Глава 13

Пълни многообразия

Определение 13.1. *Пред-многообразието X е отделимо, ако диагоналът $\Delta = \{(x, x) \,|\, x \in X\}$ е затворено подмножество на $X \times X$.*
Отделимите пред-многообразия X се наричат многообразия.
Ако X и Y са многообразия, то морфизмите $f : X \to Y$ на многообразия са точно морфизмите на пред-многообразия.

Многообразията с размерност 1 се наричат криви, а многообразията с размерност 2 - повърхнини.

Лема 13.2. *(i) Проективното пространство $\mathbb{P}^n$ и афинното пространство k^n са отделими.*
(ii) Ако X е отделимо, то всяко отворено или затворено подмножество Y на X е отделимо.

Доказателство: (i) Диагоналът $\Delta = \{(x, x) \,|\, x \in k^n\}$ е Зариски затвореното подмножество на k^{2n}, зададено с уравненията $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Следователно Δ е затворено в $k^n \times k^n = k^{2n}$ и афинното пространство k^n е отделимо. За отделимостта на $\mathbb{P}^n$, нека $(p, q) \in \overline{\Delta} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ е точка от затворената обвивка $\overline{\Delta}$ на диагонала Δ. Съществува афинно отворено подмножество $U \subset \mathbb{P}^n$, изоморфно на афинното пространство k^n и съдържащо едновременно p и q. Но диагоналът е затворен в U и $p = q$, откъдето следва, че и диагоналът в $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ е затворен.
(ii) По предположение, диагоналът $\Delta_X = \{(x, x) \,|\, x \in X\}$ е затворен в X. Диагоналът $\Delta_Y = \Delta_X \cap (Y \times Y)$ на Y е сечението на диагонала на X с $Y \times Y$. По този начин, Δ_Y е относително затворено в $Y \times Y$ и Y е отделимо, Q.E.D.
Всяко неприводимо затворено подмножество на $\mathbb{P}^n$ е многообразие. Многообразията, изморфни на затворени подмножества на $\mathbb{P}^n$ се наричат проективни многообразия.
Многообразията, които са изоморфни на отворено подмножество на проективно многообразие се наричат квази-проективни.

Лема 13.3. *Ако X и Y са отделими, то $X \times Y$ е отделимо.*

Доказателство: Ако диагоналите $\Delta_X \subseteq X \times X$ и $\Delta_Y \subseteq Y \times Y$ са затворени, твърдим, че произведението им $\Delta_X \times \Delta_Y \subseteq (X \times X \times Y \times Y)$ е затворено. Съгласно Лема 12.9, достатъчно е да проверим, че ако U и V са афинни отворени подмножества, а $X_1 \subseteq U$ и $Y_1 \subseteq V$ са затворени подмножества, то произведението им $X_1 \times Y_1$ е затворено в $U \times V$. По-точно, ако $U \simeq k^n$ и $V \simeq k^m$ имат афинни координатни пръстени $k[x_1, \dots, x_n]$ и $k[y_1 \dots, y_m]$, то идеалът $I(X_1 \times Y_1) = I(X_1)k[y_1, \dots, y_m] + I(Y_1)k[x_1, \dots, x_n]$. Щом $\Delta_X \times \Delta_Y$ е затворено в $X \times X \times Y \times Y$, то $\Delta_{X \times Y}$ е затворено в $X \times Y \times X \times Y$, доколкото транспозицията на втория и третия множител $X \times X \times Y \times Y \to X \times Y \times X \times Y$ е изоморфизъм, Q.E.D.

