Глава 15

Дивизори и линейни системи

Определение 15.1. *Нека X е пълна гладка крива над алгебрично затворено поле k. Дивизор D върху X е крайна $\mathbb{Z}$-линейна комбинация $D = \sum\limits_{P \in X} n_P P$ от точки $P \in X$. С други думи, D е елемент на свободната абелева група с пораждащи точките на X.*

Степента $\deg(D) = \sum n_P$ на дивизор $D = \sum n_P P$ е сумата от коефициентите му, а носителят на D е крайното множество от точки $\{P \in X \,|\, n_P \neq 0\}$. Ако $\nu_P : F \to \mathbb{Z}$ е нормирането, отговарящо на точка $P \in X$, то на всяка функция $f \in F \setminus \{0\}$ съпоставяме дивизора

$$(f) = \sum \nu_P(f) f.$$

За целта използваме, че $\nu_P(f) \neq 0$ само за краен брой точки P. Достатъчно е да докажем това върху афинна неприводима крива $U \subseteq X$ и да покрием X с краен брой афинни околности. Всяка рационална функция $f \in k(U)$ върху афинна крива U се представя като частно $f = \frac{g}{h}$ на регулярни функции $g, h \in k[U]$. Тогава $\nu_P(g) \geq 0$ и $\nu_P(h) \geq 0$ във всяка точка $P \in U$. Достатъчно е да проверим, че за всяка ненулева регулярна функция $F \in k[U] \setminus \{0\}$ условието $\nu_P(F) > 0$ е изпълнено най-много за краен брой точки $P \in U$. Еквивалентно, $F \in \mathfrak{M}_P$ за краен брой $P \in U$ или собственото афинно подмногообразие $V(F) \subset U$ се състои от краен брой точки.
Да формулираме няколко елементарни свойства на дивизорите:
(i) Ако D_1 и D_2 са дивизори, то степента $\deg(D_1 + D_2) = \deg(D_1) + \deg(D_2)$.
(ii) Ако $f_1, f_2 \in F$, то $(f_1 f_2) = (f_1) + (f_2)$.
Следват някои факти, които са необходими за проверка на това, че дивизорите на рационалните функции са от степен 0. Разглеждаме Дедекиндова област A, т.е. ньотерова целозатворена област с размерност на Крул 1. Ако F е полето от частни на A, а $E \supset F$ е крайно сепарабелно разширение, то цялата обвивка B на A в E е също Дедекиндова област. За произволен ненулев прост идеал $\mathfrak{p} \triangleleft A$, идеалът $\mathfrak{p}B \triangleleft B$ се разлага в крайно произведение $\mathfrak{p}B = \prod\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{e_i}$ от прости идеали $\mathfrak{p}_i \triangleleft B$ над $\mathfrak{p} \triangleleft A$. Това разлагане може да се получи от примарното разлагане $\mathfrak{p}B = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$ с различни радикали $r(\mathfrak{q}_i) \neq r(\mathfrak{q}_j)$ за $i \neq j$. Причина за това е, че различните прости идеали $r(\mathfrak{q}_i)$ и $r(\mathfrak{q}_j)$ в B са взаимно прости, $r(\mathfrak{q}_i) + r(\mathfrak{q}_j) = B$. Оттам $\mathfrak{q}_i$ и $\mathfrak{q}_j$ са взаимно прости, $\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j = B$, което е достатъчно за $\cap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i = \prod\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i$. По Китайската Теорема за остатъците, факторът

$$B/\mathfrak{p}B = B/\left(\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{e_i}\right) \simeq \oplus_{i=1}^{r} B/\mathfrak{p}_i^{e_i}.$$

Доказва се, че размерността на $B/\mathfrak{p}B$ като линейно пространство над полето $A/\mathfrak{p}$ е равна на степента $[E : F]$. От друга страна, ако $f_i = \dim_{A/\mathfrak{p}}(B/\mathfrak{p}_i)$ са степените на съответните полета от остатъци $B/\mathfrak{p}_i$ над $A/\mathfrak{p}$, то $\dim_{A/\mathfrak{p}}(B/\mathfrak{p}B) = \sum\limits_{i=1}^{r} e_i f_i$.

Метрично поле (F, μ) е поле F с метрика $\mu : F \to \mathbb{R}^{\geq 0}$. По определение, метриката е изображение със свойствата:

(i) $\mu(x) \geq 0$ за $\forall x \in F$ с $\mu(x) = 0$ тогава и само тогава, когато $x = 0$;

(ii) $\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$ за $\forall x, y \in F$;

(iii) (неравенство на триъгълника) $\mu(x + y) \leq \mu(x) + \mu(y)$.

