Глава 12

Пред-многообразия

Така както диференцируемите многообразия се моделират локално чрез евклидови пространства, така и квази-проективните многообразия X се моделират локално с афинни многообразия. Това става чрез снабдяване на X със структурен сноп.

Предсноп $\mathfrak{F}$ над топологично пространство X е правило, което на всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ съпоставя абелева група $\mathfrak{F}(U)$. Полагаме $\mathfrak{F}(\emptyset) = 0$. За всяка двойка отворени подмножества $U \supseteq V$ съществува ограничаващо изображение $\rho_{U,V} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$. Ограничаващите изображения са съгласувани в смисъл, че $\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{F}(U)} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(U)$ и произволна тройка $U \supseteq V \supseteq W$ отворени подмножества на X определя комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(U) \arrow[r, "\rho_{U,V}"] \arrow[dr, "\rho_{U,W}"'] & \mathfrak{F}(V) \arrow[d, "\rho_{V,W}"] \\
 & \mathfrak{F}(W)
\end{tikzcd}$$

$\rho_{U,W} = \rho_{V,W}\rho_{U,V}$.

Всеки морфизъм $\Phi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ на предснопове се състои от хомоморфизми $\Phi(U) : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{G}(U)$, отговарящи на отворените $U \subseteq X$. Тези хомоморфизми са съгласувани с ограничаващите изображения посредством комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(U) \arrow[r, "\Phi(U)"] \arrow[d, "\rho^{\mathfrak{F}}_{U,V}"'] & \mathfrak{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathfrak{G}}_{U,V}"] \\
\mathfrak{F}(V) \arrow[r, "\Phi(V)"] & \mathfrak{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Определение 12.1. *Предснопът $\mathfrak{F}$ върху X е сноп, ако за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$, всяко покритие $U = \cup_{i \in I} U_i$ с непразни отворени $U_i \subseteq X$ и всяка фамилия $\{s_i\}_{i \in I}$ от $s_i \in \mathfrak{F}(U_i)$ с $\rho_{U_i, U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j, U_i \cap U_j}(s_j)$ за $\forall i, j \in I$ съществува единствен елемент $s \in \mathfrak{F}(U)$, така че $\rho_{U,U_i}(s) = s_i$ за $\forall i \in I$.*

Да напомним, че частично определена релация $\leq$ в множество I е частична наредба, ако
(i) $x \leq x$ за $\forall x \in I$;
(ii) от $x \leq y$ и $y \leq x$ следва $x = y$;
(iii) от $x \leq y$ и $y \leq z$ следва $x \leq z$.

Определение 12.2. *Частично нареденото множество I е насочена система от индекси, ако за произволни $i, j \in I$ съществува $k \in I$, така че $k \leq i$ и $k \leq j$.*

Насочена система $\{A_i\}_{i\in I}$ от множества, абелеви групи, R-модули (над фиксиран пръстен R) или k-алгебри (над фиксирано поле k) е фамилия от споменатите обекти, индексирана с насочена система I, така че за $\forall i \geq j$ от I съществува морфизъм $\rho_{i,j} : A_i \to A_j$. Директната граница $A = \varinjlim A_i$ на насочена система $\{A_i\}_{i\in I}$ е множество, абелева група, R-модул или k-алгебра, заедно с морфизми $\rho_i : A_i \to A$, изпълняващи условия за съгласуваност

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "\rho_{i,j}"'] \arrow[dr, "\rho_i"] & \\ A_j \arrow[r, "\rho_j"] & A \end{tikzcd} \qquad \text{за } \forall i \geq j$$

и следното универсално свойство: За произволен обект B с морфизми $\beta_i : A_i \to B$, съгласувани посредством

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "\rho_{i,j}"'] \arrow[dr, "\beta_i"] & \\ A_j \arrow[r, "\beta_j"] & B \end{tikzcd} \qquad \text{за } \forall i \geq j$$

съществува единствен морфизъм $\beta : A \to B$ с

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "\rho_i"'] \arrow[dr, "\beta_i"] & \\ A \arrow[r, "\beta"] & B \end{tikzcd} \qquad \text{за } \forall i \in I.$$

Построяваме $A = \varinjlim A_i$ като несвързаното обединение на A_i, в което сме отъждествили x_i с $\rho_{i,j}(x_i) \in A_j$ за всички нидекси $i \geq j$ и за всички $x_i \in A_i$. Проверяваме непосредствено, че така построеното A изпълнява небоходимите свойства. Единствеността на директната граница се извежда от универсалното свойство.

