Глава 11

Гладки и особени точки. Бирационалност на неприводимо многообразие с хиперповърхнина.

Нека $X \subseteq k^n$ е неприводимо афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, а $p \in X$ е точка от X. В Лема-Определение 19 ще установим, че ако основното поле k е с характеристика $\mathrm{char}(k) = 0$, то допирателното пространство на Зариски T_pX към X в p е с размерност $\dim_k(T_pX) \geq \dim(X)$. След това ще докажем, че произволно неприводимо квази-проективно многообразие X над алгебрично затворено поле k е бирационално на афинно пространство или на афинна хиперповърхнина. Това ще ни даде възможност да изведем $\dim_k(T_pX) \geq \dim(X)$ в случая на произволна характеристика на k.

Лема-Определение 19. *Нека $X \subseteq k^n$ е неприводимо афинно многообразие над алгебрично затворено поле k с характеристика $\mathrm{char}(k) = 0$. Тогава допирателното пространство на Зариски T_pX към X в точка $p \in X$ е с размерност*

$$\dim_k(T_pX) \geq \dim(X).$$

Ако $\dim_k(T_pX) = \dim(X)$, то ще казваме, че $p \in X$ е гладка точка. Точка $q \in X$ е особена, ако $\dim_k(T_qX) > \dim(X)$.
Множеството X^{sing} на особените точки на X е собствено Зариски затворено подмножество на X.

Доказателство: Нека $g_1, \ldots, g_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ са пораждащи на простия идеал $I(X) \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$, а

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(p) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (g_1) & \ldots & \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p (g_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (g_m) & \ldots & \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p (g_m) \end{pmatrix} \in k_{m \times n}$$

е матрицата на Якоби на $g_1, \ldots, g_m$ относно $x_1, \ldots, x_n$ в $p \in X$. Съгласно Твърдение 8.11, допирателното пространство на Зариски T_pX се състои от онези допирателни вектори $v_p = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_pk^n$, чиито координати $a_1, \ldots, a_n$ са решения на хомогенната линейна система

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(p) \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = 0_{m \times 1}.$$

Следователно

$$\dim_k(T_pX) + \mathrm{rk} \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(p) = n$$

и трябва да докажем, че ако $\dim(X) = d$, то

$$\mathrm{rk} \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(p) \leq n - d.$$

Използвайки това, че k е алгебрично затворено поле с характеристика 0, ще построим такива пораждащи $g_1, \dots, g_m$ на $I(X) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$, за които рангът $\mathrm{rk}\frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(p) = n - d$ в обща точка $p \in X$ и $\mathrm{rk}\frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(q) \leq n - d$ за $\forall q \in X$. Понеже $\dim_k(T_pX)$ не зависи от избора на пораждащи $g_1, \dots, g_m$ на $I(X)$, рангът $\mathrm{rk}\frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(p)$ на Якобиевата матрица на $g_1, \dots, g_m$ относно $x_1, \dots, x_n$ в p не зависи от избора на $g_1, \dots, g_m$.

Полето на рационалните функции $k(X) = k[x_1 + I(X), \dots, x_n + I(X)]$ е от степен на трансцендентност $\mathrm{tr\,deg}_k(k(X)) = \dim(X) = d$. След евентуална пермутация на пораждащите $x_1 + I(X), \dots, x_n + I(X)$ на $k(X)$ над k можем да предполагаме, че $x_{n-d+1} + I(X), \dots, x_n + I(X)$ са трансцендентни над k и $x_i + I(X)$ е алгебрично над $F = k(x_{n-d+1} + I(X), \dots, x_n + I(X))$ за $\forall 1 \leq i \leq n - d$. Ако $f_i(t, x_{n-d+1} + I(X), \dots, x_n + I(X)) \in F[t]$ е минималният полином на $x_i + I(X)$ над F, а $h_i(x_{n-d+1} + I(X), \dots, x_n + I(X)) \in R = k[x_{n-d+1} + I(X), \dots, x_n + I(X)]$ е общият знаменател на коефициентите на f_i (като полином на t), то $g_i(t, x_{n-d+1} + I(X), \dots, x_n + I(X)) = f_i h_i \in R[t]$ е полином с корен $t = x_i + I(X)$. Следователно $g_i \in I(X)$ за $\forall 1 \leq i \leq n - d$. Допълваме $g_1, \dots, g_{n-d}$ до система пораждащи $g_1, \dots, g_{n-d}, g'_{n-d+1}, \dots, g'_m$ на $I(X) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ като полиномиален идеал и пресмятаме непосредствено, че

$$J'(p) = \frac{\partial(g_1, \dots, g_{n-d}, g'_{n-d+1}, \dots, g'_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(p) =$$

$$\begin{pmatrix}
\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (g_1) & \dots & 0 & \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-d+1}}\right)_p (g_1) & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p (g_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-d}}\right)_p (g_{n-d}) & \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-d+1}}\right)_p (g_{n-d}) & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p (g_{n-d}) \\
\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (g'_{n-d+1}) & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-d}}\right)_p (g'_{n-d+1}) & \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-d+1}}\right)_p (g'_{n-d+1}) & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p (g'_{n-d+1}) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (g'_m) & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-d}}\right)_p (g'_m) & \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-d+1}}\right)_p (g'_m) & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p (g'_m)
\end{pmatrix}.$$

Съгласно Следствие 7.25, минималният полином f_i на $x_i + I(X)$ над F няма кратни корени в обща точка. Оттук g_i няма кратни корени и $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (g_i) \neq 0$ за $\forall 1 \leq i \leq n - d$ в обща точка $p \in X$. Умножаваме по подходящ начин първите $n - d$ реда на $J'(p)$ и прибавяме към следващите редове, така че да получим $J(p)$ с нулеви елементи в сечението на последните $m - (n - d)$ реда и първите $n - d$ стълба. Тогава $J(p) = \frac{\partial(g_1,\dots,g_{n-d},g_{n-d+1},\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(p)$ е матрицата на Якоби на системата полиноми $g_1, \dots, g_{n-d}, g_{n-d+1}, \dots, g_m$ с $g_i = g'_i + \sum\limits_{j=1}^{n-d} \lambda_{ij} g_j$ за $\forall n - d + 1 \leq i \leq m$. Непосредствено се вижда, че $g_1, \dots, g_m$ е също система пораждащи на идеала $I(X)$. Условията $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (g_i) = 0$ за $\forall 1 \leq j \leq n - d$ означават, че $g_i(x_{n-d+1}, \dots, x_n)$ е полином на последните d променливи. Понеже $x_{n-d+1} + I(X), \dots, x_n + I(X)$ е базис на трансцендентност на $k(X)$ над k, $g_i \equiv 0$. По този начин, в обща точка p имаме

$$J(p) = \begin{pmatrix}
\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (g_1) & \dots & 0 & * & \dots & * \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-d}}\right)_p (g_{n-d}) & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