Определение 13.4. *Многообразието X е пълно, ако за всяко многообразие Y проекцията $q : X \times Y \to Y$, $q(x, y) = y$ е затворено изображение.*

Лема 13.5. *Ако X е такова многообразие, че проекцията $q : X \times Y \to Y$, $q(x, y) = y$ е затворено изображение за всяко афинно многообразие Y, то X е пълно.*

Доказателство: Нека Y е произволно многообразие, $V \subseteq X \times Y$ е затворено подмножество, а $q : X \times Y \to Y$, $q(x, y) = y$ е проекцията върху втория множител. За да докажем, че $q(V) \subseteq Y$ е затворено, избираме афинно отворено покритие $\{U_i\}_{i \in I}$ на Y и означаваме с $q_i : X \times U_i \to U_i$ съответните проекции. Тогава $q_i(V \cap (X \times U_i)) = q(V) \cap U_i$. По предположение, q_i са затворени изображения, така че $q(V) \cap U_i$ са затворени за $\forall i \in I$. Оттук и $q(V) \subseteq Y$ е затворено, Q.E.D.

Лема 13.6. *Ако $\Phi : X \to Y$ е морфизъм на пред-многообразие X в многоборазие Y, то*

$$\Gamma = \{(x, \Phi(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

е затворено подмножество на $X \times Y$ и съвпада с графика на Φ.

Доказателство: Съгласно универсалното свойство на произведението $Y \times Y$, изображението

$$\Psi : X \times Y \longrightarrow Y \times Y,$$
$$\Psi(x, y) = (\Phi(x), y)$$

е морфизъм на пред-многообразия. Но $\Gamma = \Phi^{-1}(\Delta_{Y \times Y})$ е праобразът на диагонала $\Delta_{Y \times Y} \subseteq Y \times Y$, който е затворен по предположение. Следователно Γ е затворено, Q.E.D.

Твърдение 13.7. *(i) Произведението $X \times Y$ на пълни монгообразия X и Y е пълно многообразие.*
(ii) Всяка неприводима компонента на затворено подмножество Y на пълно многообразие X е пълно многообразие.
(iii) Ако $\Phi : X \to Y$ е морфизъм на пълно многообразие X в многоборазие Y, то образът $\Phi(X)$ е затворено подмножество на Y и пълно многообразие, а Φ е затворено изображение.
(iv) Единствените пълни афинни многообразия са точките.

Доказателство: (i) В комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} X \times Y \times Z \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] & \\ Y \times Z \arrow[r, "q"] & Z \end{tikzcd}$$

изображенията p и q са затворени поради пълнотата на X и Y. Следователно $r = qp$ е затворено и $X \times Y$ е пълно.
(ii) Нека Y_i е неприводима компонента на Y, а $q_i : Y_i \times Z \to Z$ е проекцията върху втория множител. Пропускаме q_i през влагането $\varepsilon : Y_i \times Z \to X \times Z$ на затворени подмножества и втората проекция $q : X \times Z \to Z$,

$$\begin{tikzcd} Y_i \times Z \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "q_i"] & \\ X \times Z \arrow[r, "q"] & Z \end{tikzcd} .$$

Тогава ε е затворено изображение, q е затворено изображение поради пълнотата на X, така че $q_i = q\varepsilon$ е затворено и Y_i е пълно.

(iii) Подмножеството $\Gamma_\Phi = \{(x, \Phi(x)) \,|\, x \in X\} \subseteq X \times Y$ е затворено по Лема 13.6. Поради пълнотата на X, образът $\Phi(X)$ на Γ_Φ под действие на проекцията $q : X \times Y \to Y$ е затворен. За да установим пълнотата на $\Phi(X)$ ще проверим, че произволно затворено подмножество $V \subseteq \Phi(X) \times Z$ се проектира в затворено подмножество $q(V) \subseteq Z$. Да разгледаме морфизма