Твърдение 12.3. *Нека $\{A_i\}_{i\in I}$ е насочена система от абелеви групи с морфизми $\rho_{i,j} : A_i \to A_j$ за всички $i \geq j$ от I, а $A = \varinjlim A_i$ е нейната директна граница с морфизми $\rho_i : A_i \to A$ за $\forall i \in I$. Ако всички $\rho_{i,j}$ са влагания, то всички ρ_i са влагания.*

Доказателство: Директната граница A е фактор-групата на директната сума $\oplus_{i\in I} A_i$ по нейната подгрупа R_I, породена от елементите $x_i - \rho_{i,j}(x_i)$ за $\forall x_i \in A_i$ и $\forall i \geq j$. Ако $y_i \in A_i$ е в ядрото на $\rho_i : A_i \to A$, то $y_i \in R_I$. Представяме y_i като крайна сума на съотношения от вида $x_p - \rho_{p,q}(x_p)$ и избираме индекс $k \in I$, който е по-малък от всички индекси, участващи в тези съотношения. Тогава $J = \{j \in I \,|\, j \geq k\}$ е насочена система индекси и по построение, $y_i \in R_J$. В резултат, $y_i = 0 \in \varinjlim_{j\in J} A_j$. Понеже J има минимален индекс k, $\varinjlim_{j\in J} A_j = A_k$ и $\rho_{i,k}(y_i) = 0$. Съгласно предположението за инективност на $\rho_{i,k}$ получаваме $y_i = 0$, Q.E.D.

Нека X е топологично пространство, а $\mathfrak{F}$ е предсноп (сноп) върху X. Отворените подмножества $U \subseteq X$, съдържащи фиксирана точка $p \in X$ образуват насочена система относно теоретико-множественото включване. Съответните $\mathfrak{F}(U)$ образуват насочена система относно морфизмите на ограничение $\rho_{U,V} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$ за $\forall U \supseteq V \ni p$. Директната граница

$$\mathfrak{F}_p = \varinjlim_{U\ni p} \mathfrak{F}(U)$$

се нарича слой на еталното пространство на $\mathfrak{F}$ над p. Тя е снабдена с морфизми на ограничение $\rho_p : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}_p$ за $\forall U \ni p$.
Ще казваме, че снопът $\mathcal{O}$ е сноп от пръстени, ако $\mathcal{O}(U)$ са пръстени за всяко отворено U и $\rho_{U,V} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$ са хомоморфизми на пръстени за произволни отворени $U \supseteq V$. Морфизъм на снопове от пръстени $\Phi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ е морфизъм на снопове, в който всяко $\Phi(U) : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{G}(U)$ е хомоморфизъм на пръстени.
Пространство със структурен сноп е наредена двойка $(X, \mathcal{O})$ от топологично пространство X и сноп от пръстени $\mathcal{O}$ върху X. Морфизъм $\Phi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ на пространства със структурни снопове е непрекъснато изображение $\Phi : X \to Y$, което за всяко отворено подмножество $U \subseteq Y$ индуцира хомоморфизъм на пръстени $\Phi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\Phi^{-1}U)$, съгласуван с хомоморфизмите на ограничение посредством комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "\Phi^*"] \arrow[d, "\rho_{U,V}"'] & \mathcal{O}_X(\Phi^{-1}U) \arrow[d, "\rho_{\Phi^{-1}U,\Phi^{-1}V}"] \\
\mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "\Phi^*"] & \mathcal{O}_X(\Phi^{-1}V)
\end{tikzcd}$$

Например, нека X е афинно многообразие. За всяко непразно Зариски отворено подмножество $U \subseteq X$ нека $\mathcal{O}_X(U)$ е пръстенът на регулярните функции върху X. Тогава $(X, \mathcal{O})$ е пространство със структурен сноп. Слоят $\mathcal{O}_p$ на еталното пространство на $\mathcal{O}$ над $p \in X$ е локалният пръстен $\mathcal{O}_{p,X}$. Всяко регулярно изображение $\Phi : X \to Y$ индуцира морфизъм $\Phi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ на пространства със структурен сноп.
Да напомним, че за произволно неприводимо афинно многообразие X, пръстените $\mathcal{O}(U)$ и $\mathcal{O}_p$ са подпръстени на полето $k(X)$ на рационалните функции върху X. Хомоморфизмите на ограничение са влагания, т.е. всяка регулярна функция върху U се определя напълно от своите стойности върху произволно отворено $V \subseteq U$ или чрез образите си в локалните пръстение $\mathcal{O}_p$ за $\forall p \in U$.
Нека $(X, \mathcal{O}_X)$ е пространство със структурен сноп. Казваме, че $U \subseteq X$ е афинно отворено подмножество, ако U е непразно отворено подмножество на X, така че $(U, \mathcal{O}|_U)$ е изоморфно на афинно алгебрично многообразие.