с $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (g_i) \neq 0$ за $\forall 1 \leq i \leq n-d$ и $\mathrm{rk} J(p) = n-d$.
За $\mathrm{rk} J(q) \leq n-d$ във всяка точка $q \in X$ да допуснем, че множеството

$$V = \{q \in X \,|\, \mathrm{rk} J(q) > n-d\} \neq \emptyset$$

е непразно. Допълнението

$$X \setminus V = \{q \in X \,|\, \mathrm{rk} J(q) \leq n-d\}$$

е Зариски затворено в X, защото се задава с анулирането на всички минори на $J(q)$ от ред $(n-d+1)$. Следователно V е Зариски отворено. Вече доказахме, че съществува собствено Зариски затворено подмножество $Z \subset X$, така че $\mathrm{rk} J(p) = n-d$ за $\forall p \in X \setminus Z$. Следователно $(X \setminus Z) \subseteq (X \setminus V)$, откъдето $V \subseteq Z$. Но напразното Зариски отворено подмножество V на неприводимото многообразие X е Зариски гъсто в X, така че Зариски затворената обвивка $X = \mathrm{ZarCl}_X(V) \subseteq \mathrm{ZarCl}_X(Z) = Z$. Противоречието доказва, че $V = \emptyset$.
По определение,

$$X^{\mathrm{sing}} = \{p \in X \mid \dim_k(T_p X) > d\} = \{p \in X \,|\, \mathrm{rk} J(p) < n-d\}$$

е Зариски затвореното подмножество на X, върху което се анулират всички минори на $J(p)$ от ред $n-d$. Видяхме, че над алгебрично затворено поле k с характеристика $\mathrm{char}(k) = 0$, общите точки на X са гладки. В частност, тяхното множество $X^{\mathrm{smooth}} \neq \emptyset$ е непразно и $X^{\mathrm{sing}} \subsetneqq X$, Q.E.D.

Пример 11.1. *Афинното многообразие*

$$X = \{(x,y) \in k^2 \quad | \quad f(x,y) = x^2 + y = 0\}$$

е бирегулярно на афинна права k. В частност, X е неприводимо гладко многообразие с $\dim_k X = 1$.

Изображението $\pi : X \to k$, $\pi(x,y) = x$ е бирегулярно с регулярно обратно $\pi^{-1}(x) = (x, -x^2)$. Следователно π индуцира изоморфизъм на афинните k-алгебри $\pi^* : k[x] \to k[X]$, изоморфизъм $\pi^* : k(x) \to k(X)$ на полетата от рационални функции и изоморфизми $d\pi_{(x_o,y_o)} : T_{(x_o,y_o)} X \to T_{x_o} k = k$ на допирателните пространства на Зариски във всички точки $(x_o, y_o) \in X$.

Пример 11.2. *Множеството от точки*

$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad g(x,y) = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = 0\}$$

е приводимо афинно многообразие с $\dim_{\mathbb{C}} Y = 1$ и единствена особена точка $(0,0)$.

Множествата от точки

$$L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad x + iy = 0\}$$

и

$$L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad x - iy = 0\}$$

са прави през началото $(0,0)$ в $\mathbb{C}^2$, а $Y = L_1 \cup L_2$. Многообразието Y е приводимо, защото е обединение на своите собствени Зариски затворени подмножества L_1 и L_2. По определение, размерността на Y е

$$\dim_{\mathbb{C}} Y := \max(\dim_{\mathbb{C}} L_1, \dim_{\mathbb{C}} L_2) = \max(1,1) = 1.$$

В произволна точка $p = (p_1, p_2)$ допирателното пространство на Зариски

$$T_p Y = \left\{ a \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + b \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \quad | \quad a \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}(p) + b \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}(p) = 0, \quad a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

$$T_pY = \left\{ a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \quad | \quad ap_1 + bp_2 = 0, \quad a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

За $\forall (p_1, p_2) \neq (0,0)$ линейното пространство $T_pY \simeq \mathbb{C}$ е 1-мерно и точката p е гладка. Доколкото $T_{(0,0)}Y = \mathbb{C}^2$ е с размерност $\dim_{\mathbb{C}} T_{(0,0)}Y = 2 > 1 = \dim_{\mathbb{C}} Y$, началото $(0,0) \in Y$ е особена точка на Y.
Ще докажем, че Лема-Определение 19 остава в сила над алгебрично затворено поле с произволна характеристика. За целта ще използваме бирационалността на произволно неприводимо многообразие с афинно пространство или хиперповърхнина. Преминаваме към алгебричната подготовка на доказателството на този факт.

Теорема 20. (Теорема за примитивния елемент) *Нека k е безкрайно поле, α и β са алгебрични над k и β е сепарабелен над k. Тогава съществува такова $\theta \in k(\alpha, \beta)$, че*

$$k(\alpha, \beta) = k(\theta).$$

Пораждащият θ на $k(\alpha, \beta)$ над k се нарича примитивен елемент.

Доказателство: Нека $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ са корените на минималния полином $f_\alpha(x)$ на α над k, а $\beta_1 = \beta, \beta_2, \ldots, \beta_n$ са различните корени на минималния полином $g_\beta(x)$ на β над k. Благодарение на безкрайността на полето k и сепарабелността на β, избираме

$$c \in k, \quad c \neq -\frac{\alpha_i - \alpha_1}{\beta_j - \beta_1} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad \forall 1 < j \leq n.$$

Ще докажем, че $\theta := \alpha + c\beta$ е примитивен елемент на $k(\alpha, \beta)$ над k. От една страна, $k(\theta) = k(\alpha + c\beta) \subseteq k(\alpha, \beta)$. Остава да проверим само $k(\alpha, \beta) \subseteq k(\theta)$. Твърдим, че най-големият общ делител

$$d(x) := (f_\alpha(\theta - cx), g_\beta(x)) = x - \beta \in k(\theta)[x].$$

Наистина, всеки корен на $d(x)$ е общ корен на $f_\alpha(\theta - cx)$ и $g_\beta(x)$. По тъждеството на Безу, всеки общ корен на $f_\alpha(\theta - cx)$ и $g_\beta(x)$ е корен и на $d(x)$. От всички корени $\beta_1, \ldots, \beta_n$ на $g_\beta(x)$ само $\beta = \beta_1$ е корен и на $f_\alpha(\theta - cx)$, защото $f_\alpha(\theta - c\beta) = f_\alpha(\alpha) = 0$ и $f_\alpha(\theta - c\beta_i) = f_\alpha(\alpha + c(\beta - \beta_i)) \neq 0$ за $i > 1$, доколкото $\alpha + c(\beta - \beta_i) \neq \alpha_j$, съгласно избора на c. Следователно $d(x) = x - \beta$ с точност до ненулева мултипликативна константа от полето на коефициентите. Но по алгоритъма на Евклид, $d(x)$ е с коефициенти от полето $k(\theta)$, доколкото $f_\alpha(\theta - cx), g_\beta(x) \in k(\theta)[x]$. Следователно $\beta \in k(\theta)$, откъдето $\alpha = \theta - c\beta \in k(\theta)$ и $k(\alpha, \beta) \subseteq k(\theta)$, Q.E.D.