$$\Psi : X \times Z \longrightarrow Y \times Z,$$

$$\Psi(x, z) = (\Phi(x), z).$$

От това, че $\Phi(X)$ е затворено в Y следва, че $\Phi(X) \times Z$ е затворено в $Y \times Z$. Следователно $\Psi^{-1}(V)$ е затворено в $X \times Z$. Поради пълнотата на X имаме затворена проекция $q\Psi^{-1}(V) = q(V)$. Това установява пълнотата на $\Phi(X)$. Още повече, $\Phi(X)$ е неприводимо като образ на неприводимото многообразие X под действие на морфизма Φ, така че $\Phi(X)$ е пълно многообразие.
Произволно затворено подмножество $Z \subseteq X$ е пълно съгласно (ii), така че по горните разглеждания следва, че $\Phi(Z)$ е пълно затворено подмножество на Y. Това доказва, че Φ е затворено изображение.
(iv) Първо ще установим, че афинната права k не е пълно многообразие. За целта да разгледаме хиперболата $xy = 1$, която е затворено подмножество на $k \times k$. Но проекцията и върху втория множител е $k^* = k \setminus \{0\}$, което не е затворено подмножество на k. Следователно проекцията $q : k \times k \to k$, $q(x, y) = y$ не е затворено изображение, така че k не е пълно многообразие.
В общия случай, нека X е пълно неприводимо афинно многообразие с размерност $\dim(X) \geq 1$. Избираме трансцендентен над k елемент $f \in k[X]$. Тогава влагането $k[f] \hookrightarrow k[X]$ индуцира морфизъм $\Phi : X \to k$. Ако допуснем, че X е пълно многообразие, то образът $\Phi(X)$ на X е с размерност, по-голяма от 0, защото f не е постоянна регулярна функция. Съгласно (iii), образът $\Phi(X)$ е затворен, така че съвпада с k. Отново от (iii) следва, че $\Phi(X) = k$ е пълно, което е противоречие, доказващо че единствените пълни афинни многообразия са точките, Q.E.D.
Както в афинния случай, рационално изображение $X \dashrightarrow Y$ на многообразия е морфизъм, определен върху отворено, навсякъде гъсто подмножество $U \subseteq X$. Ще считаме,че две рационални изборажения съвпадат, ако действат по един и същи начин върху непразно отворено подмножество. Съществува максимално отворено подмножество, върху което е регулярно дадено рационално изображение.
Едно рационално изображение се нарича доминантно, ако съществува отворено множество, върху което това изображение е регулярно и образът на това множество е навсякъде гъст. Всяко доминантно рационално изображение индуцира влагане на функционалните полета. Доминантно рационално изображение е бирационално, ако индуцира изоморфизъм на функционалните полета.
Както за афинните многообразия, казваме, че точката p на многообразие X е гладка или неособена, ако $\mathcal{O}_{p,X}$ е регулярен локален пръстен. Ако p не е гладка, то p е особена. Многообразието X е гладко или неособено, ако всяка точка на X е гладка или неособена. Множеството на особените точки на многообразие е собствено затворено подмножество.
Отново по аналогия с афинния случай, нормализацията на многообразие X е многообразие Y с морфизъм $f : Y \to X$, който е бирационален и такъв, че за всяко афинно отворено подмножество $U \subseteq X$ праобразът $f^{-1}(U)$ е афинен и $\mathcal{O}(f^{-1}U)$ е цялата обвивка на $\mathcal{O}(U)$. Нормализацията на X може да се построи чрез нормализация на афинни отворени множества и прилагане на Лема 12.9 за слепване.
Следващата теорема е доказана от Chevalley.

ТЕОРЕМА 24. (Нормировъчен критерий за пълнота) *Нека k е алгебрично затворено поле, а X е многообразие с функционално поле F, така че за всяко неприводимо затворено подмножество $Z \subseteq X$ с функционално поле $F(Z)$ и всеки пръстен на нормиране $k \subseteq R \subseteq F(Z)$ съществува точка $p \in Z$, така че $\mathcal{O}_{p,Z} \subseteq R$. Тогава X е пълно.*