Определение 12.4. *Ако X е неприводимо топологично пространство със структурен сноп $\mathcal{O}$, което има крайно покритие от афинни отворени подмножества, то X се нарича пред-многообразие.*
Ако $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ са пред-многообразия, то морфизмите $\Phi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ на пространства със структурен сноп съвпадат с морфизмите на пред-многообразия.

Пред-многообразията са частен случай на пред-схеми. По-точно, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ е пред-схема, ако Z е (необезателно неприводимо) топологично пространство със структурен сноп от пръстени $\mathcal{O}_Y$, което има (необезателно крайно) покритие $Z = \cup_{i \in I} V_i$ с афинни схеми $V_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, така че слоевете на еталното пространство на $\mathcal{O}_Z$ са локални пръстени.
Следващото твърдение описва снопа $\mathcal{O}$ на регулярните функции върху пред-многообразие $(X, \mathcal{O})$.

Твърдение 12.5. *Нека $(X, \mathcal{O})$ е пред-многообразие над поле k. Тогава съществува поле $F \supset k$, така че :*
(i) за всяко непразно отворено $U \subseteq X$ има влагане $i_U : \mathcal{O}(U) \to F$;

(ii) хомоморфизмите на ограничение $\rho_{U,V} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ за $\forall U \supseteq V$ са влагания с условия за съгласуване

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \arrow[d, "\rho_{U,V}"'] \arrow[dr, "i_U"] & \\ \mathcal{O}(V) \arrow[r, "i_V"] & F \end{tikzcd} \quad ;$$

(iii) хомоморфизмите $\rho_p : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_{p,X}$ за $p \in U$ са влагания;
(iv) локалните пръстени $\mathcal{O}_{p,X}$ се влагат в F;
(v) F е полето от частни на $\mathcal{O}_{p,X}$ за $\forall p \in X$ и на $\mathcal{O}(U)$ за всяко афинно отворено $U \subseteq X$.

Доказателство: Твърдим, че $\rho_{U,V} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ са влагания за произволни $U \supseteq V$. Нека $s \in Ker(\rho_{U,V})$, а $X = \cup_{i=1}^n U_i$ е афинно отворено покритие. Тогава

$$\rho_{U\cap U_i, V\cap U_i}(\rho_{U,U\cap U_i}(s)) = \rho_{V,V\cap U_i}(\rho_{U,V}(s)) = 0.$$

Афинните отворени подмножества $U_i \subseteq X$ са неприводими, както и $U \cap U_i$. Следователно непразните $V \cap U_i$ са Зариски навсякъде гъсти в $U \cap U_i$ и идеалите $I(V \cap U_i) = I(U \cap U_i)$ съвпадат. В резултат, хомоморфизмите на ограничение $\rho_{U\cap U_i, V\cap U_i} : \mathcal{O}(U \cap U_i) \to \mathcal{O}(V \cap U_i)$ са влагания и $\rho_{U,U\cap U_i}(s) = 0$. От твърдението за единственост в аксиомата за сноп следва $s = 0$.
Нека $\mathcal{M}$ е множеството на непразните отворени подмножества на X. Съгласно неприводимостта на X, произволни $U, V \in \mathcal{M}$ имат непразно сечение $U \cap V \neq \emptyset$. По този начин, $\mathcal{M}$ образува насочена система и можем да образуваме директната граница

$$F := \varinjlim \mathcal{O}(U).$$

От това, че $\rho_{U,V} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ са влагания за $\forall U \supseteq V$ от $\mathcal{M}$, следва, че хомоморфизмите $i_U : \mathcal{O}(U) \to F$ са влагания, съгласно Твърдение 12.3. В резултат, можем да считаме, че $\mathcal{O}(U)$ са подпръстени на F.
Нека U е непразно афинно отворено подмножество на X, а $\mathcal{M}_U$ е множеството на непразните отворени подмножества на U. За $\forall V \in \mathcal{M}$ съществува $W \in \mathcal{M}_U$ с $W \subseteq V$, така че директните граници $F = \varinjlim_{V\in\mathcal{M}} \mathcal{O}(V) = \varinjlim_{W\in\mathcal{M}_U} \mathcal{O}(U)$ съвпадат. Но $F(U) = \varinjlim_{W\in\mathcal{M}_U} \mathcal{O}(W)$ съвпада с полето от частни на $\mathcal{O}(U)$ за афинно отворено U. Също така, $F(U)$ е полето от частни на всеки от локалните пръстени $\mathcal{O}_{p,X}$ за $p \in U$. В комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \arrow[d, "\rho_p"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ \mathcal{O}_{p,X} \arrow[r, "\beta"] & F(U) \end{tikzcd}$$

