Глава 14

Пълни гладки криви

Крайнопороденото разширение $F = k(a_1, \ldots, a_n)$ на k се нарича 1-мерно функционално поле, ако F има степен на трансцендентност 1 над k. Функционалното поле F на крива X над k е 1-мерно функционално поле. Кривите X и Y са бирационални тогава и само тогава, когато имат изоморфни функционални полета.

В настоящата глава ще установим, че за всяко 1-мерно функционално поле F над алгебрично затворено поле k съществува единствена с точност до бирегулярност пълна гладка крива X, за която F е функционално поле. Ситуацията е коренно различна за повърхнини, доколкото съществуват пълни гладки повърхнини X и Y, които са бирационални, но не бирегулярни. Например, $X = \mathbb{P}^2$ и $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ са бирационални една на друга повърхнини. Те не са бирегулярни, доколкото Y съдържа затворени непресичащи се криви $\mathbb{P} \times \{0\}$ и $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$, а всеки две затворени криви в $\mathbb{P}^2$ се пресичат.

Ще докажем също, че морфизмите на пълни гладки криви са във взаимно еднозначно съответствие с хомоморфизмите на функционалните им полета. По този начин, изучаването на кривите и техните морфизми се оказва свързано с теорията на Галоа на функционалните им полета.

Пръстенът на нормиране $\mathfrak{o}$ на поле F се нарича нетривиален, ако $\mathfrak{o} \neq F$.

Твърдение 14.1. *Нека k е алгебрично затворено поле, а X е неприводима гладка афинна крива с афинен координатен пръстен $k[X]$ и поле на рационалните функции $k(X)$. Тогава нетривиалните пръстени на нормиране на $k(X)$, съдържащи $k[X]$ са точно локалните пръстени $\mathcal{O}_{P,X}$ на точките $P \in X$. Всички те са пръстени на дискретно нормиране.*

Доказателство: Първо ще установим, че локалният пръстен $\mathcal{O}_{P,X}$ на произволна точка $P \in X$ е нетривиален пръстен на нормиране на $k(X)$, съдържащ $k[X]$. Афинният координатен пръстен $k[X]$ има размерност на Крул 1, така че всеки ненулев прост идеал $\mathfrak{p}$ в $k[X]$ е максимален и отговаря на точка $P \in X$, т.е. $\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_P = \langle x_1 - p_1 + I(X), \ldots, x_n - p_n + I(X) \rangle \lhd k[X]$. Локализацията на $k[X]$ по мултипликативно затвореното подмножество $k[X] \setminus \mathfrak{M}_P$ е локалният пръстен $\mathcal{O}_{P,X}$ на P. По предположение, всяка точка $P \in X$ е гладка, така че

$$\dim_k \left(\mathfrak{M}_{P,X} / \mathfrak{M}^2_{P,X} \right) = \dim_k (T_P X) = \dim(X) = 1.$$

Следователно $\mathcal{O}_{P,X}$ е ньотерова локална област с размерност на Крул 1. Съгласно Твърдение 11.8, $\mathcal{O}_{P,X}$ е пръстен на дискретно нормиране на $k(X)$.

Обратно, ще докажем, че всеки нетривиален пръстен на нормиране на $k(X)$, съдържащ $k[X]$, съвпада с локалния пръстен $\mathcal{O}_{P,X}$ на точка $P \in X$. За целта да отбележим, че максималният идеал $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{o}$ пресича $k[X]$ в прост идеал $\mathfrak{M} \cap k[X]$ на $k[X]$. Твърдим, че $\mathfrak{M} \cap k[X] \neq 0$. В противен случай, всеки елемент $h \in k(X)$ се представя като частно $h = \frac{f}{g}$ на $f, g \in k[X]$ с $g \neq 0$, а оттам и с $g \notin \mathfrak{M}$. Понеже $\mathfrak{o}$ е пръстен на нормиране, оттук следва $g^{-1} \in \mathfrak{o}$ и $h = \frac{f}{g} \in \mathfrak{o}$. Следователно $f \in \mathfrak{o}$ и $k(x) = \mathfrak{o}$, противно на предположението $k(x) \neq \mathfrak{o}$.

Нека $P = V(\mathfrak{M} \cap k[X])$ е неприводимото подмногообразие на X, отговарящо на простия идеал $\mathfrak{M} \cap k[X] \triangleleft k[X]$. Понеже X е 1-мерно, неприводимото собствено подмногообразие $P \subsetneqq X$ трябва да е точка. Идеалът $\mathfrak{M} \cap k[X]$ се състои от регулярните функции върху X, анулиращи се в P. Локалният пръстен $\mathcal{O}_{P,X}$ се съдържа в $\mathfrak{o}$, защото всяко $h \in \mathcal{O}_{P,X}$ е от вида $h = \frac{f}{g}$ с $f \in k[X] \subseteq \mathfrak{o}$ и $g \in k[X] \setminus \mathfrak{M} \subset \mathfrak{o} \setminus \mathfrak{M}$. Следователно $g \in \mathfrak{o}$ е обратим в $\mathfrak{o}$ елемент на $\mathfrak{o}$ и $\frac{f}{g} \in \mathfrak{o}$. Остава да проверим, че ако пръстенът на дискретно нормиране $\mathcal{O}_{P,X}$ се съдържа в подпръстена $\mathfrak{o} \subsetneq k(X)$ на своето поле от частни $k(X)$, то $\mathfrak{o} = \mathcal{O}_{P,X}$. Наистина, предположението $\mathcal{O}_{P,X} \subsetneq \mathfrak{o}$ води до съществуване на елемент $a \in \mathfrak{o} \setminus \mathcal{O}_{P,X}$. Понеже $\mathcal{O}_{P,X} = \{x \in k(X) \mid \nu_P(x) \geq 0\}$ е пръстенът на дискретното нормиране ν_P, получаваме $\nu_P(a) < 0$. За $\forall x \in k(X)$ съществува достатъчно голямо $n \in \mathbb{N}$, така че

