Закон за инерцията

Определение:
Броят на положителните коефициенти в каноничния вид на дадена канонична форма се нарича положителен индекс на инерцията на тази квадратична форма. Броят на отрицтелните коефициенти се нарича отрицателен индекс на инерцията .

Съгласно Твърдението доказано по горе е вярно равенството:

положителен индекс + *отрицателен индекс* = rg(f) (*)

Теорема (закон за инерцията):
Във всеки каноничен вид на дадена квадратична форма броя на положителните коефициенти е един и същ. Същото е вярно и за броя на отрицателните коефициенти.

Д-во:
От (*) следва, че е достатъчно да докажем само твърдението за положителните коефициенти.

Нека $f(x_1, \ldots, x_2)$ е произволна квадратична форма и

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \ldots + \alpha_{1n}y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \ldots + \alpha_{nn}y_n \end{aligned} \qquad (1)$$

привежда тази квадратична форма в каноничен вид:

(#) $$f(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow{(1)} \tilde{f}(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 - \lambda_{n+1} y_k^2 - \lambda_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - \lambda_r y_r^2 \quad ,$$

където $r = rg(f)$ и $\lambda_i > 0$.
Нека братната линейна трансформация на (1) е

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_{11}x_1 + \ldots + \beta_{1n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \beta_{n1}x_1 + \ldots + \beta_{nn}x_n \end{aligned} \qquad (2)$$

разглеждаме и линейната трансформация

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + \ldots + c_{1n}z_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1}z_1 + \ldots + c_{nn}z_n \end{aligned} \qquad (3)$$

която също привежда квадратичната форма в каноничен вид:

(##) $$f \xrightarrow{(3)} \approx f(z_1, \ldots, z_n) = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_s z_s^2 - \mu_{s+1} z_{s+1} - \ldots - \mu_r z_r^2,$$

където $\mu_i > 0$ и $r = rg(f)$.

Да раэгледаме и обратната линейна трансформация на (3)

$$\begin{aligned} z_1 &= d_{11}x_1 + \ldots + d_{1n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= d_{n1}x_1 + \ldots + d_{nn}x_n \end{aligned} \qquad (4)$$

Трябва да докажем, че $k = s$. Допускаме, че това не е така и нека например $k < s$. Разглеждаме равенствата:

$$y_1 = 0, \dots, y_k = 0 \text{ и } z_{s+1} = 0, \dots, z_n = 0.$$

Заместваме в тези равенства техните равни от (2) и (4). По този начин получаваме хомогенна линейна система на променливите $x_1, \dots, x_n$. Понеже $k < s$ броят на уравненията в тази система е по-малък от n. Следователно тази хомогенна система има ненулево решение $x_1^0, \dots, x_n^0$, т.е. някое $x_i \neq 0$. Числата $x_1^0, \dots, x_n^0$ са избрани така,че като заместим в (2) получаваме $y_1^0 = 0, \dots, y_k^0 = 0$, $y_{k+1}^0, \dots, y_n^0$. Изчисляваме $f(x^0_1, \dots, x^0_n)$ чрез (#) и получаваме

$$f(x^0_1, \dots, x^0_n) = \tilde{f}(0, \dots, 0, y^0_{k+1}, \dots, y^0_n) = -\lambda_{k+1}(y^0_{k+1})^2 - \dots - \lambda_n(y^0_n)^2$$

От последното равенство следва

$f(x^0_1, \dots, x^0_n) < 0$, защото $\lambda_i > 0$. (5)

Числата $x_1^0, \dots, x_n^0$ са избрани така,че като заместим в (4) получаваме $z_1^0, \dots, z_s^0$, $z_{s+1}^0 = 0, \dots, z_n^0 = 0$. Изчисляваме $f(x^0_1, \dots, x^0_n)$ чрез (##) и получаваме

$$f(x^0_1, \dots, x^0_n) = \tilde{\tilde{f}}(z^0_1, \dots, z^0_s, 0, \dots, 0) = \mu_1(z^0_1)^2 + \dots + \mu_s(z^0_s)^2$$

От последното равенство и от (5) $\Rightarrow$ $\mu_1(z^0_1)^2 + \dots + \mu_s(z^0_s)^2 \leq 0$
Понеже $\mu_i > 0 \Rightarrow z^0_1 = \dots = z^0_s = 0$. Освен това $z_{s+1} = 0, \dots, z_n = 0$. Заместваме $z^0_1 = \dots = z^0_s = 0$ в (3) и получаваме $x^0_1 = \dots = x^0_n = 0$. Това е противоречие, защото $x^0_1 = \dots = x^0_n$ е ненулево решение на получената по-горе хомогенна система. Полученото противоречие доказва, че $k = s$□

<u>Положително дефинитни квадратични форми</u>

<u>Определение:</u>
Казваме, че квадратичната форма $f(x_1, \dots, x_n)$ е положително дефинитна, ако $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, за всяко $(x_1, \dots, x_n) \in \measuredangle_n$ и $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, само когато $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

<u>Теорема:</u>
Квадратичната форма $f(x_1, \dots, x_n)$ е положително дефинитна, тогава и само тогава, когато положителният индекс на инерцията е равен на броя на променливите, т.е. ако в каноничния вид на тази квадратична форма всичките n коефициента са положителни.