изображенията α и β са влагания, така че и ρ_p е влагане, Q.E.D.
Твърдим, че за всяко отворено подмножество U на пред-многообразие X е изпълнено $\mathcal{O}(U) = \cap_{p\in U}\mathcal{O}_{p,X}$. За афинно отворено подмножество твърдението е ясно, защото $\mathcal{O}(U)$ се състои от рационалните функции върху X, които са регулярни върху U. В общия случай, нека $U = \cup_{i=1}^m U_i$ е афинно отворено покритие. Достатъчно е да проверим, че $\mathcal{O}(U) = \cap_{i=1}^m \mathcal{O}(U_i)$. Включванията $\mathcal{O}(U) \subseteq \mathcal{O}(U_i)$ са ясни, а оттам и $\mathcal{O}(U) \subseteq \cap_{i=1}^m \mathcal{O}(U_i)$. Всеки елемент на $\cap_{i=1}^m \mathcal{O}(U_i)$ има представители $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$ за $\forall 1 \leq i \leq m$, които са съгласувани върху сеченията

$U_i \cap U_j$. Съгласно аксиомата за сноп, съществува $s \in \mathcal{O}(U)$ с $\rho_{U,U_i}(s) = s_i$ или $\cap_{i=1}^m \mathcal{O}(U_i) \subseteq \mathcal{O}(U)$.
По Твърдение 12.5, за произволно отворено U можем да разглеждаме $\mathcal{O}(U)$ като подпръстен на F, въпреки, че F не е обезателно полето от частни на $\mathcal{O}(U)$ за неафинно U. Полето F съвпада с обединението на $\mathcal{O}(U)$ за всички отворени подмножества $U \subseteq X$, ако отъждествяваме $\mathcal{O}(U)$ с неговия образ в $\mathcal{O}(V)$ за $U \supseteq V$.
Ще казваме, че функцията $f \in F$ е регулярна в точка $p \in X$, ако $f \in \mathcal{O}_{p,X}$. Множеството на точките, в които f е регулярна е отворено подмножество на X. Ако $f \in F$ е регулярна в точка $p \in X$, то стойността $f(p)$ е единственото $a \in k$, за което $f - a$ принадлежи на максималния идеал $\mathfrak{M}_{p,X}$ на $\mathcal{O}_{p,X}$. Затова можем да разглеждаме $\mathcal{O}(U)$ като пръстена на коректно определените регулярни функции $U \to k$.

Лема 12.6. *Нека $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ са пред-многообразия, а $f : X \to Y$ е непрекъснато изображение. Тогава съществува най-много един морфизъм на пред-многообразия, индуциран от f.*

Доказателство: Трябва да проверим, че за всяко отворено подмножество $U \subset Y$, хомоморфизмът $f^* : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(f^{-1}U)$ е еднозначно определен от $f : X \to Y$. Ако разглеждаме елементите на $\mathcal{O}(U)$ като функции $g : U \to k$, то съответните им функции върху $f^{-1}U$ са $f^*(g) = gf : f^{-1}U \to k$ и принадлежат на $\mathcal{O}(f^{-1}U)$. По този начин, произволен морфизъм на пространства със структурен сноп се определя еднозначно от съответното непрекъснато изображение на топологични пространства, Q.E.D.
Произволно затворено неприводимо подмножество Y на пред-многообразие X е пред-многообразие. Локалният пръстен $\mathcal{O}_{Y,X} = \cup_{p \in Y} \mathcal{O}_{p,X}$ се състои от онези елементи на F, които са регулярни в поне една точка от Y. Максималният идеал $\mathfrak{M}_{Y,X}$ на $\mathcal{O}_{Y,X}$ се състои от $f \in \mathcal{O}_{Y,X}$ с $f(p) = 0$ за всички $p \in Y$, в които f е регулярна.
Всяко отворено подмножество на пред-многообразие е пред-многообразие, но отворено подмножество на афинно многообразие не е обезателно афинно многообразие.

Пример 12.7. *Нека $X = k^2$ е двумерно афинно пространство, $U = k^2 \setminus \{0^2\}$ е допълнението на началото. Тогава $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}(k^2) = k[x, y]$. Подмножеството U е пред-многообразие, което не е изоморфно на афинно многообразие. Но U се покрива с две главни Зариски отворени подмножества. Това са*

$$U_x = \{(x, y) \in U \mid x \neq 0\} \ \text{ и } \ U_y = \{(x, y) \in U \mid y \neq 0\},$$

изоморфни на афинни многообразия.