$$\nu_P(xa^{-n}) = \nu_P(x) - n\nu_P(a) > 0 \text{ и } xa^{-n} \in \mathcal{O}_{P,X} \subseteq \mathfrak{o}.$$

Следователно $x = (xa^{-n})a^n \in \mathfrak{o}$ и $k(X) = \mathfrak{o}$, противно на предположението $\mathfrak{o} \subsetneq k(X)$. С това установихме, че всеки нетривиален пръстен на нормиране на $k(X)$, съдържащ $k[X]$ е от вида $\mathcal{O}_{P,X}$ за някаква точка $P \in X$, Q.E.D.
За да докажем, че всяко функционално поле F с размерност 1 над алгебрично затворено поле k се реализира като поле на рационалните функции върху афинно многообразие X, ни трябват няколко леми.

Лема 14.2. *Нека $A \subset B$ са подпръстени с единица на поле F и B е цял над A. Тогава целите обвивки на A и B в F съвпадат, $\overline{A} = \overline{B}$.*

Доказателство: Ясно е, че всеки цял над A елемент на F е цял и над B, така че $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. За обратното включване $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ нека $x \in \overline{B}$ изпълнява цяла зависимост

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

с коефициенти $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$. Всяко b_i е цяло над A, така че $A[b_i]$ са крайнопородени A-модули за $\forall 0 \leq i \leq n-1$. С индукция по $0 \leq j \leq n-1$ твърдим, че $A[b_0, \ldots, b_j]$ е крайнопороден A-модул. По-точно, $A[b_0, \ldots, b_{j-1}, b_j] = A[b_0, \ldots, b_{j-1}][b_j]$ е крайнопороден $A[b_0, \ldots, b_{j-1}]$-модул, защото b_j е цяло над $A[b_0, \ldots, b_{j-1}]$. По индукционно предположение $A[b_0, \ldots, b_{j-1}]$ е крайнопороден A-модул, откъдето $A[b_0, \ldots, b_j]$ е крайнопороден A-модул. В края на индукцията получаваме, че $A[b_0, \ldots, b_{n-1}]$ е крайнопороден A-модул. Понеже x е цял над $A[b_0, \ldots, b_{n-1}]$, A-алгебрата $A[b_0, \ldots, b_{n-1}, x]$ е крайнопороден $A[b_0, \ldots, b_{n-1}]$-модул, а оттам и крайнопороден A-модул. Нека

$$A[b_0, \ldots, b_{n-1}, x] = At_1 + \ldots + At_m$$

за подходящи $t_1, \ldots, t_m \in A[b_0, \ldots, b_{n-1}, x]$. Да отбележим, че умножението с x е A-модулен хомоморфизъм $\mu_x : A[b_0, \ldots, b_{n-1}, x] \to A[b_0, \ldots, b_{n-1}, x]$. Ако $M \in A_{m \times m}$ е матрицата на μ_x спрямо пораждащите $t = (t_1, \ldots, t_m)$, то е в сила равенството $t(M - xE_m) = 0$. Умножавайки с адюнгираната матрица на $M - xE_m$ получаваме $\det(M - xE_m)t = 0$. Но ако умножението с $\det(M - xE_m) \in A[x]$ анулира всеки от пораждащите $t_1, \ldots, t_m$ на A-модула $A[b_0, \ldots, b_{n-1}, x]$, то умножението с $\det(M - xE_m)$ анулира всеки елемент на $A[b_0, \ldots, b_{n-1}, x]$. Поради $1_F \in A$, това води до $\det(M - xE_m) = 0$ и дава цяла зависимост на x над A. С други думи, $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, откъдето и $\overline{A} = \overline{B}$, Q.E.D.