<u>Д-во:</u>
Нека $f(x_1, \dots, x_n)$ е квадратична форма и линейната трансформация

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \dots + \alpha_{1n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \dots + \alpha_{nn}y_n \end{aligned} \quad (1)$$

привежда тази квадратична форма в каноничен вид:

$$(*) \quad f \to \tilde{f}(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y^2_1 + \dots + \lambda_n y^2_n$$

Да разгледаме и обратната линейна трансформация

$y_1 = \beta_{11}x_1 + \ldots + \beta_{1n}x_n$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (2)
$y_n = \beta_{n1}x_1 + \ldots + \beta_{nn}x_n$

I Да предположим, че $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Нека $y^0{}_1, \ldots, y^0{}_n$ се получават от (2) при $x^0{}_1 = x_1, \ldots, x_n = x^0{}_n$

От (*) $\Rightarrow f(x^0{}_1, \ldots, x^0{}_n) = \tilde{f}(y^0{}_1, \ldots, y^0{}_n) = \lambda_1 y^0{}_1{}^2 + \ldots + \lambda_n y^0{}_n{}^2$,
Понеже $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n \Rightarrow f(x^0{}_1, \ldots, x^0{}_n) \geq 0$
Нека $f(x^0{}_1, \ldots, x^0{}_n) = 0$. Тогава $\tilde{f}(y^0{}_1, \ldots, y^0{}_n) = \lambda_1(y^0{}_1)^2 + \ldots + \lambda_n(y^0{}_n)^2 = 0$
$\Rightarrow y^0{}_1 = \ldots = y^0{}_n = 0$, защото $\lambda_i > 0$.
Заместваме в (1) и получаваме $x^0{}_1 = \ldots = x^0{}_n = 0$. Следователно f е положително дефинитна.

II Нека някое $\lambda_i \leq 0$
Разглеждаме $y^0{}_1 = 0, \ldots, y^0{}_i = 1, \ldots, y^0{}_n = 0$. Заместваме в (1) и получаваме $x^0{}_1 = \alpha_{1i}, \ldots, x^0{}_n = \alpha_{ni}$.
Линейната трансформация (1) е обратима $\Rightarrow$ стълбовете на матрицата на тази линейна трансформация не са нулеви. Следователно $(x^0{}_1, \ldots, x^0{}_n) \neq (0, \ldots, 0)$
От (*) $\Rightarrow f(x^0{}_1, \ldots, x^0{}_n) = \tilde{f}(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = \lambda_i \leq 0$
Получихме, че квадратичната форма приема неположителна стойност за ненулеви стойности на променливите, което означава, че тя не е положително дефинитна.

<u>Критерий на Силвестър</u> <u>(без доказателство):</u>

Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е квадратична форма с матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$

разглеждаме $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{vmatrix}$ *и т.н.* $\Delta_n = detA$.

Квадратичната форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ е положително дефинитна ,тогава и само тогава, когато $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

<u>Определение:</u>
Квадратичната форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ е отрицателно дефинитна, ако $f(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$, за всяко $(x_1, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ само когато $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Ясно е, че

f е отрицателно дефинитна $\Leftrightarrow$ -f е положително дефинитна.

Поради това изучаването на отрицателно дефинитните форми е еквивалентно на доказателството за положително дефинитните форми.

Нека *L* е линейно пространство и $\dim L = n$ и $e_1, \ldots, e_n$ е базис на *L*. Нека A е симетрична матрица на положително дефинитна квадратична форма. Разглеждаме

$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$
$y = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$

и дефинираме

$$(x,y) \overset{\text{def}}{=} (\xi_1 \ldots \xi_n) A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ . \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Първите три аксиоми на скаларно произведение са изпълнени за произволна симетрична матрица A. При този избор на матрицата A ще докажем, че е изпълнена и четвъртата аксиома. Наистина

$$(x,x) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)A\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \ldots \\ \xi_n\end{pmatrix}$$

Ако $f(x_1, \ldots, x_n)$ е квадратичната форма форма с матрица A, имаме $(x,x) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$

Понеже f е положително дефинитна $\Rightarrow$ $(x,x) \geq 0$ и $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.□