Определение 12.8. *Пред-многообразията, които са изоморфни на отворено подмножество на афинно многообразие се наричат квази-афинни пред-многообразия.*

За да определим структура на пред-многообразие върху топологично пространство X е достатъчно да уточним топологията върху X, функционалното поле F и локалните пръстени $\mathcal{O}_{p,X} \subseteq F$. Тогава $\mathcal{O}(U) = \cap_{p \in U} \mathcal{O}_p$ за всяко отворено $U \subseteq X$. Още повече, ако X е покрито с афинни отворени подмножества, то локалните пръстени $\mathcal{O}_p$ са определени за $\forall p \in X$. При условие, че са съвместими, тези данни определят структура на пред-многообразие. Следващата лема за слепване дава достатъчни условия за съвместимост, които приличат на условията за слепване на многообразие от евклидови пространства.

Лема 12.9. (Лема за слепване) *Нека X е неприводимо ньотерово топологично пространство, $\{U_i\}_{i\in I}$ е крайно отворено покритие на X и за $\forall i \in I$ съществуват взаимно еднозначни изображения $\Phi_i : V_i \to U_i$ на афинни многообразия V_i. Да предположим, че за произволни $i, j \in I$ са дадени бирационални изображения $\Phi_{i,j} : V_i \to V_j$, които са регулярни върху $\Phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ и удовлетворяват комутативните диаграми*

$$\begin{tikzcd} \Phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[r, "\Phi_{i,j}"] \arrow[d, "\Phi_i"'] & \Phi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \\ U_i \cap U_j \arrow[ur, "\Phi_j^{-1}"'] & \end{tikzcd} .$$

Тогава X има единствена структура на пред-многообразие, за която $\Phi_i : V_i \to U_i$ са морфизми, наречени карти.

Доказателство: Забелязваме, че X съвпада с фактора на непресичащото се обединение $\coprod_{i\in I} V_i$ по релацията $\Phi_i^{-1}(x) \sim \Phi_j^{-1}(x)$ за $x \in U_i \cap U_j$. Определяме $\mathcal{O}(U)$ като пръстена на функциите $f : U \to k$, за които $f \circ \Phi_i \in \mathcal{O}(\Phi_i^{-1}(U_i \cap U))$, $\forall i \in I$. Остава да проверим, че $\mathcal{O}$ е сноп. Наистина, за произволни отворени $U \supseteq W$ върху X определяме хомоморфизъм на ограничение $\rho_{U,W} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(W)$, полагайки $\rho_{U,W}(f) : W \to k$ да е ограничението на $f : U \to k$. Тогава $\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}(U)}$ и $\rho_{V,W}\rho_{U,V} = \rho_{U,W}$, така че $\mathcal{O}$ е предсноп. За произволно отворено подмножество $W \subseteq X$, произволно отворено покритие $W = \cup_{i\in J} W_i$ и произволни $s_i \in \mathcal{O}(W_i)$ с $\rho_{W_i, W_i\cap W_j}(s_i) = \rho_{W_j, W_i\cap W_j}(s_j)$ за $\forall i, j \in J$ задаваме $s \in \mathcal{O}(W)$ като функцията $s : W \to k$ с $s(p) = s_i(p)$ за $\forall p \in W_i$. Това определение е коректно, защото за $p \in W_i \cap W_j$ е в сила $s_i(p) = \rho_{W_i,W_i\cap W_j}(s_i)(p) = \rho_{W_j,W_i\cap W_j}(s_j)(p) = s_j(p)$. Освен това, $\rho_{W,W_i}(s) = s_i$ за $\forall i \in J$. Следователно $\mathcal{O}$ е сноп върху X, Q.E.D.

Твърдение 12.10. *Нека X и Y са пред-многообразия с афинни отворени покрития $\{U_i\}_{i\in I}$, съответно, $\{V_i\}_{i\in I}$, а $f : X \to Y$ е непрекъснато изображение, което се ограничава до морфизъм на афинни многообразия $f : U_i \to V_i$. Тогава f е морфизъм на пред-многообразия.*

Доказателство: Нека V е отворено подмножество на Y. Трябва да проверим, че за всяко $\Phi \in \mathcal{O}_Y(V)$ композицията Φf е от $\mathcal{O}_X(f^{-1}V)$. По-точно, ако $\Phi : V \to k$, то $\Phi f : f^{-1}V \to k$ е в локалния пръстен $\mathcal{O}_{p,X}$ на всяка точка $p \in f^{-1}V$, защото p принадлежи на някое U_i и сме предположили, че ограниченията $f : U_i \to V_i$ са морфизми на афинни многообразия. От $\Phi f \in \mathcal{O}_{p,X}$ за $\forall p \in f^{-1}V$ следва $\Phi f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$ и f индуцира хомоморфизъм $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$, Q.E.D.