Лема 14.3. *Нека R е целозатворена ньотерова област с поле от частни E, а F е крайно сепарабелно разширение на E. Тогава цялата обвивка S на R във F е крайнопороден R-модул.*

Доказателство: Нека $u_1, \dots, u_n$ е базис на F над E. Тогава всяко u_i е алгебрично над E и има минимален полином

$$\frac{r_d}{t_d}u_i^d + \frac{r_{d-1}}{t_{d-1}}u_i^{d-1} + \ldots + \frac{r_1}{t_1}u_i + \frac{r_0}{t_0} = 0$$

над E с $r_j, t_j \in R$, $t_j \neq 0$. Ако $\rho_i = t_0 \ldots t_{i-1} r_i t_{i+1} \ldots t_d$ за $\forall 0 \leq i \leq d$, то

$$(\rho_d u_i)^d + \rho_{d-1}(\rho_d u_i)^{d-1} + \ldots + \rho_1 \rho_d^{d-2}(\rho_d u_i) + \rho_0 \rho_d^{d-1} = 0$$

с $\rho_j \rho_d^{d-1-j} \in R$ за $\forall 0 \leq j \leq d-1$ показва, че $\rho_d u_i \in F$ е цял над R и принадлежи на S. Затова можем да считаме, че сме избрали базис $u_1, \dots, u_n$ на F над E, който се съдържа в S.
За да определим следата $tr : F \to E$ на F над E, нека

$$f_x(t) = t^m + e_{m-1}t^{m-1} + \ldots + e_1 t + e_0 \in E[t]$$

е минималният полином на x над E, а $\chi_x(t) = \det(M - xI_n)$ е характеристичният полином на умножението $\mu_x : F \to F$ с x, разгледано като линеен оператор във F над E. Тук $M \in E_{n\times n}$ е матрицата на μ_x в произволен базис на F над E, а $I_n \in E_{n\times n}$ е единичната матрица. Минималният полином $f_x(t) \in E[t]$ на x над E дели полинома $\chi_x(t) \in E[t]$. Твърдим, че $\chi_x(t)$ е степен на $f_x(t)$. За целта да фиксираме базис $1, x, \dots, x^{m-1}$ на $E(x) = E[x]$ над E и базис $t_1, \dots, t_k$ на F над $E(x)$ с $km = n$. Тогава

$$t_1, xt_1, \dots, x^{m-1}t_1, t_2, xt_2, \dots, x^{m-1}t_2, \dots, t_k, xt_k, \dots, x^{m-1}t_k$$

е базис на F над E, в който $\mu_x : F \to F$ има блочно-диагонална матрица

$$M = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ldots & \\ & & D_k \end{pmatrix}$$

с блокове

$$D_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -e_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -e_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -e_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -e_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -e_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Следователно характеристичният полином

$$\chi_M(t) = \prod_{j=1}^{k} \chi_{D_j}(t) = f_x(t)^k$$

е степен на минималния полином $f_x(t) \in E[t]$ на x над E. Определяме следата $tr(x) \in E$ на $x \in F$ като сумата $tr(M) = M_{1,1} + \ldots + M_{n,n}$ на елементите на M по главния диагонал. Непосредствено се вижда, че $tr(x)$ е противоположния елемент на коефициента пред t^{n-1} в $\chi_M(t)$ и $tr(x)$ не зависи от избора на базис на F над E, в който пишем матрицата M на μ_x. Ако $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ са корените на $f_x(t)$ в подходящо разширение на E, то $tr(x) = k\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right) \in E$. Твърдим, че следата $tr : F \to E$ е E-линейно изображение. Наистина, ако $M_x \in E_{n\times n}$ и $M_y \in E_{n\times n}$ са матриците на умноженията $\mu_x : F \to F$ и $\mu_y : F \to F$ с $x \in F$ и $y \in F$ в някакъв базис на F над E, то матрицата $M_{x+y} \in E_{n\times n}$ на умножението $\mu_{x+y} : F \to F$ с $x + y \in F$ е $M_{x+y} = M_x + M_y$ и

$$tr(x+y) = tr(M_{x+y}) = tr(M_x + M_y) = tr(M_x) + tr(M_y) = tr(x) + tr(y).$$

Това се дължи на покомпонентното събиране на матрици. За произволни $x \in F$ и $c \in E$ матрицата $M_{cx} \in E_{n\times n}$ на $\mu_{cx} : F \to F$ е $M_{cx} = cM_x$, така че следата

$$tr(cx) = tr(M_{cx}) = tr(cM_x) = c[tr(M_x)] = c[tr(x)],$$

защото умножението на матрицата $M_x \in E_{n\times n}$ със скалара $c \in E$ е покомпонентно. Следователно следата $tr : F \to E$ е E-линейно изображение.
Да разгледаме съответствието

$$Tr : F \longrightarrow F^* = Hom_E(F, E),$$

$$x \mapsto Tr_x : F \to E \text{ за } \forall x \in F,$$

$$Tr_x(y) = tr(xy) \text{ за } \forall y \in F.$$

От линейността на tr над E следва линейността на Tr над E. Освен това, Tr е влагане, защото ако допуснем, че $Tr_x = 0 \in F^*$ за някое $0 \neq x \in F$, то $tr(xE) = tr(E) = 0$. Крайното сепарабелно разширение $F \supset E$ има сепарабелен примитивен елемент $\theta \in F$, така че $F = E(\theta) = E[\theta]$. Тогава минималният полином $f_\theta(t) = \chi_{M_\theta}(t)$ на θ над E съвпада с характеристичния полином $\chi_{M_\theta}(t)$ на умножението с θ във F и $tr(\theta) = \theta + \theta_2 + \ldots + \theta_n$ е сумата на различните характеристични корени на M_θ. За всяко естествено k, следата $tr(\theta^k) = 0$ е сумата на характеристичните корени $\theta^k, \theta_2^k, \ldots, \theta_n^k$ на $M_{\theta^k} = (M_\theta)^k$. Следователно степенните сборове $S_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i^k = 0$ се анулират за всички $k \in \mathbb{N}$ и минималният полином на θ над E е $f_\theta(t) = t^n$. Това противоречи на сепарабелността на θ над E и доказва, че $Tr_x \neq 0 \in F^* = Hom_E(F, E)$ за $\forall 0 \neq x \in F$. Понеже F и $F^* = Hom_E(F, E)$ са с една и съща размерност n над E, получаваме, че $Tr : F \to F^*$ е E-линеен изоморфизъм.
Нека $v_1, \ldots, v_n$ е дуалният базис на $u_1, \ldots, u_n \in S$ над E, т.е.