Следствие 11.3. *Ако k е безкрайно поле, а α и β са сепарабелни над k, то съществува сепарабелен над k примитивен елемент θ, така че $k(\alpha, \beta) = k(\theta)$.*

Доказателство: Нека $f_\alpha(x)$ и $g_\beta(x)$ са минималните полиноми на α и β над K. Да означим с $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1 = \beta, \beta_2, \ldots, \beta_n$ техните корени и да изберем

$$c \in k, \quad c \neq \frac{\alpha_i - \alpha_j}{\beta_p - \beta_q} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i, j \leq m, \quad \forall 1 \leq p \neq q \leq n$$

и $\theta := \alpha + c\beta$. В Твърдение 20 вече доказахме, че $k(\alpha, \beta) = k(\theta)$. Полиномът

$$F(x) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_i - c\beta_j)$$

се анулира в θ. Твърдим, че $F(x) \in k[x]$. Това следва от факта, че $F(x)$ е симетричен полином на $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Съгласно Основната Теорема

за симетричните полиноми, коефициентите на $F(x)$ са полиноми на елементарните симетрични полиноми $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ на $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\tau_1, \dots \tau_n$ на $\beta_1, \dots, \beta_n$ с коефициенти от $\mathbb{Z}[c] \subset k$. По формулите на Виет , коефициентите на $F(x)$ са полиноми на коефициентите на минималните полиноми $f_\alpha(x)$ и $g_\beta(x)$ на $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, съответно, на $\beta_1, \dots, \beta_n$. (Да напомним, че по определение, $f_\alpha(x)$ и $g_\beta(x)$ имат старши коефициенти 1.) Следователно $F(x) \in k[x]$.
Нека $h_\theta(x) \in k[x]$ е минималният полином на θ над k. При деление с частно и остатък $F(x) = h_\theta(x)q(x) + r(x)$, $\deg r(x) < \deg h_\theta(x)$, ако $r(x) \not\equiv 0$, то θ е корен на $r(x)$, $r(\theta) = 0$. Това противоречи на определението за минимален полином $h_\theta(x)$ на θ над k. Следователно $r(x) \equiv 0$ и $h_\theta(x)$ дели $F(x)$. Затова е достатъчно да проверим, че $F(x)$ няма кратни корени, за да твърдим, че $h_\theta(x)$ няма кратни корени и θ е сепарабелно над k. Допускането $\alpha_i + c\beta_j = \alpha_p + c\beta_l$ за някои $1 \leq i, p \leq m$, $1 \leq j \neq q \leq n$ води до $c = \frac{\alpha_p - \alpha_i}{\beta_j - \beta_q}$, което противоречи на избора на c. Следователно $j = q$, откъдето $\alpha_i = \alpha_p$ и $i = p$ съгласно сепарабелността на α над k. Това доказва, че всички корени на $F(x)$ са различни, Q.E.D.
Сега ще докажем така наречената Униформизационна теорема за крайнопородените разширения на алгебрично затворено поле.

ТЕОРЕМА 21. *Нека k е алгебрично затворено поле, а $F = k(t_1, \dots, t_n)$ е крайнопородено разширение на k. Тогава или F е чисто трансцендентно разширение на k или съществуват пораждащи $\tau_1, \dots, \tau_d, \tau_{d+1}$ на $F = k(\tau_1, \dots, \tau_d, \tau_{d+1})$ над k, така че $\tau_1, \dots, \tau_d$ е базис на трансцендентност на F над k, а τ_{d+1} е сепарабелно над $k(\tau_1, \dots, \tau_d)$.*

Доказателство : Ако $d = \operatorname{tr}\deg_k(F)$ е степента на трансцендентност на $F = k(t_1, \dots, t_n)$ над k, то $d \leq n$. За $d = n$ полето F е чисто трансцендентно разширение на k. В случая $d < n$ ще работим с индукция по $n - d$.
След евентуална пермутация на $t_1, \dots, t_n$ можем да предполагаме, че $t_1, \dots, t_d$ е базис на трансцендентност на $F = k(t_1, \dots, t_n)$ над k и да разгледаме полето $E = k(t_1, \dots, t_d)$. Елементът $t_{d+1} \in F$ е алгебричен над E и минималният му полином $0 \not\equiv h_{d+1} \in E[t]$ е неразложим над E. Нека $g(t_1, \dots, t_d) \in k[t_1, \dots, t_d]$ е (най-малкият) общ знаменател на коефициентите на $h_{d+1}(t_1, \dots, t_d, t)$. Тогава $f_{d+1}(t_1, \dots, t_d, t) = h_{d+1}(t_1, \dots, t_d, t)g(t_1, \dots, t_d) \in k[t_1, \dots, t_d, t] = R$ е полином на $t_1, \dots, t_d, t$. Още повече, f_{d+1} е неразложим над k и над $k(t_1, \dots, t_d)$, защото в противен случай всяко разлагане $f_{d+1} = f' f''$ дава разлагане $h_{d+1} = \left(\frac{f'}{g}\right) f''$ с $\frac{f'}{g}, f'' \in k(t_1, \dots, t_d)[t]$. Да напомним, че f_{d+1} има кратни корени точно когато има общ корен с $\frac{\partial f_{d+1}}{\partial t} \in R[t]$. Последното е еквивалентно на съществуването на корен на най-големия общ делител $d(t) = \left(f_{d+1}, \frac{\partial f_{d+1}}{\partial t}\right) \in E[t]$. Съгласно неразложимостта на f_{d+1} над E, това се случва точно когато $d(t) = f_{d+1}(t)$ дели $\frac{\partial f_{d+1}}{\partial t}$. Вземайки предвид, че $\deg_t\left(\frac{\partial f_{d+1}}{\partial t}\right) \leq \deg_t(f_{d+1}) - 1$, стигаме до извода, че $f_{d+1}(t)$ има кратен корен тогава и само тогава, когато $\frac{\partial f_{d+1}}{\partial t} \equiv 0 \in R = k[t_1, \dots, t_d]$. Твърдим, че съществува $1 \leq i \leq d$ с $\frac{\partial f_{d+1}}{\partial x_i}(t, x_1, \dots, x_d) \not\equiv 0$. Тогава $t_{d+1}, t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ е базис на трансцендентност на $F = k(t_1, \dots, t_n)$ над k, а f_{d+1} задава алгебрична зависимост на t_i над k-алгебрата $R_i = k[t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_d]$, а оттам и над полето $E_i = k(t_{d+1}, t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_d)$, без кратни корени. С други думи, t_i е сепарабелен над E_i. Това доказва случая $n = d + 1$. Ако допуснем, че $\frac{\partial f_{d+1}}{\partial x_i}(x_{d+1}, x_1, \dots, x_d) \equiv 0$ за $\forall 1 \leq i \leq d + 1$, то характеристиката $\operatorname{char}(k) = p$ е проста и степенните показатели на $x_1, \dots, x_d, x_{d+1}$ във всеки моном на $f_{d+1}(x_{d+1}, x_1, \dots, x_d)$ се делят на p. Благодарение на алгебричната затвореност на k можем да извлечем p-ти корен от всеки ненулев коефициент на

