съседни класове на H .

Примери:
1) $GL_n(F) \supset SL_n(F)$.
Нека A, B $\in GL_n(F)$. Тогава A и B са в един съседен клас на подгрупата $SL_n(F)$ тогава и само тагава, когато $A^{-1}B \in SL_n(F)$, което означава, че $\det(A^{-1}B) = 1 \Leftrightarrow \det(A) = \det(B)$.
В един съседен клас на $SL_n(F)$ са тези и само тези матрици, които имат равни детерминанти.

3) Нека G е мултипликативна група на полето на комплексните числа. Тогава

$$H = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$$

е подгрупа на G. Числата z_1 и z_2 имат един и същ съседен клас относно H тогава и само тогава, когато $\left|z_1^{-1} z_2\right| = 1$, т.е. $|z_1| = |z_2|$. Следователно съседните класове на подгрупата H се състоят от комплексни числа с равни модули (геометрично съседните класове ще бъдат концентрични окръжности).

3) Разглеждаме адитивната група на Z и подгрупата $2Z$ на четните числа. В тази ситуация две цели числа m, n ще бъдат в един и същ съседен клас тогава и само тогава, когато $(-m+n) \in 2Z$ т.е. или когато и двете числа са четни, или когато и двете числа са нечетни. Следователно съседните класове са два. Единият от тях се образува от четните числа, т.е. $2Z$, а другият от нечетните.