$$tr(u_iv_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } i = j, \\ 0 & \text{за } i \neq j. \end{cases}$$

Разглеждаме крайнопородения R-модул $M = Rv_1 + \ldots + Rv_n$ и множеството

$$N = \{x \in F \,|\, tr(xS) \subseteq R\}.$$

Твърдим, че N се съдържа в M, защото произволно $x \in N$ може да се представи във вида $x = e_1v_1 + \ldots + e_nv_n$ с $e_1, \ldots, e_n \in E$. Сега условието $tr(xu_i) = e_i \in R$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ гарантира, че $x \in M$. Подмножеството N на M е R-подмодул, защото следата tr е R-линейна. По предположение, R е ньотерова област, така че R-подмодулът N на крайнопородения R-модул M е крайнопороден. За произволни $s_1 \in S$ и $s_2 \in S$ произведението $s_1s_2 \in S$ е цяло над целозатворената област R, така че минималният полином на s_1s_2 над E е с коефициенти от целозатворената област R и $tr(s_1s_2) \in R$. Следователно $S \subseteq N$ и S е крайнопороден R-модул като подмодул на крайнопородения R-модул N над ньотеровата област R, Q.E.D.

Лема 14.4. *Нека F е поле, A е подпръстен на F, B е цялата обвивка на A във F, а S е мултипликативно затворено подмножество на A. Тогава $S^{-1}B$ е цялата обвивка на $S^{-1}A$ във F, $S^{-1}B = \overline{S^{-1}A}$.*

Докаазтелство: Включването $S^{-1}B \subseteq \overline{S^{-1}A}$ е ясно, защото за произволни $s \in S$ и $b \in B$ с

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1b + a_0 = 0$$

за някакви $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ следва

$$(s^{-1}b)^n + (s^{-1}a_{n-1})(s^{-1}b)^{n-1} + \ldots + (s^{-n+1}a_1)(s^{-1}b) + s^{-n}a_0 = 0,$$

така че произволно $s^{-1}b \in S^{-1}B$ е цяло над $S^{-1}A$. За обратното включване $\overline{S^{-1}A} \subseteq S^{-1}B$ да разгледаме елемент $x \in F$, който е цял над $S^{-1}A$. Тогава

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}x^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{s_1}x + \frac{a_0}{s_0} = 0$$

за някакви $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ и $s_0, \ldots, s_{n-1} \in S$. Умножаваме последното равенство с n-тата степен на $t = s_0 \ldots s_{n-1} \in S$ и получаваме

$$(tx)^n + \alpha_{n-1}(tx)^{n-1} + \ldots + \alpha_1(tx) + \alpha_0 = 0$$

с $\alpha_i = \frac{t^{n-i}a_i}{s_{n-i}} \in A$. Следователно tx е цял над A или $tx = y \in B$. Оттук $x = t^{-1}y \in S^{-1}B$, Q.E.D.

Лема 14.5. *Нека A е комутативна област с единица, $A_{\mathfrak{p}}$ са локализациите на A относно допълненията $A \setminus \mathfrak{p}$ на простите идеали $\mathfrak{p} \lhd A$, а $A_{\mathfrak{M}}$ са локализациите на A относно допълненията на максималните идеали $\mathfrak{M} \lhd A$. Тогава*

$$A = \cap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} = \cap_{\mathfrak{M}} A_{\mathfrak{M}}.$$

Доказателство: Включванията

$$A \subseteq \cap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} \subseteq \cap_{\mathfrak{M}} A_{\mathfrak{M}}$$

са ясни. Остава да проверим, че ако $x \in \cap_{\mathfrak{M}} A_{\mathfrak{M}}$, то $x \in A$. Да разгледаме идеала

$$\mathfrak{a} = \{a \in A \,|\, ax \in A\} \lhd A.$$

Достатъчно е да докажем, че $1 \in \mathfrak{a}$, за да получим, че $x \in A$. При допускане на противното, идеалът $\mathfrak{a}$ в A е собствен и се съдържа в някой максимален идеал $\mathfrak{M}$ на A. От $x \in A_{\mathfrak{M}}$ следва, че $x = \frac{a}{s}$ за някакви $a \in A$ и $s \in A \setminus \mathfrak{M}$. Сега $sx = a \in A$ гарантира, че $s \in \mathfrak{a}$, откъдето и $s \in \mathfrak{M}$, противно на $s \in A \setminus \mathfrak{M}$. Следователно $\mathfrak{a} = A$ и $x \in A$, Q.E.D.