Лема 12.11. *Проективното пространство $\mathbb{P}^n$ е пред-многообразие.*

Доказателство: Стандартните афинни подмножества

$$U_i = \{x = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n \,|\, x_i \neq 0\} \text{ за } \forall 0 \leq i \leq n$$

покриват $\mathbb{P}^n$. Ако

$$\Phi_i : k^n \longrightarrow U_i,$$

$$\Phi_(t_1, \ldots, t_n) = [t_1 : \ldots : t_i : 1 : t_{i+1} : \ldots : t_n]$$

са съответните карти, то $\Phi_{i,j} = \Phi_j^{-1}\Phi_i : k^n \to k^n$ са

$$\Phi_{i,j}(t_1, \ldots, t_n) = \left(\frac{t_1}{t_j}, \ldots, \frac{t_{i-1}}{t_j}, \frac{1}{t_j}, \frac{t_{i+1}}{t_j}, \ldots, \frac{t_{j-1}}{t_j}, \frac{t_{j+1}}{t_j}, \ldots, \frac{t_n}{t_j}\right) \text{ за } i < j,$$

$$\Phi_{i,j}(t_1,\dots,t_n)=\left(\frac{t_1}{t_j},\dots,\frac{t_{j-1}}{t_j},\frac{t_{j+1}}{t_j},\dots,\frac{t_{i-1}}{t_j},\frac{1}{t_j},\frac{t_{i+1}}{t_j},\dots,\frac{t_n}{t_j}\right)\text{ за } i>j$$

и $\Phi_{i,i}=\mathrm{Id}_{k^n}$, така че по Лема 12.9 за слепване, $\mathbb{P}^n$ е пред-многообразие, Q.E.D.

Твърдение 12.12. *Ако X и Y са пред-многообразия, то Декартовото произведение $X\times Y$ има такава структура на пред-многообразие, че за произволни афинни отворени подмножества $U\subseteq X$ и $V\subseteq Y$, влагането $U\times V\to X\times Y$ е морфизъм на пред-многообразия.*

Доказателство: Разглеждаме топологията върху $X\times Y$, чиито отворени подмножества са онези $W\subseteq(X\times Y)$, чиито сечения $W\cap(U\times V)$ са отворени в $U\times V$ за произволни афинни отворени $U\subseteq X$ и $V\subseteq Y$. Ако $\{U_i\}_{i\in I}$ е крайно отворено покритие на X и $\{V_j\}_{j\in J}$ е крайно отворено покритие на Y, то $\{U_i\times V_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ е крайно отворено покритие на $X\times Y$. Избираме карти, удовлетворяващи условията от Лема 12.9 за слепване и установяваме, че $X\times Y$ е пред-многообразие, Q.E.D.

За да въведем понятието отделимост на пред-многообразия, трябва да разгледаме тензорното произведение на k-алгебри. Нека k е поле, A и B са k-алгебри, M е линейното пространство над k с базис $A\times B$, а N е k-линейното подпространство на M, породено от

$$\begin{gathered}(a+a',b)-(a,b)-(a',b),\\(a,b+b')-(a,b)-(a,b'),\\(\lambda a,b)-\lambda(a,b),\\(a,\lambda b)-\lambda(a,b)\end{gathered}$$

за $\forall a,a'\in A$, $\forall b,b'\in B$, $\forall\lambda\in k$. Тогава фактор-пространството $A\otimes_k B=M/N$ се нарича тензорно произведение на A и B над k. Ако $f:A\to C$ и $g:B\to C$ са линейни изображения в пространство C над k, то $F=(f,g):A\times B\to C$ индуцира линейно изображение $\overline{F}:A\otimes_k B\to C$. По-точно, $F:A\times B\to C$ има единствено линейно продължение $F:M\to C$, което се анулира върху N.

Да напомним, че редицата

$$A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A''\longrightarrow 0 \tag{12.1}$$

е точна, ако $Im(f)=f(A')=Ker(g)$ и $Im(g)=g(A)=A''$. Може да се провери, че ако (12.1) е точна редица, то

$$A'\otimes_k B\xrightarrow{f\otimes 1}A\otimes_k B\xrightarrow{g\otimes 1}A''\otimes_k B\longrightarrow 0 \tag{12.2}$$

е точна редица.