$f_{d+1}(x_{d+1}, x_1, \ldots, x_d)$ и да представим $f_{d+1}(x_{d+1}, x_1, \ldots, x_d) = f(x_{d+1}, x_1, \ldots, x_d)^p$ чрез някакъв полином $f(x_{d+1}, x_1, \ldots, x_d) \in k[x_{d+1}, x_1, \ldots, x_d]$. Това противоречи на неразложимостта на f_{d+1} над k и доказва, че $\frac{\partial f_{d+1}}{\partial x_i}(x_{d+1}, x_1, \ldots, x_d) \not\equiv 0$ за някое $1 \leq i \leq d$.
В случая $n-d \geq 2$ прилагаме индукционното предположение към полето $F_1 = k(t_1, \ldots, t_{n-1})$, при условие, че t_n е алгебричен над F_1. Получаваме пораждащи $\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1}$ на $F_1 = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1})$ над k, така че $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ е базис на трансцендентност на F_1 над k и α_{d+1} е сепарабелен над $F_0 = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. В резултат, $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ е базис на трансцендентност и на F над k, а t_n е алгебричен над F_0. Съгласно Теорема 20 за примитивния елемент, разширението $F = F_0(\alpha_{d+1}, t_n)$ на безкрайното поле F_0 чрез алгебричния над F_0 елемент t_n и сепарабелния над F_0 елемент α_{d+1} има примитивен елемент $\theta \in F$, така че $F = F_0(\theta) = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \theta)$. Повтаряйки разсъжденията в случая $n - d = 1$ стигаме до извода, че съществува пермутация $\tau_1, \ldots, \tau_d, \tau_{d+1}$ на $\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \theta$, така че $\tau_1, \ldots, \tau_d$ е базис на трансцендентност на F над k и τ_{d+1} е сепарабелен над $k(\tau_1, \ldots, \tau_d)$, Q.E.D.
С това сме готови за установяване на бирационалността на произволно неприводимо многообразие над алгебрично затворено поле с афинно пространство или афинна хиперповърхнина.

Теорема 22. *Всяко неприводимо афинно многообразие X над алгебрично затворено поле k е бирационално или на афинно пространство k^d или на афинна хиперповърхнина $H \subset k^{d+1}$.*

Доказателство: Прилагаме Теорема 21 към полето $k(X)$ на рационалните функции върху X и получаваме, че $k(X)$ е изоморфно или на чисто трансцендентно разширение $k(x_1, \ldots, x_d)$ от степен $d = \operatorname{tr}\deg_k(k(X)) = \dim(X)$, или на разширение $k(X) = k(\tau_1, \ldots, \tau_d, \tau_{d+1})$ породено от базис на тарнсцендентност $\tau_1, \ldots, \tau_d$ на $k(X)$ над k и сепарабелен над $k(\tau_1, \ldots, \tau_d)$ елемент τ_{d+1}. Чисто трансцендентното разширение $k(x_1, \ldots, x_d)$ на k е полето на рационалните функции на афинното пространство k^d. Съгласно Твърдение 7.13, изоморфизмът на функционални полета $k(X) \simeq k(x_1, \ldots, x_d)$ е еквивалентен на бирационалност на X с k^d. Остава да докажем, че ако $F = k(\tau_1, \ldots, \tau_d, \tau_{d+1})$ има базис на трансцендентност $\tau_1, \ldots, \tau_d$ над k и τ_{d+1} е сепарабелен над $F_0 = k(\tau_1, \ldots, \tau_d)$, то съществува афинна хиперповърхнина $H \subset k^{d+1}$ са поле на рационалните функции $k(H) = F$. За целта да разгледаме минималния полином $f(\tau_1, \ldots, \tau_d, t) \in F_0[t]$ на τ_{d+1} над F_0. Ако $g(\tau_1, \ldots, \tau_d) \in k[\tau_1, \ldots, \tau_d]$ е (най-малкият) общ знаменател на коефициентите на f, то $h(\tau_1, \ldots, \tau_d, t) = f(\tau_1, \ldots, \tau_d, t)g(\tau_1, \ldots, \tau_d) \in k[\tau_1, \ldots, \tau_d, t]$ е полином с корен $t = \tau_{d+1}$. Ясно е, че h зависи от t и има една и съща степен $\deg_t(h) = \deg_t(f)$ с f относно t. Хиперповърхнината

$$H = \{x \in k^{d+1} \,|\, h(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) = 0\}$$

има афинен координатен пръстен $k[H] = k[x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}]/\langle h \rangle$ и поле на рационалните функции $k(H) = k(x_1 + \langle h \rangle, \ldots, x_d + \langle h \rangle, x_{d+1} + \langle h \rangle)$. Както в доказателството на Твърдение 10.9 установяваме, че $x_1 + \langle h \rangle, \ldots, x_d + \langle h \rangle$ образуват базис на трансцендентност на $k(H)$ над k и $x_{d+1} + \langle h \rangle$ е корен на полинома $h(x_1 + \langle h \rangle, \ldots, x_d + \langle h \rangle, x_{d+1} + \langle h \rangle) = 0$. По този начин, $k(H) = k(\tau_1, \ldots, \tau_d)(\overline{x_{d+1}})$ е разширение на $k(\tau_1, \ldots, \tau_d)$ с корен $\overline{x_{d+1}}$ на $h(\tau_1, \ldots, \tau_d, t) = 0$. Аналогично, $k(X) = k(\tau_1, \ldots, \tau_d)(\tau_{d+1})$ е разширение на $k(\tau_1, \ldots, \tau_d)$ чрез корен τ_{d+1} на $f(\tau_1, \ldots, \tau_d, t) = 0$. Понеже всеки корен на $f = 0$ е корен на $h = 0$, имаме $k(X) \subseteq k(H)$. Съвпадението на степените на h и f относно t води до $[k(X) : k(\tau_1, \ldots, \tau_d)] = [k(H) : k(\tau_1, \ldots, \tau_d)]$, а оттам и до $K(X) = k(H)$. Последното условие е еквивалентно на бирационалността на X с H, Q.E.D.