Лема 14.6. *Следните условия са еквивалентни са комутативна област с единица A:*
(i) A е целозатворена (в своето поле от частни F);
(ii) за всеки прост идеал $\mathfrak{p} \lhd A$, локализацията $A_{\mathfrak{p}}$ по мултипликативно затвореното подмножество $A \setminus \mathfrak{p} \subset A$ е целозатворена област;
(iii) за всеки максимален идеал $\mathfrak{M} \lhd A$ локализацията $A_{\mathfrak{M}}$ по мултипликативно затвореното подмножество $A \setminus \mathfrak{M} \subset A$ е целозатворена област.

Доказателство: Ясно е, че от (ii) следва (iii). От самото определение на локализациите $A_{\mathfrak{p}}$ и $A_{\mathfrak{M}}$ следва, че имат поле от частни F. Да означим с $\overline{A}$, $\overline{A_{\mathfrak{p}}}$, или, съответно, $\overline{A_{\mathfrak{M}}}$ целите обвивки на A, $A_{\mathfrak{p}}$ или $A_{\mathfrak{M}}$ във F. За да докажем, че от (iii) следва (i) да отбележим, че $A \subseteq A_{\mathfrak{M}}$ води до $\overline{A} \subseteq \overline{A_{\mathfrak{M}}}$. Оттук $\overline{A} \subseteq \cap_{\mathfrak{M}} \overline{A_{\mathfrak{M}}}$. Ако $\overline{A_{\mathfrak{M}}} = A_{\mathfrak{M}}$ за всички максимални идеали $\mathfrak{M} \lhd A$, то $\overline{A} \subseteq \cap_{\mathfrak{M}} A_{\mathfrak{M}} = A$, съгласно Лема 14.5. Оттук $\overline{A} = A$. Остава да изведем (ii) от (i). По Лема 14.4, $A_{\mathfrak{p}} = (\overline{A})_{\mathfrak{p}} = \overline{A_{\mathfrak{p}}}$ за всеки прост идеал $\mathfrak{p} \lhd A$, така че всички $A_{\mathfrak{p}}$ са целозатворени, Q.E.D.

Твърдение 14.7. *Нека k е алгебрично затворено поле, а F е функционално поле с размерност 1 над k. Тогава съществува неприводима гладка афинна крива X с поле на рационалните функции $k(X) = F$. Още повече, за произволни нетривиални пръстени на нормиране $\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_n$ на F, съдържащи k, съществува такава неприводима гладка афинна крива X, чийто афинен координатен пръстен $k[X]$ се съдържа в $\cap_{i=1}^n \mathfrak{o}_i$ и чието поле на рационалните функции $k(X)$ съвпада с F.*

Доказателство: Първо ще установим, че за $\forall x \in F$ съществува $y \in \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{o}_i$, така че разширенията $k(x) = k(y)$ съвпадат. С индукция по $1 \leq j \leq n$ построяваме $y_j \in \cap_{i=1}^{j} \mathfrak{o}_i$ с $k(x) = k(y_j)$. Ако y_{j-1} изпълнява изброените условия и $y_{j-1} \in \mathfrak{o}_j$, то избираме $y_j = y_{j-1}$. За $y_{j-1} \not\in \mathfrak{o}_j$ съществува елемент a от безкрайното поле k, така че $y_{j-1} - a$ не принадлежи на максималния идеал $\mathfrak{M}_i$ на $\mathfrak{o}_i$ за всички $1 \leq i \leq j-1$. От $a \in k \subseteq \cap_{i=1}^{j-1} \mathfrak{o}_i$ и $y_{j-1} \in \cap_{i=1}^{j-1} \mathfrak{o}_i$ следва $y_{j-1} - a \in \cap_{i=1}^{j-1} \mathfrak{o}_i$, така че $y_{j-1} - a \in \cap_{i=1}^{j-1} \mathfrak{o}_i^*$ и $(y_{j-1} - a)^{-1} \in \cap_{i=1}^{j-1} \mathfrak{o}_i$. Освен това, от $a \in k \subseteq \mathfrak{o}_j$ и $y_{j-1} \not\in \mathfrak{o}_j$ получаваме $y_{j-1} - a \not\in \mathfrak{o}_j$. Понеже $\mathfrak{o}_j$ е пръстен на нормиране на F и $y_{j-1} - a \neq 0$, обратният $(y_{j-1} - a)^{-1} \in \mathfrak{o}_j$. От друга страна,

$$k(x) = k(y_{j-1}) = k(y_{j-1} - a) = k((y_{j-1} - a)^{-1}),$$

така че $y_j = (y_{j-1} - a)^{-1} \in \cap_{i=1}^{j} \mathfrak{o}_i$ и $k(x) = k(y_j)$. В края на индукцията получаваме $y = y_n$ с $k(x) = k(y)$ и $y \in \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{o}_i$.