Нека k е алгебрично затворено поле, а $X\subseteq k^n$ и $Y\subseteq k^m$ са афинни многообразия с идеали $I(X)\lhd k[x_1,\dots,x_n]$ и $I(Y)\lhd k[y_1,\dots,y_m]$. Тогава Декартовото произведение $X\times Y\subseteq k^{n+m}$ е афинно многообразие с идеал

$$I(X\times Y)=I(X)k[y_1,\dots,y_m]+I(Y)k[x_1,\dots,x_n].$$

Включването $I(X\times Y)\supseteq I(X)k[y_1,\dots,y_m]+I(Y)k[x_1,\dots,x_n]$ е ясно. За обратното включване да допуснем, че полиномът

$$f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\in I(X\times Y)\setminus I(X)k[y_1,\dots,y_m].$$

С индукция по n представяме полинома

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n,y_1,\dots,y_m)=\sum_{i=1}^{d}f_i(x_1,\dots,x_{n-1},y_1,\dots,y_m)x_n^i$$

чрез полиноми $f_i(x_1,\dots,x_{n-1},y_1,\dots,y_m)\in k[x_1,\dots,x_{n-1},y_1,\dots,y_m]$. Ако $X=\{p\}\in k^n$ е точка, то $f(p,y_1,\dots,y_m)\in I(Y)k[x_1,\dots,x_n]$. Ако X не е точка, то съществуват безбройно моного точки от X с фиксирани $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и различни x_n. В частност, за произволни различни $p_{n,0}, \ldots, p_{n,d} \in k$, от

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, p_{n,j}, y_1, \ldots, y_m) = \sum_{i=0}^{d} f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_m) p_{n,j}^i = 0$$

следва $f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_m) \in I(X \times Y)$ за $\forall 0 \leq i \leq d$. Прилагайки n пъти горната процедура получаваме, че $f \in I(Y)k[x_1, \ldots, x_n]$, откъдето

$$I(X \times Y) \subseteq I(X)k[y_1, \ldots, y_m] + I(Y)k[x_1, \ldots, x_n] \text{ и}$$

$$I(X \times Y) = I(X)k[y_1, \ldots, y_m] + I(Y)k[x_1, \ldots, x_n].$$

Ще докажем, че ядрото на естествения хомоморфизъм

$$k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] = k[x_1, \ldots, x_n] \otimes_k k[y_1, \ldots, y_m] \longrightarrow k[X] \otimes_k k[Y]$$

съвпада с $I(X)k[y_1, \ldots, y_m] + I(Y)k[x_1, \ldots, x_n]$, така че $k[X \times Y] \simeq k[X] \otimes_k k[Y]$. За целта ще използваме следната

Лема 12.13. *Нека*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\alpha"] & B' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\beta"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha'"] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & 0 \\
A'' \arrow[r, "\phi''"] \arrow[d] & B'' \arrow[r, "\psi''"] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

е комутативна диаграма от k-алгебри с точни редове и стълбове. Тогава

$$Ker(\gamma'\psi) = Ker(\psi''\beta') = Im(\beta) + Im(\psi).$$

Доказателство: От $Im(\phi) = Ker(\psi)$ и $Im(\beta) = Ker(\beta')$ следва, че $Im(\phi) + Im(\beta) \subseteq Ker(\gamma'\psi)$. Обратно, нека $b \in Ker(\gamma'\psi)$. Тогава $\psi(b) \in Ker(\gamma') = Im(\gamma)$ и съществува $c' \in C'$, така че $\gamma(c') = \psi(b)$. Но ψ' е епиморфизъм, така че съществува $b' \in B'$ с $\psi'(b') = c'$. Тогава $b = (b - \beta(b')) + \beta(b')$, където $b - \beta(b') \in Ker(\psi) = Im(\phi)$, съгласно $\psi(b) - \psi\beta(b') = \gamma(c') - \gamma\psi'(b') = \gamma(c') - \gamma(c') = 0$. Също $\beta(b') \in Im(\beta)$. Следователно $b \in Im(\phi) + Im(\beta)$, Q.E.D.
Сега използваме, че точните редици

$$I(X) \longrightarrow k[k^n] \longrightarrow k[X] \longrightarrow 0 \quad \text{и}$$

$$I(Y) \longrightarrow k[k^m] \longrightarrow k[Y] \longrightarrow 0$$

запазват точността си при тензорно произведение и получаваме комутативната диаграма с точни редове и стълбове

$$
\begin{tikzcd}
I(X)\otimes_k I(Y) \arrow[r] \arrow[d] & I(X)\otimes_k k[k^m] \arrow[r] \arrow[d] & I(X)\otimes_k k[Y] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
k[k^n]\otimes_k I(Y) \arrow[r] \arrow[d] & k[k^n]\otimes_k k[k^m] \arrow[r] \arrow[d] & k[k^n]\otimes_k k[Y] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
k[X]\otimes_k I(Y) \arrow[r] \arrow[d] & k[X]\otimes_k k[k^m] \arrow[r] \arrow[d] & k[X]\otimes_k k[Y] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} . \tag{12.3}
$$