Доказателство: Нека Y е афинно многообразие, $V \subseteq X \times Y$ е затворено подмножество, а $p : X \to Y \to X$ и $q : X \times Y \to Y$ са каноничните проекции. Съгласно Лема 13.5, достатъчно е да докажем, че $q(V)$ е затворено подмножество на Y. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че V е неприводимо. Да означим със Z затворената обвивка на $p(V)$ в X. Тогава Z е неприводимо като образ на неприводимо монгообразие под действие на морфизъм. По предположение, всеки пръстен на нормиране R на $F(Z)$, съдържащ k, съдържа $\mathcal{O}_{p,Z}$ за някоя точка $p \in Z$.
Без ограничение на общността можем да заменим Y със затворената обвивка на $q(V)$ в Y, докато доказваме затвореността на $q(V)$. Тогава композицията $V \to Z \times Y \to Y$ е доминантно изображение и трябва да докажем, че $q(V) = Y$. Нека $F(Z)$ е функционалното поле на Z, а K е функционалното поле на V. Композицията $V \to Z \times Y \to Z$ е доминантна и индуцира влагане $j : F(Z) \hookrightarrow K$ на функционалните полета.
За произволна точка $y \in Y$ ще построим точка $z \in Z$, така че $(z, y) \in V$. Оттук следва $q(V) = Y$. Да разгледаме остойностяващото изображение

$$\varepsilon_y : k[Y] \to k,$$

$$\varepsilon_y(g) = g(y)$$

в точка $y \in Y$. Доминантното изображение $V \to Z \times Y \to Y$ индуцира влагане $k[Y] \hookrightarrow K$. По Теоремата за продължение, съществува пръстен на нормиране R на K, съдържащ $k[Y]$ и хомоморфизъм $\mathcal{E}_y : R \to k$, продължаващ ε_y. Праобразът $j^{-1}(R)$ на R под действие на влагането $j : F(Z) \hookrightarrow K$ е пръстен на нормиране на $F(Z)$, съдържащ k. По предположение, съществува точка $z \in Z$, така че $\mathcal{O}_{z,Z} \subseteq j^{-1}(R)$. Остава да проверим, че $(z, y) \in V$.
Нека U е афинна отворена околност на z в Z. Тогава $V' = (U \times Y) \cap V$ е непразно афинно отворено подмножество на V. Афинният координатен пръстен $k[V']$ е подпръстен на K. Твърдим, че $k[V'] \subseteq R$. Нека $i : V' \hookrightarrow U \times Y$ е влагането, а

$$i^* : k[U] \otimes_k k[Y] \to k[V']$$

е индуцираният епиморфизъм на афинните координатни пръстени. Проекциите $p : U \times Y \to U$ и $q : U \times Y \to Y$ индуцират хомоморфизми

$$p^* : k[U] \to k[U] \otimes_k k[Y], \quad p(a) = a \otimes 1 \quad \text{и}$$

$$q^* : k[Y] \to k[U] \otimes_k [Y], \quad q^*(b) = 1 \otimes b.$$

Ограничението на $j : F(Z) \hookrightarrow K$ върху $k[U]$ е композицията $i^* p^*$. Понеже $j(k[U]) \subseteq R$, оттук следва, че $i^*(k[U] \otimes 1) \subseteq R$. От друга страна, $i^*(1 \otimes k[Y])$ е образът на $k[Y]$ под действие на влагането $k[Y] \hookrightarrow K$ и $i^*(1 \otimes k[Y]) \subseteq R$. Но $k[V'] = i^*(k[U] \otimes_k k[Y])$ се поражда от $i^*(k[U] \otimes 1)$ и $i^*(1 \otimes k[Y])$, така че $k[V']$ се съдържа в R. Следователно хомоморфизмът $\Phi : R \to k$ е определен върху $k[V']$ и ядрото му $Ker(\Phi) \cap k[V']$ е максимален идеал на $k[V']$. Съгласно $j\mathcal{O}_{z,Z} \subseteq R$, максималният идеал на $\mathcal{O}_{z,Z}$ се съдържа в R. От друга страна, максималният идеал на y в $k[Y]$ е в ядрото на Φ. Следователно максималният идеал $Ker(\Phi) \cap k[V']$ на $k[V']$ отговаря на точката $(z, y) \in V'$. Образът на тази точка в Y е y, така че X е пълно, Q.E.D.