Нека разширението $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ на k е породено от $x_1, \ldots, x_r$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $x_1, \ldots, x_r \in \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{o}_i$. Твърдим, че цялата обвивка A на k-подалгебрата $k[x_1, \ldots, x_r]$ на $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ във F е крайнопоордена k-алгебра. Понеже подпръстенът A на F е област, това е достатъчно за съществуването на неприводима афинна крива X с афинен координатен пръстен $k[X] = A$. По Лемата на Ньотер за нормализация - Теорема 15 съществува трансценденден над k елемент $z \in k[x_1, \ldots, x_r]$, така че $k[x_1, \ldots, x_r]$ е цял над $k[z]$ и $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ е крайно сепарабелно разширение на $k(z)$. Съгласно Лема 14.2, A съвпада с цялата обвивка B на $k[z]$ във F. Областта $k[z]$ е ньотерова и целозатворена, а F е крайно сепарабелно разширение на нейното поле от частни $k(z)$. Прилагайки Лема 14.3 получаваме, че B е крайнопоорден $k[z]$-модул. Ако $B = k[z]b_1 + \ldots + k[z]b_m$, то $B = k[b_1, \ldots, b_m, z]$, доколкото B е k-алгебра, съдържаща $b_1, \ldots, b_m, z$. Следователно $A = B$ е крайнопородена k-алгебра и съществува неприводима афинна крива X с афинен координатен пръстен $k[X] = A = B$. Съгласно $A \supseteq k[x_1, \ldots, x_r]$, полето на рационалните функции $k(X) = F = k(x_1, \ldots, x_r)$, в качеството си на поле от частни на A. По построение, $k[x_1, \ldots, x_r] \subseteq \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{o}_i$, така че цялата обвивка

$$A = \overline{k[x_1, \ldots, x_r]} \subseteq \cap_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{o}_i} = \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{o}_i,$$

съгласно целозатвореността на пръстените на нормиране $\mathfrak{o}_i$.

Остава да проверим гладкостта на кривата X. За целта използваме целозатвореността на $k[X] = A$ (във F). От Лема 14.6 следва ,че локализациите $A_{\mathfrak{M}_P} = \mathcal{O}_{P,X}$ по всички максимални идеали $\mathfrak{M}_P \lhd k[X]$ са целозатворени. Съгласно Твърдение 11.8, ньотеровите локални области $\mathcal{O}_{P,X}$ с размерност на Крул 1 са целозатворени тогава и само тогава, когато са регулярни и $\dim_k(T_P X) = \dim_k\left(\mathfrak{M}_{P,X}/\mathfrak{M}_{P,X}^2\right) = 1 = \dim(X)$. Следователно всички точки $P \in X$ са гладки, Q.E.D.

Твърдение 14.8. *Нека k е алгебрично затворено поле, $k[x]$ е афинният координатен пръстен на афинната права k, а $k(x)$ е полето от частни на $k[x]$. Тогава съществува взаимно еднозначно съответствие между точките на проективната права $\mathbb{P}^1$ и пръстените на нормиране на $k(x)$, които съдържат k. На точка $P \in k$ отговаря локалния пръстен $\mathcal{O}_{P,k}$, а на безкрайната точка $\{\infty\} = \mathbb{P}^1 \setminus k$ съответства*

$$\mathcal{O}_\infty = \left\{ x^{-r} \frac{f(x^{-1})}{g(x^{-1})} \in k(x) \,\middle|\, f, g \text{ полиноми }, r \geq 0,\ f(0) \neq 0,\ g(0) \neq 0 \right\}.$$

Доказателство: Да отбележим, че $\mathcal{O}_\infty$ е също пръстен на дискретно нормиране

$$\nu_\infty \left(x^{-r} \frac{f(x^{-1})}{g(x^{-1})} \right) = r.$$

Трябва да докажем, че всеки пръстен на нормиране $\mathfrak{o}$ на $k(x)$, съдържащ k е $\mathcal{O}_{P,k}$ за някоя точка $P \in k$ или $\mathcal{O}_\infty$. Ако $x \in \mathfrak{o}$, то $k[x] \subseteq \mathfrak{o}$ и съгласно Твърдение 14.1 следва $\mathfrak{o} = \mathcal{O}_{P,k}$ за някоя точка $P \in k$. Ако $x \notin \mathfrak{o}$, то x^{-1} принадлежи на максималния идеал $\mathfrak{M}_\mathfrak{o}$ на $\mathfrak{o}$.
Нека $s : k^* \to k^*$ се задава с $s(a) = a^{-1}$. Тогава s е бирационално изображение на k и индуцира изоморфизма $\sigma : k(x) \to k(x)$, $\sigma\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(x^{-1})}{g(x^{-1})}$ на полето на рационалните функции $k(x)$. Произволно влагане на полета σ издърпва пръстен на нормиране $\mathcal{O}$ в пръстен на нормиране $\sigma^{-1}(\mathcal{O})$. Още повече, максималният идеал $\mathfrak{M}_\mathcal{O}$ на $\mathcal{O}$ се издърпва до максималния идеал $\sigma^{-1}(\mathfrak{M}_\mathcal{O}) = \mathfrak{M}_{\sigma^{-1}(\mathcal{O})}$ на $\sigma^{-1}(\mathcal{O})$. В случая на изоморфизъм $\sigma : k(x) \to k(x)$, пръстенът на нормиране $k \subseteq \mathfrak{o} \subsetneqq k(x)$ се изобразява в пръстен на нормиране $k \subseteq \sigma(\mathfrak{o}) \subsetneqq k(x)$ с максимален идеал $\mathfrak{M}_{\sigma(\mathfrak{o})} = \sigma(\mathfrak{M}_\mathfrak{o})$. От $x^{-1} \in \mathfrak{M}_\mathfrak{o}$ следва $x = \sigma(x^{-1}) \in \mathfrak{M}_{\sigma(\mathfrak{o})} \subset \sigma(\mathfrak{o})$, така че $k[x] \subseteq \sigma(\mathfrak{o})$. Следователно $\sigma(\mathfrak{o}) = \mathcal{O}_{0,k}$ е локалният пръстен на началото $0 \in k$, съгласно Твърдение 14.1. Оттук $\mathfrak{o} = \sigma^{-1}(\mathcal{O}_{0,k}) = \mathcal{O}_\infty$, Q.E.D.
Нека $E \supset F$ е крайно разширение на функционални полета, $\mathfrak{o}$ е пръстен на нормиране на F, а $\mathcal{O}$ е пръстен на нормиране на E. Казваме, че $\mathcal{O}$ лежи над $\mathfrak{o}$, ако $\mathcal{O} \cap F = \mathfrak{o}$. Ясно е, че $\mathcal{O} \cap F$ е пръстен на нормиране на F, така че всеки пръстен на нормиране на E лежи над единствен пръстен на нормиране на F.