Лема 11.4. *Нека X е неприводимо афинно многообразие, а $U \subseteq X$ е непразно Зариски отворено подмножество. Тогава допирателните пространства на Зариски*

$$T_pX = T_pU$$

съвпадат във всяка точка $p \in U$.

Доказателство: Понеже U е Зариски навсякъде гъсто в X, идеалите $I(X) = I(U)$ съвпадат. Допирателното пространство на Зариски

$$T_pX = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \ \mid \ \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0, \ \ \forall f \in I(X) \right\}.$$

Аналогично,

$$T_pU = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \ \mid \ \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0, \ \ \forall f \in I(U) \right\},$$

откъдето $T_pX = T_pU$ за $\forall p \in U$, Q.E.D.

Твърдение 11.5. *Нека $X \subseteq k^n$ е неприводимо афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, а $p \in X$ е точка от X. Тогава допирателното пространство на Зариски T_pX към X в p е с размерност*

$$\dim_k(T_pX) \geq \dim(X).$$

Множеството $X^{\text{sing}} = \{p \in X \mid \dim_k(T_pX) > \dim(X)\}$ на особените точки на X е собствено Зариски затворено подмножество на X.

Доказателство: Преди всичко да отбележим, че ако X е бирационално на неприводимо афинно многообразие $Y \subseteq k^m$, което изпълнява изброените твърдения, то и X изпълнява тези твърдения. По-точно, ако $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$ са непразни Зариски отворени подмножества и $f : U \to V$ е бирегулярно изображение, то във всяка точка $p \in U$ е изпълнено

$$\dim_k(T_pX) = \dim_k(T_pU) = \dim_k(T_{f(p)}V) = \dim_k(T_{f(p)}Y) \geq \dim(Y) = \dim(X).$$

Ако допуснем, че съществува точка $q \in X$ с $\dim_k(T_qX) < \dim(X)$, то както в Лема-Определение 19 забелязваме, че множеството

$$W = \{q \in X \mid \dim_k(T_qX) < \dim(X)\}$$

е непразно Зариски отворено в X и се съдържа в $X \setminus U$. Съгласно неприводимостта на X, Зариски затворената обвивка $X = \overline{W} \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U$, откъдето $U = \emptyset$, противно на избора на непразно Зариски отворено $U \subseteq X$. Следователно $W = \emptyset$ и $\dim_k(T_pX) \geq \dim(X)$ за $\forall p \in X$. Множеството X^{sing} на особените точки се характеризира с анулирането на всички минори от ред $n - d$ в Якобиевата матрица на произволна система пораждащи на $I(X) \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$. Следователно X^{sing} е Зариски затворено подмножество на X.
Твърдим, че ако $Y^{\text{sing}} \subsetneqq Y$, то $V^{\text{sing}} \subsetneqq V$. По-точно,

$$V^{\text{sing}} = \{q \in V \mid \dim_k(T_qV) > \dim(V)\} =$$

$$\{q \in V \mid \dim_k(T_qY) > \dim(Y)\} = V \cap Y^{\text{sing}}.$$

Допускането $V = V^{\text{sing}} = V \cap Y^{\text{sing}}$ води до $V \subseteq Y^{\text{sing}}$. Оттук Зариски затворените обвивки изпълняват включването $Y = \overline{V} \subseteq Y^{\text{sing}}$, което е противоречие. Следователно $V^{\text{sing}} \subsetneqq V$ е собствено Зариски затворено подмножество. Сега ще проверим, че $U^{\text{sing}} \subsetneqq U$. Наистина, бирегулярното изображение $f : U \to V$ индуцира k-линеен изоморфизъм $df_p : T_pU \to T_{f(p)}V$ на съответните допирателни пространства на Зариски. От друга страна, $\dim(U) = \dim(f(U)) = \dim(V)$, така че $\dim_k(T_pU) > \dim(U)$ е еквивалентно на $\dim_k(T_{f(p)}V) > \dim(V)$. С други думи, f се ограничава до бирегулярно изображение $f : U^{\text{sing}} \to V^{\text{sing}}$. Допускането $U^{\text{sing}} = U$ води до $V = f(U) = f(U^{\text{sing}}) = V^{\text{sing}}$ и доказва, че $U^{\text{sing}} \subsetneqq U$. Накрая, от $U^{\text{sing}} \subsetneqq U$ следва $X^{\text{sing}} \subsetneqq X$, защото при $X^{\text{sing}} = X$ би трябвало да имаме $U^{\text{sing}} = U \cap X^{\text{sing}} = U \cap X = U$.

Съгласно Теорема 22, произволно неприводимо афинно многообразие X над алгебрично затворено поле k е бирационално на афинно пространство k^d или на хиперповърхнина $H \subset k^{d+1}$. Остава да докажем твърдението за $X = k^d$ или $X = H$. Съгласно Лема 8.9, допирателното пространство на Зариски $T_p k^d$ в произволна точка $p \in k^d$ е изоморфно на k^d. От друга страна, $\dim k^d = d$, защото полето на рационалните функции на k^d е чисто трансцендентно разширение $k(x_1, \ldots, x_d)$ на k от степен d. Следователно $\dim_k(T_p k^d) = \dim(k^d)$ за $\forall p \in k^d$ и афинното пространство k^d е гладко. С други думи, $(k^d)^{\text{sing}} = \emptyset$.

Нека $h(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \in k[x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}]$ е неразложим над k полином с $\frac{\partial h}{\partial x_{d+1}}(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \not\equiv 0 \in k[x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}]$. Тогава хиперповърхнината

$$H = \{x \in k^{d+1} \,|\, h(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) = 0\}$$

е неприводимо афинно многообразие с допирателни пространства на Зариски

$$T_p H = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \,\Big|\, \sum_{i=1}^{d+1} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (h) = 0 \right\} \text{ за } \forall p \in H.$$

Зариски затвореното подмножество

$$Z = \left\{ p \in H \,\Big|\, \frac{\partial h}{\partial x_{d+1}}(p) = 0 \right\} \subsetneq H$$

се съдържа строго в H, защото в противен случай

$$\frac{\partial h}{\partial x_{d+1}}(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \in I(H) = \langle h \rangle \triangleleft k[x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}],$$

откъдето $\frac{\partial h}{\partial x_{d+1}}(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \equiv 0$. Във всяка точка $p \in H \setminus Z$, допирателното пространство на Зариски

$$T_p H = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \,\middle|\, a_{d+1} = - \frac{\sum\limits_{i=1}^{d} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (h)}{\left(\frac{\partial}{\partial x_{d+1}} \right)_p (h)} \right\} =$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{d} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p - \frac{\sum\limits_{i=1}^{d} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (h)}{\left(\frac{\partial}{\partial x_{d+1}} \right)_p (h)} \left(\frac{\partial}{\partial x_{d+1}} \right)_p \,\middle|\, a_1, \ldots, a_d \in k \right\} \simeq k^d.$$

Вече видяхме, че от $\dim_k(T_p H) \geq \dim(H)$ (в случая, $\dim_k(T_p H) = \dim(H) = d$) за всяка точка p на Зариски отвореното подмножество $(H \setminus Z) \subseteq H$ следва $\dim_k(T_q H) \geq \dim(H)$ за $\forall q \in H$. Още повече, $\emptyset \neq (H \setminus Z) \subseteq H^{\text{smooth}}$ се състои от гладки точки, така че особените точки $H^{\text{sing}} = H \setminus H^{\text{smooth}} \subsetneqq H$ образуват собствено, Зариски затворено подмножество на H, Q.E.D.