Твърдение 13.8. *Нека F е разширение на алгебрично затворено поле k, R е пръстен на нормиране на F, съдържащ k, а $\mathfrak{M}$ е максималният идеал на R. Тогава съществува пръстен на нормиране R' на F, съдържащ k, съдържащ се в R, с максимален идеал $\mathfrak{M}' \supseteq \mathfrak{M}$ и такъв, че композицията $k \to R' \to R'/\mathfrak{M}'$ е изоморфизъм.*

Доказателство: Нека $K = R/\mathfrak{M}$. Отъждествяваме k с образа си под действие на композицията $k \to R \to K$. Прилагайки Теоремата за продължение към тъждественото изображение $k \to k$ получаваме съществуването на пръстен на нормиране $R_1 \subseteq K$ с максимален идеал $\mathfrak{M}_1$, съдържащ k и такъв, че композицията $k \to R \to R_1/\mathfrak{M}_1$ е изоморфизъм. Нека R' е праобразът на R_1 в R, а $\mathfrak{M}'$ е праобразът на $\mathfrak{M}_1$. Композицията

$$k \longrightarrow R' \longrightarrow R'/\mathfrak{M}' \simeq R_1/\mathfrak{M}_1$$

е изоморфизъм. Трябва да докажем само, че R' е пръстен на нормиране на F. Твърдим, че ако $f \in F \setminus R'$, то $f^{-1} \in \mathfrak{M}'$. В случая $f \notin R$ имаме $f^{-1} \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$, защото R е пръстен на нормиране. Ако $f \in R$, то $f \notin \mathfrak{M}$, защото $\mathfrak{M} \subseteq R'$. Следователно $f^{-1} \in R$. Образът $\overline{f}$ на f в K е извън R_1, защото R_1 е пръстен на нормиране и $\overline{f}^{-1} \in \mathfrak{M}_1$. Оттук $f^{-1} \in \mathfrak{M}'$, Q.E.D.
Ако U е подпространство на k^{n+1}, то $\mathbb{P}(U)$ се нарича проективно подпространство на $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(k^{n+1})$. Ако $\dim(U) = n$, ще казваме, че $\mathbb{P}(U)$ е хиперравнина.

Твърдение 13.9. *Проективните многообразия над алгебрично затоврено поле са пълни.*