Твърдение 14.9. *Нека F е 1-мерно функционално поле над алгебрично затворено поле k, а $x \in F$ е такъв елемент, че $k(x) \supset k$ е чисто трансцендентно разширение, а F е крайно сепарабелно разширение на $k(x)$. Тогава над произволен нетривиален пръстен на нормиране $\mathfrak{o}$ на $k(x)$, съдържащ k, лежат само краен брой пръстени на нормиране на F.*

Доказателство: След евентуална замяна на x с x^{-1} можем да считаме, че $x \in \mathfrak{o}$. Следователно $k[x] \subset \mathfrak{o}$. Нека A е цялата обвивка на $k[x]$ в F, а X и k са неприводимите афинни монгообразия с афинни координатни пръстени A, съответно, $k[x]$. Влагането $k[x] \hookrightarrow A$ отговаря на краен доминантен морфизъм $f : X \to k$. Можем да считаме ,че $f : X \to k$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1$ е проекцията върху първата афинна координата. Следователно слоевете на f са крайни. По Твърдение 14.8, пръстенът на нормиране $\mathfrak{o}$ е локалният пръстен $\mathcal{O}_{P,k}$ на някаква точка $P \in k$. Ако $\mathcal{O}$ е пръстен на нормиране на F, съдържащ $\mathfrak{o}$, то $\mathcal{O}$ съдържа $k[x]$, а оттам и цялата обвивка A на $k[x]$. Това се дължи на целозатвореността на пръстените на нормиране $\mathcal{O}$. По Твърдение 14.1, нетривиалните пръстени на нормиране на F, съдържащи A, отговарят на точките на X. Още повече, ако локалният пръстен $\mathcal{O}_{q,X}$ лежи над локалния пръстен $\mathcal{O}_{p,k} = \mathcal{O}_{q,X} \cap k(x)$, то максималният идеал $\mathfrak{M}_{q,X}$ на $\mathcal{O}_{q,X}$ пресича $k(x)$ в собствен идеал $\mathfrak{M}_{q,X} \cap k(x)$ на $\mathcal{O}_{p,k}$, така че $\mathfrak{M}_{q,X} \cap k(x) \subseteq \mathfrak{M}_{p,X}$ и $q = (p, q_2, \ldots, q_n)$. Следователно пръстените на нормиране $\mathcal{O}_{q,X}$ на F, които лежат над пръстените на нормиране $\mathcal{O}_{p,k}$ на $k(x)$ отговарят на точките q от крайния слой на $f : X \to k$ над $p \in k$. В частност, тези $\mathcal{O}_{q,X}$ са краен брой, Q.E.D.

Твърдение 14.10. *Нека k е алгебрично затворено поле, а X е неприводима гладка афинна крива с афинен координатен пръстен $k[X]$ и поле на рационалните функции $k(X)$. Тогава съществуват само краен брой нетривиални нормирания на $k(X)$, които съдържат k и не съдържат $k[X]$.*

Доказателство: По Лемата на Ньотер за нормализация, съществува трансцендентен над k елемент $x \in k(X)$, така че $k[X]$ е цял над $k[x]$. Ако $y \in k(X)$ е цял над $k[x]$, то y се съдържа във всички пръстени на нормиране на $k(X)$, съдържащи $k[X]$. Следователно афинният координатен пръстен $k[X]$ се съдържа във всички пръстени на нормиране на $k(X)$, съдържащи $k[x]$. Оттук, ако пръстен на нормиране R на $k(X)$ не съдържа $k[X]$, то сечението $R \cap k(x) = \mathcal{O}_\infty$ е локалният пръстен на безкрайната точка, съгласно Твърдение 14.8. По Твърдение 14.9, съществуват краен брой пръстени на нормиране на $k(X)$ над пръстена на нормиране $\mathcal{O}_\infty$ на $k(x)$, Q.E.D.