Преди да дадем определение за регулярен локален пръстен да напомним, че ако R е ньотеров локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}$ и поле от остатъци $k = R/\mathfrak{M}$, то за $\forall n \geq 0$ факторите $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ са крайномерни линейни пространства над k (виж Следствие 8.5). Прилагайки Лема 8.7 (ii) на Накаяма получаваме, че елементите $\mu_1, \ldots, \mu_l \in \mathfrak{M}^n$ пораждат $\mathfrak{M}^n = \langle \mu_1, \ldots, \mu_l \rangle_R$ като идеал в R, точно когато линейната им обвивка $\text{Span}_k(\mu_1 + \mathfrak{M}^{n+1}, \ldots, \mu_l + \mathfrak{M}^{n+1}) = \mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ поражда $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ като линейно порстранство над k. Още повече, $\mu_1 + \mathfrak{M}^{n+1}, \ldots, \mu_l + \mathfrak{M}^{n+1}$ е минимална система пораждащи на $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ като линейно пространство над k (т.е. $\mu_1+\mathfrak{M}^{n+1},\dots,\mu_l+\mathfrak{M}^{n+1}$ е базис на $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ над k) тогава и само тогава, когато $\mu_1,\dots,\mu_l$ е минимална система пораждащи на $\mathfrak{M}^n=\langle\mu_1,\dots,\mu_l\rangle$ като идеал в R.

Определение 11.6. *Нека R е нътеров локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}$ и поле от остатъци $k=R/\mathfrak{M}$. Ако размерността на Крул*

$$\mathrm{KrullDim}(R)=\dim_k(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2)$$

съвпада с размерността на линейното пространство $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ над k, ще казваме, че R е регулярен локален пръстен.

Може да се докаже, че винаги $\dim_k\left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2\right)\geq \mathrm{KrullDim}(R)$.
Нека $X\subseteq k^n$ е неприводимо афинно многообразие над алгебрично затворено поле k. За произволна точка $p\in X$ разглеждаме локалния пръстен $\mathcal{O}_{p,X}$ с максимален идеал $\mathfrak{M}_{p,X}$ и поле от остатъци $k=\mathcal{O}_{p,X}/\mathfrak{M}_{p,X}$. В Лема 8.2 се убедихме, че допирателното пространство на Зариски $T_pX\simeq\left(\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}\right)^*$ е дуално на линейното пространство $\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}$ над k. От друга страна, $\dim(X)=\mathrm{KrullDim}k[X]=\mathrm{KrullDim}\mathcal{O}_{p,X}$, така че $\dim_k(T_pX)\geq\dim(X)$ приема вида

$$\dim_k\left(\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}\right)\geq \mathrm{KrullDim}\mathcal{O}_{p,X}.$$

По определение, точката $p\in X$ е гладка точно когато $\dim_k\left(\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}\right)=\mathrm{KrullDim}\mathcal{O}_{p,X}$. С други думи, $p\in X^{\mathrm{smooth}}$ е гладка точка тогава и само тогава, когато локалният пръстен $\mathcal{O}_{p,X}$ е регулярен.

Твърдение 11.7. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X\subseteq k^n$ е неприводимо афинно многообразие с множество от особени точки X^{sing}, а Y е затворено неприводимо подмногообразие на X, чийто локален пръстен $\mathcal{O}_{Y,X}$ е регулярен. Тогава Y не се съдържа в X^{sing}.*

Доказателство: Нека $d=\dim(X)$, $r=\dim(Y)$, $s=d-r$. Означаваме с $\mathfrak{p}$ простия идеал на Y в афинния координатен пръстен $k[X]$ на X. Локалният пръстен $\mathcal{O}_{Y,X}=k[X]_{\mathfrak{p}}$ има размерност на Крул s. Поради предположението за регулярност на $k[X]_{\mathfrak{p}}$ можем да изберем s пораждащи $f_1,\dots,f_s$ на максималния идеал $\mathfrak{p}k[X]_{\mathfrak{p}}$ на $k[X]_{\mathfrak{p}}$, така че никои $s-1$ от тях да не пораждат $\mathfrak{p}k[X]_{\mathfrak{p}}\triangleleft k[X]_{\mathfrak{p}}$. Твърдим, че съществува $h\in k[X]\setminus\mathfrak{p}$, така че $f_1,\dots,f_s$ принадлежат на $k[X]_h$ и пораждат идеала $\mathfrak{p}k[X]_h$ на $k[X]_h$. Ако $y_1,\dots,y_m$ пораждат идеала $\mathfrak{p}$ на $k[X]$, то тези елементи пораждат също идеала $\mathfrak{p}k[X]_{\mathfrak{p}}$ над $k[X]_{\mathfrak{p}}$. Следователно съществуват $c_{ij}\in k[X]_{\mathfrak{p}}$, така че $f_i=\sum\limits_j c_{ij}y_j$. От друга страна, f_i също пораждат идеала $\mathfrak{p}k[X]_{\mathfrak{p}}$ над $k[X]_{\mathfrak{p}}$, така че съществуват $d_{ji}\in k[X]_{\mathfrak{p}}$ с $y_j=\sum\limits_i d_{ji}f_i$. Елементите f_j,c_{ij} и d_{ji} са дроби със знаменатели от мултипликативно затвореното подмножество $S=k[X]\setminus\mathfrak{p}$. Избираме h като общ знаменател на f_j,c_{ij} и d_{ji}, така че $f_j,c_{ij},d_{ji}\in k[X]_h$. Тогава е ясно, че f_j и y_i пораждат един и същи идеал в $k[X]_h$, така че $f_1,\dots,f_s$ пораждат $\mathfrak{p}k[X]_h$.
Заменяме $k[X]$ с $k[X]_h$ и X с главното отворено подмножество X_h. Тогава Y се заменя с главното отворено подмножество $Y_{\overline{h}}$, а неговият координатен пръстен $k[Y]=k[X]/\mathfrak{p}$ се заменя с $k[Y]_{\overline{h}}$, където $\overline{h}$ е образът на h в $k[Y]$. Това не променя локалния пръстен $\mathcal{O}_{Y,X}$. По този начин можем да предполагаме, че $\mathfrak{p}$ се поражда от s елемента $f_1,\dots,f_s$. Сега по Твърдение 11.5 съществува гладка точка $y\in Y\setminus Y^{\mathrm{sing}}$. Ще докажем, че y е гладка точка на X, така че $y\in Y\setminus X^{\mathrm{sing}}$, което доказва твърдението.
Нека $\mathfrak{M}$ е максималният идеал на y в $k[X]$. От $y\in Y$ следва, че $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{M}$. Максималният идеал на y в афинния координатен пръстен $k[Y]=k[X]/\mathfrak{p}$ е образът $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}/\mathfrak{p}$ на $\mathfrak{M}$ в $k[Y]$. Понеже y е гладка точка на Y, локалният