Прилагането на Лема 12.13 към комутативната диаграма (12.3) дава

$$k[X]\otimes_k k[Y] = k[x_1,\ldots,x_n]\otimes_k k[y_1,\ldots,y_m]/I(X\times Y) =$$

$$k[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]/I(X\times Y) = k[X\times Y].$$

Произведението $X\times Y$ на неприводими афинни многообразия $X\subseteq k^n$ и $Y\subseteq k^m$ изпълнява следното универсално свойство: За произволно афинно многообразие Z с регулярни изображения $f : Z\to X$ и $g : Z\to Y$ съществува единствено регулярно изображение

$$f\times g : Z\to X\times Y,$$

$$(f\times g)(z) = (f(z), g(z)),$$

което затваря комутативната диаграма

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "f\times g"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & X\times Y \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & Y
\end{tikzcd}
$$

с каноничните проекции

$$\begin{matrix} p : X\times Y \longrightarrow X, \\ p(x,y) = x, \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} q : X\times Y \longrightarrow Y, \\ q(x,y) = y. \end{matrix}$$

Това следва непосредствено от универсалното свойство на тензорното произведение и изоморфизма $k[X\times Y]\simeq k[X]\otimes_k k[Y]$,

$$
\begin{tikzcd}
k[X] \arrow[r, "p^*"] \arrow[dr, "f^*"'] & k[X\times Y] \arrow[d] & k[Y] \arrow[l, "q^*"'] \arrow[dl, "g^*"] \\
 & k[Z] &
\end{tikzcd} .
$$

Теорема 23. *Произведението $X\times Y$ на пред-многообразия X и Y изпълнява следното универсално свойство: За произволно пред-многообразие Z и произволни морфизми на пред-многообразия $f : Z\to X$ и $g : Z\to Y$ съществува* *морфизъм на пред-многообразия $f \times g : Z \to X \times Y$, който затваря комутативната диаграма*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "f\times g"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & Y \end{tikzcd}$$

с каноничните проекции

$$\begin{array}{ccc} p : X \times Y \longrightarrow X, & & q : X \times Y \longrightarrow Y, \\ p(x,y) = x, & \text{и} & q(x,y) = y. \end{array}$$

Доказателство: Първо ще проверим, че p и q са морфизми на пред-многообразия. Наистина, за всяка точка $(x,y) \in X \times Y$ съществуват афинни отворени подмножества $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$ с $x \in U$ и $y \in V$. Тогава p и q се ограничават до морфизми на афинни многообразия $p : U \times V \to U$ и $q : U \times V \to V$. Съгласно Твърдение 12.10, това е достатъчно за да получим, че $p : X \times Y \to X$ и $q : X \times Y \to Y$ са морфизми на пред-многоборазия.
Нека $p \in Z$. Вземайки предвид непрекъснатостта на f и g, както и фактът, че афинните отворени подмножества образуват база на топологията върху пред-многообразие, получаваме съществуването на афинни отворени подмножества $W \subseteq Z$, $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, така че $p \in W$, $f(W) \subseteq U$ и $g(W) \subseteq V$. По определението за морфизъм на пред-многообразие, ограниченията $f : W \to U$ и $g : W \to V$ са морфизми на афинни многообразия. Тогава $U \times V$ изпълнява универсалното свойство на произведението на афинни многообразия. Това означава съществуване на морфизъм на афинни многообразия $\Phi_W = f|_W \times g|_W : W \to U \times V$, затварящ комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\Phi_W"] \arrow[dr, "g"] & \\ U & U \times V \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & V \end{tikzcd} .$$

Непосредствено се вижда, че $\Phi_W = (f \times g)_W$ е ограничението на $f \times g : Z \to X \times Y$ върху W. Понеже $U \times V$ е афинно отворено подмножество на $X \times Y$, гопните разглеждания са достатъчни за да твърдим, че $\Phi = f \times g : Z \to X \times Y$ е морфизъм на пред-многообразия. Условията $p\Phi = f$ и $q\Phi = g$ гарантират единствеността на Φ, Q.E.D.