Доказателство: Съгласно Твърдение 13.7 (ii), достатъчно е да докажем, че проективното пространство $\mathbb{P}^n$ е пълно. За целта ще използваме нормировъчния критерий за пълнота от Теорема 24. Нека $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ е неприводимо затворено подпространство, а R е пръстен на нормиране на $F(Z)$ с максимален идеал $\mathfrak{M}$. Ще установим, че $\mathcal{O}_{P,Z} \subseteq R$ за някоя точка $P \in Z$. Без ограничение на общността можем да прдеполагаме, че Z не се съдържа в собствено проективно подпространство на $\mathbb{P}^n$, защото в противен случай можем да разглеждаме Z като неприводимо затворено подпространство на $\mathbb{P}^r$ за някое $r < n$. С индукция по n предполагаме, че $\mathcal{O}_{P,Z} \subseteq R$ за някое $P \in Z$ при $Z \subseteq \mathbb{P}^r$ с $r < n$. От Твърдение 13.8 знаем, че съществува пръстен на нормиране $k \subseteq R' \subseteq R$ с максимален идеал $\mathfrak{M}'$, така че композицията $k \to R' \to R'/\mathfrak{M}'$ е изоморфизъм. От $\mathcal{O}_P \subseteq R'$ следва $\mathcal{O}_P \subseteq R$, така че можем да заменим R с R' и да предполагаме, че композицията $k \to R \to R/\mathfrak{M}$ е изоморфизъм. Следователно съществува хомоморфизъм $\varphi : R \to k$, който действа тъждествено върху k и има ядро $Ker(\varphi) = \mathfrak{M}$.
Нека $x_0, x_1, \dots, x_n$ са координатните функции върху k^{n+1}. Те не принадлежат на $F = F(\mathbb{P}^n)$, но след деление с x_0, функциите $\xi_0 = 1, \xi_1 = \frac{x_1}{x_0}, \dots, \xi_n = \frac{x_n}{x_0} \in F$. Понеже Z не се съдържа в собствено проективно подпространство на $\mathbb{P}^n$, всички ξ_i са от локалния пръстен $\mathcal{O}_{Z,\mathbb{P}^n}$ (т.е. x_0 не се анулира тъждествено върху Z). Нека η_i са образите на ξ_i в $F(Z)$, $0 \leq i \leq n$. Твърдим, че съществува $\lambda \in F$, така че $\lambda\eta_0, \lambda\eta_1, \dots, \lambda\eta_n \in R$ и поне един от тези елементи е обратим в R. С индукция по $1 \leq i \leq n$, да предположим, че съществува $\lambda_i \in F$, така че $\lambda_i\eta_0, \dots, \lambda_i\eta_{i-1} \in R$ и поне един от тези елементи е обратим в R. Ако $\lambda_i\eta_i \in R$, избираме $\lambda_{i+1} = \lambda_i$. В противен случай, $\lambda_i^{-1}\eta_i^{-1} \in R$ и можем да изберем $\lambda_{i+1} = \eta_i^{-1}$. В резултат, за $\forall 0 \leq j < i$ е в сила $\lambda_{i+1}\eta_j = \frac{\eta_j}{\eta_i} = (\lambda_i\eta_j)(\lambda_i^{-1}\eta_i^{-1}) \in R$ и $\lambda_{i+1}\eta_i = 1$. Продължаваме индуктивно описаната конструкция и избираме $\lambda = \lambda_{n+1}$. Ако $\lambda\eta_i \in R^*$, то делим на $\lambda\eta_i$ и получаваме $\frac{\eta_0}{\eta_i}, \frac{\eta_1}{\eta_i}, \dots, \frac{\eta_n}{\eta_i} \in R$. Тук $\frac{\eta_j}{\eta_i}$ е образът на $\frac{x_j}{x_i}$ в $\mathcal{O}_{Z,\mathbb{P}^n}$ и пренареждайки координатите можем да предполагаме, че $\eta_1, \dots, \eta_n \in R$ за образите η_i на $\frac{x_i}{x_0}$ в $\mathcal{O}_{Z,\mathbb{P}^n}$.

Нека U е афинното отворено подмножество на $\mathbb{P}^n$, което допълва хиперравнината с уравнение $x_0 = 0$ в k^{n+1}. Тогава U е изоморфно на афинното пространство k^n с координати $\xi_1, \dots, \xi_n$. Затвореното подмножество $Z \cap U$ на U е афинно многообразие с афинен координатен пръстен $k[\eta_1, \dots, \eta_n] \subseteq R$. Нека $P = (a_1, \dots, a_n) = (\varphi(\eta_1), \dots, \varphi(\eta_n)) \in U$. Тогава $P \in Z \cap U$. Ще докажем, че $\mathcal{O}_P \subseteq R$. Всеки елемент на $\mathcal{O}_P$ може да се представи във вида $\frac{f}{g}$ за някакви $f, g \in k[\eta_1, \dots, \eta_n]$, $g(P) \neq 0$. Сега $\varphi(g) = \varphi(g(\eta_1, \dots, \eta_n)) = g(a_1, \dots, a_n) = g(P) \neq 0$ показва, че $g \notin \mathfrak{M}$. Следователно g е обратимо в пръстена на нормиране R и $\frac{f}{g} \in R$. Това доказва $\mathcal{O}_P \subseteq R$, Q.E.D.