пръстен $\mathcal{O}_{y,Y}$ е регулярен локален пръстен с размерност r. Следователно съществуват $g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{M}$, чиито образи $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r} \in \overline{\mathfrak{M}}$ пораждат максималния идеал $\overline{\mathfrak{M}}\mathcal{O}_{y,Y}$ на $\mathcal{O}_{y,Y}$. Съгласно $\mathcal{O}_{y,Y} = \mathcal{O}_{y,X}/\mathfrak{p}\mathcal{O}_{y,X}$, идеалът $(g_1, \ldots, g_r)\mathcal{O}_{y,X}$, породен от $g_1, \ldots, g_r$ в $\mathcal{O}_{y,X}$ изпълнява равенството

$$(g_1, \ldots, g_r)\mathcal{O}_{y,X} + \mathfrak{p}\mathcal{O}_{y,X} = \mathfrak{M}\mathcal{O}_{y,X}.$$

Понеже идеалът $\mathfrak{p}$ се поражда от s елемента $f_1, \ldots, f_s$, идеалът $\mathfrak{p}\mathcal{O}_{y,X}$ се поражда над $\mathcal{O}_{y,X}$ от същите тези s елемента. В резултат, $\mathfrak{M}\mathcal{O}_{y,X}$ се поражда от $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_r$. Това доказва, че $\mathfrak{M}\mathcal{O}_{y,X}$ се поражда от $r + s = \dim \mathcal{O}_{y,X}$ елемента и е регулярен локален пръстен. Следователно y е гладка точка на X, Q.E.D.

Твърдение 11.8. *Нека R е ньотерова локална област с размерност на Крул 1, $\mathfrak{M}$ е максималният идеал на R, а $k = R/\mathfrak{M}$ е полето от остатъци на R. Следните условия са еквивалентни:*
(i) R е пръстен на дискретно нормиране;
(ii) R е целозатворена област;
(iii) максималният идеал $\mathfrak{M}$ е главен;
(iv) $\dim_k(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2) = 1$*, т.е. R е регулярен локален пръстен;*
(v) всеки ненулев собствен идеал на R е от вида $\mathfrak{M}^n$ за някое $n \in \mathbb{N}$;
(vi) съществува $x \in R$, така че всеки ненулев собствен идеал в R е от вида $\langle x^n \rangle$ за $n \in \mathbb{N}$.

Доказателство: Преди всичко да отбележим, че $\mathfrak{M}$ е единственият ненулев прост идеал в R, така че всеки нетривиален идеал $\mathfrak{a} \triangleleft R$ е примарен и има радикал $r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{M}$, съгласно Твърдение 5.16 (iv). Още повече, по Твърдение 5.16 (iii) съществува естествено число n, така че $r(\mathfrak{a})^n = \mathfrak{M}^n \subseteq \mathfrak{a}$. Без ограничение на общността можем да считаме, че n е минималното естествено число с $\mathfrak{M}^n \subseteq \mathfrak{a}$, така че $\mathfrak{M}^{n-1} \not\subseteq \mathfrak{a}$.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Всеки пръстен на дискретно нормиране R е пръстен на нормиране. Следователно R е целозатворена област.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Да предположим, че R е целозатворена, ньотерова, локална област с размерност на Крул 1. За произволен ненулев елемент $0 \neq x_o \in \mathfrak{M}$ да означим с n минималното естествено число, така че $\mathfrak{M}^n \subseteq \langle x_o \rangle$ се съдържа в главния идеал, породен от x_o. Тогава $\mathfrak{M}^{n-1} \not\subseteq \langle x_o \rangle$ и съществува $y_o \in \mathfrak{M}^{n-1} \setminus \langle x_o \rangle$. Ако F е полето от частни на R, то твърдим, че $z_o = \frac{x_o}{y_o} \in F$ има обратен $z_o^{-1} = \frac{y_o}{x_o} \notin R$ извън R. В противен случай, $y_o = x_o z_o^{-1} \in \langle x_o \rangle$. Съгласно целозатвореността на R, елементът $z_o^{-1} \in F$ не е цял над R. По построение, $z_o^{-1}\mathfrak{M} \subseteq R$, защото за произволен елемент $\mu \in \mathfrak{M}$ е в сила $y_o \mu \in \mathfrak{M}^n \subseteq \langle x_o \rangle = x_o R$. Ако допуснем, че $z_o^{-1}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ се оказва модул над областта $R[z_o^{-1}] \subseteq F$. По предположение, пръстенът R е ньотеров, така че главният му идеал $\mathfrak{M} = Rt_1 + \ldots + Rt_m$ е крайнопороден. Нека умножението $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $\varphi(\mu) = z_o^{-1}\mu$ с z_o^{-1} има матрица $A \in R_{m \times m}$ спрямо системата пораждащи $t = (t_1, \ldots, t_n)$ на $\mathfrak{M}$ като R-модул. Тогава $t(A - z_o^{-1}E_m) = 0_{1 \times m}$. Умножавайки отдясно с адюнгираната матрица на $A - z_o^{-1}E_m \in R[z_o^{-1}]_{m \times m}$, получаваме, че $\det(A - z_o^{-1}E_m)t = 0$. Понеже идеалът $\mathfrak{M}$ в областта R има нулев анулатор във F, оттук следва, че $\det(A - z_o^{-1}E_m) = 0$. С други думи, $z_o^{-1} \in F$ изпълнява цяла зависимост от степен m над R и принадлежи на целозатворената област R. Противоречието установява, че $z_o^{-1}\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{M}$, откъдето $z_o^{-1}\mathfrak{M} = R$ и $\mathfrak{M} = z_o R$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Да отбележим, че повдиганията на произволен базис на линейното пространство $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ над k пораждат идеала $\mathfrak{M}$. Оттук, $\dim_k \left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2\right) \leq 1$. Твърдим, че $\mathfrak{M}^n \neq \mathfrak{M}^{n+1}$ за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В противен случай, $\mathfrak{M}^n = \mathfrak{M}^{n+1}$ за крайнопородения R-модул $\mathfrak{M}^n$ води до $\mathfrak{M}^n = 0$ по Лемата на Накаяма. Но