Теорема 25. *(i) Всяко 1-мерно функционално поле F над алгебрично затворено поле k е функционалното поле на пълна гладка крива X.*
(ii) Локалните пръстени на X са точно нетривиалните пръстени на нормиране на F.
(iii) Ако Y е гладка крива с функционално поле F, то Y е изоморфно на подмногообразие на X
(iv) Пълната гладка крива X е определена с точност до бирегулярност от функционалното си поле F.

Доказателство: Нека X е множество, което е във взаимно еднозначно съответствие с нетривиалните пръстени на нормиране на F. За $\forall x \in X$ означаваме с $\mathfrak{o}_x$ пръстена на нормиране на F, отговарящ на x. Задаваме топология върху X, спрямо която едно подмножество е отворено, ако е празно или е допълнение на крайно множество. За произволно непразно отворено множество U определяме $\mathcal{O}_X(U) = \cap_{x\in U}\mathfrak{o}_x$. Твърдим, че това задава сноп от пръстени $\mathcal{O}_X$ и $(X, \mathcal{O}_X)$ е пълна гладка крива. Преди всичко, X има крайно покритие от афинни отворени множества. Ако U е афинно многообразие с функционално поле F, то U е допълнение на крайно подмножество на X, защото пръстените на нормиране на F, които не съдържат афинния координатен пръстен $k[U]$ са краен брой по Твърдение 14.10. По този начин, U е отворено относно въведената кофинитна топология. Съгласно Твърдение 14.7, произволно крайно множество от точки на X може да се вложи в такова афинно отворено подмножество. Крайното допълнение на това афинно отворено подмножество може на свой ред да се вложи в афинно отворено подмножество. В резултат, X се покрива с две афинни отворени подмножества. По лемата за слепване X е пред-многообразие.
За да установим отделимостта на X да напомним, че за произволни две точки $p, q \in X$ съществува афинно отворено подмножество $U \subset X$, съдържащо p и q. Покриваме $X \times X$ с афинни отворени подмножества $U \times U$ и използваме, че диагоналът $\Delta_U = \Delta_X \cap (U \times U)$ е затворен в $U \times U$. Следователно затворената обвивка $\overline{\Delta}$ на диагонала $\Delta_X = \{(P,P)) \,|\, P \in X\}$ в $X \times X$ пресича $U \times U$ в $\overline{\Delta_X} \cap (U \times U) = \Delta_X \cap (U \times U)$ и $\overline{\Delta_X} = \Delta_X$. С това доказахме, че X е многообразие.
Всеки локален пръстен на X е пръстен на дискретно нормиране, а оттам и регулярен локален пръстен. Следователно кривата X е гладка. Тази крива е и пълна, съгласно нормировъчния критерий. В случая трябва да приложим критерия само за $Z = X$ и да вземем предвид, че всеки пръстен на нормиране на F е локален пръстен на X.
За да докажем, че всяка гладка крива Y с функционално поле F е изоморфна на подмногообразие на X, първо разглеждаме случая на афинна крива Y. Поради гладкостта на Y, всички локални пръстени $\mathcal{O}_{P,Y}$ са пръстени на дискретно нормиране на F и тяхното сечение $\cap_{P\in Y}\mathcal{O}_{P,Y} = k[Y]$ е афинният координатен пръстен на Y. Отъждествяваме Y с подмножество на X чрез построяване на съответствие между локалните пръстени. За произволно отворено подмножество $U \subseteq Y$ е в сила $\mathcal{O}_Y(U) = \cap_{x\in U}\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_X(U)$, така че влагането на Y в X е морфизъм на многообразия и Y е подмногообразие на X.
В общия случай, ако кривата Y не е обезателно афинна, можем да я покрием с афинни подмножества и да вложим всяко от тях в X. Тогава съгласно Твърдение 12.10, Y се влага в X.

Остава да проверим, че всяко пълно гладко многообразие Y с функционално поле F е бирегулярно на X. Вече доказахме, че за всяко такова многообразие Y съществува влагане $Y \hookrightarrow X$. Поради пълнотата на Y, образът на това влагане е затворен. Единственото безкрайно затворено подмножество на X е самото X, така че образът на Y е X и това влагане е изоморфизъм, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 14.11. *Нека E и F са функционалните полета на пълни гладки криви X и Y над алгебрично затворено поле k. Ако $\varphi : X \to Y$ е непостоянен морфизъм, то φ е доминантно рационално изображение и индуцира влагане на полета $\varphi^* : F \hookrightarrow E$ над k. Всяко влагане на полета $\Phi : F \hookrightarrow E$ над k възниква от еднозначно определен непостоянен морфизъм $\varphi : X \to Y$.*

Доказателство: За произволно влагане на полета $\Phi : F \hookrightarrow E$ над k определяме $\varphi : X \to Y$ с $\varphi^* = \Phi$, съпоставяйки на точка $x \in X$ съответния нетривиален пръстен на нормиране $\mathfrak{o}_x$ на E. Праобразът му $\Phi^{-1}(\mathfrak{o}_x) \subset F$ е нетривиален пръстен на нормиране на F. Следователно $\Phi^{-1}(\mathfrak{o}_x) = \mathcal{O}_{y,Y}$ е локален пръстен на Y и полагаме $\Phi(x) = y$, Q.E.D.