тогава $\mathfrak{M} = r(\mathfrak{M}^n) = r(0) = 0$, което е противоречие. Следователно $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \neq 0$ и $\dim_k\left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2\right) = 1$.
$(iv) \Rightarrow (v)$ От $\dim_k\left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2\right) = 1$ следва, че идеалът $\mathfrak{M} = \langle x \rangle$ е главен. За произволен ненулев собствен идеал $\mathfrak{a} \lhd R$ нека n е минималното естествено, за което $\mathfrak{M}^n \subseteq \mathfrak{a}$, но $\mathfrak{M}^{n-1} \nsubseteq \mathfrak{a}$. Достатъчно е да докажем, че идеалът $\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}/\mathfrak{M}^n$ във фактор-пръстена $\overline{R} = R/\mathfrak{M}^n$ е равен на $\overline{\mathfrak{M}}^{\nu} = (\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^n)^{\nu}$ за някое $\nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq n$. За целта да отбележим, че $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^n$ е максимален идеал в $\overline{R}$, съгласно $\overline{R}/\overline{\mathfrak{M}} \simeq R/\mathfrak{M} = k$. Да допуснем, че $\overline{0} \neq \overline{\mathfrak{a}} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$. От $\overline{\mathfrak{a}} \nsubseteq \overline{0} = \overline{\mathfrak{M}}^n$ следва, че естествените числа ν с условието $\overline{\mathfrak{a}} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}^{\nu}$ са ограничени отгоре. Нека ν е максималното с $\overline{\mathfrak{a}} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}^{\nu}$, така че $\overline{\mathfrak{a}} \nsubseteq \overline{\mathfrak{M}}^{\nu+1}$. Следователно съществува $\overline{y} \in \overline{\mathfrak{a}} \setminus \overline{\mathfrak{M}}^{\nu+1} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}^{\nu} \setminus \overline{\mathfrak{M}}^{\nu+1} = \langle \overline{x}^{\nu} \rangle \setminus \langle \overline{x}^{\nu+1} \rangle$. С други думи, $\overline{y} = \overline{x}^{\nu}\overline{r}$ с $\overline{r} \in \overline{R} \setminus \langle \overline{x} \rangle = \overline{R} \setminus \overline{\mathfrak{M}} = \overline{R}^*$. Оттук $\overline{x}^{\nu} = \overline{yr}^{-1} \in \overline{\mathfrak{a}}$, така че $\langle \overline{x}^{\nu} \rangle \subseteq \overline{\mathfrak{a}} \subseteq \langle \overline{x}^{\nu} \rangle$ и $\overline{\mathfrak{a}} = \langle \overline{x}^{\nu} \rangle = \overline{\mathfrak{M}}^{\nu}$.
$(v) \Rightarrow (vi)$ Достатъчно е да докажем, че максималният идеал $\mathfrak{M}$ на R е главен. За целта да изберем произволен елемент $x_o \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}^2$. По предположение, главният идеал $\langle x_o \rangle$, породен от x_o е естествена степен на максималния идеал на R, $\langle x_o \rangle = \mathfrak{M}^s$. Ако $s \geq 2$, то $x_o \in \mathfrak{M}^s \subseteq \mathfrak{M}^2$ противоречи на избора на $x_o \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}^2$. Следователно $s = 1$ и $\langle x_o \rangle = \mathfrak{M}$.
$(vi) \Rightarrow (i)$ Идеалите $\langle x^s \rangle$ не са прости за $s \geq 2$, така че $\mathfrak{M} = \langle x \rangle$. За $\forall r \in R \setminus \{0\}$ съществува единствено неотрицателно цяло ν, така че $\langle r \rangle = \langle x^{\nu} \rangle$. Оттук $r = x^{\nu}u$ с $u \in R^*$, защото ако $x^{\nu} = rv = x^{\nu}uv$ за някакво $v \in R$, то $uv = 1$ в областта R. По този начин получаваме коректно зададено изображение $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$. Във всеки елемент $\frac{a}{b} \in F \setminus \{0\}$ можем да заместим $a = x^{\alpha}r_o$, $b = x^{\beta}s_o$ за някакви $\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $r_o, s_o \in R^*$. По този начин получаваме представяне $\frac{a}{b} = x^{\alpha-\beta}r_o s_o^{-1}$ с $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$, $r_o s_o^{-1} \in R^*$. Ако $x^{\alpha}r_o = x^{\beta}s_o$ са две представяния с $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\beta \geq \alpha$ и $r_o, s_o \in R^*$, то $x^{\beta-\alpha} = r_o s_o^{-1} \in R^*$ изисква $\beta = \alpha$, а оттам и $r_o = s_o$. Следователно всеки ненулев елемент на F има единствено представяне във вида $x^{\nu}r_o$ с $\nu \in \mathbb{Z}$ и $r_o \in R^*$. Това дава възможност да продължим ν до $F \setminus \{0\}$, полагайки $\nu(x^{\nu}r_o) = \nu$. Допълваме с $\nu(0) = \infty$ и проверяваме, че така полученото изображение

$$\nu : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

е дискретно нормиране с пръстен R, Q.E.D.
Накрая да отбележим, че ако $X \subseteq k^n$ е неприводимо афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, а $Y \subseteq X$ е гладко неприводимо афинно подмногообразие с коразмерност $\mathrm{codim}_X(Y) = \dim(X) - \dim(Y) = 1$, то локалният пръстен $\mathcal{O}_{Y,X}$ на Y в X е пръстен на дискретно нормиране. Наистина, $\mathcal{O}_{Y,X}$ е ньотерова локална област с размерност на Крул 1. Достатъчно е да установим, че $\mathcal{O}_{Y,X}$ е регулярен и да приложим Твърдение 11.8. С други думи, ако $\mathfrak{M}_{Y,X}$ е максималният идеал на $\mathcal{O}_{Y,X}$, трябва да докажем, че $\dim_k\left(\mathfrak{M}_{Y,X}/\mathfrak{M}^2_{Y,X}\right) = 1$. Както в доказателството на Твърдение 11.7, можем да заменим X с главно Зариски отворено подмножество $X_h \subseteq X$ и Y със сечението $Y_h = Y \cap X_h \subseteq Y$, така че простият идеал $I_{X_h}(Y_h) \lhd k[X_h]$ да е главен. Следователно максималният идеал $\mathfrak{M}_{Y,X} = (k[X_h] \setminus I_{X_h}(Y_h))^{-1} I_{X_h}(Y_h)$ е също главен и размерността $\dim_k\left(\mathfrak{M}_{Y,X}/\mathfrak{M}^2_{Y,X}\right) = 1$.