Ако $\nu : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ е дискретно нормиране, а $\rho \in (0, 1)$, то $\mu(x) = \rho^{\nu(x)}$ за $\forall x \in F$ е основен пример за метрика във F. Друг пример за метрика е абсолютната стойност на рационалните числа. Редицата $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ в метрично поле F е сходяща, ако съществува $\alpha \in F$, така че $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(\alpha_n - \alpha) = 0$. Казваме, че $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална редица, ако $\lim\limits_{m,n \to \infty} \mu(\alpha_m - \alpha_n) = 0$. Ако всяка фундаментална редица в метрично поле (F, μ) е сходяща, то полето F се нарича пълно относно метирката μ. Всяко метрично поле (F, μ) се влага в пълно метрично поле $(\overline{F}, \overline{\mu})$ като навсякъде гъсто подмножество. Полето $\overline{F}$ се нарича попълнение на F относно метирката μ. Фундаменталните редици $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ в метрично поле (F, μ) са еквивалентни, ако $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(\alpha_n - \beta_n) = 0$. Попълнението $\overline{F}$ се строи като множеството на класовете на еквивалентност на фундаменталните редици с елементи от F. Можем да си мислим, че $\overline{F}$ се получава от F чрез присъединяване на границите на всички несходящи фундаментални редици $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$. Изоморфизмът $\varphi : E \to F$ на метрични полета (E, μ_o) и (F, μ) е непрекъснат, ако всяка сходяща редица $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ се изобразява в сходяща редица $\{\varphi(\alpha_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset F$. Попълнението $\overline{F}$ на метрично поле (F, μ) е единствено с точност до непрекъснат изоморфизъм.

Нека k е алгебрично затворено поле, X е пълна гладка крива над k, а F е функционалното поле на X. Локалните пръстени $\mathcal{O}_{P,X}$ на точките $P \in X$ са пръстени на дискретно нормиране $\nu_P : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Ако t е пораждащ на максималния идеал $\mathfrak{m}_{P,X}$ на $\mathcal{O}_{P,X}$, то попълнението F_P на F относно ν_P е изоморфно на полето на формалните степенни редове

$$k((t)) = \left\{ \sum_{i=-N}^{\infty} a_i t^i \,|\, N \in \mathbb{N} \cup \{0\},\, a_i \in k \right\}.$$

Нека $\varphi : X \to Y$ е краен доминантен морфизъм на пълни гладки криви. Тогава функционалното поле E на X е крайно сепарабелно разширение на функционалното поле F на Y. За произволна точка $P \in Y$ да разгледаме слоя $\varphi^{-1}(P) = \{Q_1, \ldots, Q_r\} \subset X$. Означаваме с $\overline{F}$ попълнението на F относно дискретното нормиране $\nu_P : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ на $\mathcal{O}_{P,Y}$. Ако $\overline{E_i}$ са попълненията на E_i относно дискретните нормирания $w_i : E \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ на $\mathcal{O}_{Q_i,X}$, то може да се докаже, че $\overline{F} \otimes_F E = \oplus_{i=1}^{r} \overline{E_i}$. Да напомним, че разширението $E \supset F$ е крайно сепарабелно, така че съществува примитивен елемент $\theta \in E$ с $E = F(\theta)$. Ако $[E : F] = m$, то минималният полином на θ над F има m различни корена $\theta_1 = \theta, \theta_2, \ldots, \theta_m$ и всеки елемент на E е от вида $e = \sum\limits_{i=0}^{m-1} a_i \theta^i$ с $a_i \in F$. Тогава нормата

$$N_{E/F}\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i \theta^i\right) = \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i \theta_j^i\right) \in F.$$

Установява се, че за всяко $e \in E$ е в сила $N_{E/F}(e) = \prod\limits_{i=1}^{r} N_{\overline{E_i}, \overline{F}}(e)$.

Лема 15.2. *Всяко $f \in F$ има дивизор (f) от степен* $\deg(f) = 0$.

Доказателство: Първо ще докажем лемата за рационална крива $X = \mathbb{P}^1$ с функционално поле $k(x)$. Всяко $f \in k(x)$ е произведение на рационални функции от вида $(x-a)^n$ за някои $a \in k$ и $n \in \mathbb{Z}$. Съгласно (i) и (ii), достатъчно е да проверим, че $\deg((x-a)^n) = 0$. Това следва от

$$\nu_P((x-a)^n) = \begin{cases} n & \text{за } P = a \\ -n & \text{за } P = \infty \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

За произволна крива Y с функционално поле E да изберем трансцендентен над k елемент $x \in E$, така че E е крайно сепарабелно разширение на $F = k(x)$ от степен m. Тогава съществува краен доминантен сепарабелен морфизъм $\varphi : Y \to \mathbb{P}^1$. Достатъчно е да докажем, че за произволна точка $P \in \mathbb{P}^1$ е в сила

$$\nu_P(N_{E/F}(f)) = \sum_{Q \in \varphi^{-1}(P)} w_Q(f), \tag{15.1}$$

където w_Q са дискретните нормирания, които отговарят на точките Q от слоя на φ над P. Наистина, тогава

$$0 = \sum_{P \in X} \nu_P(N_{E/F}(f)) = \sum_{Q \in Y} w_Q(f)$$

съгласно случая на рационална крива $X = \mathbb{P}^1$.
Да означим с $\nu = \nu_P$, $\varphi^{-1}(P) = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$, $w_i = w_{Q_i}$ за $\forall 1 \leq i \leq r$. Нека $\overline{F}$ е попълнението на F относно ν, а $\overline{E_i}$ са попълненията на E относно w_i. Полето от остатъци $k = \mathcal{O}_{P,X}/\mathfrak{M}_{P,X}$ е алгебрично затворено, така че съвпада с крайните си разширения $\mathcal{O}_{Q_i,Y}/\mathfrak{M}_{Q_i,Y}$ и степените на полетата от остатъци са $f_i = 1$. По този начин, $\overline{E_i}$ са напълно разклонени над $\overline{F}$ и $[\overline{E_i} : \overline{F}] = e_i$. Имаме $N_{E/F}(f) = \prod N_{\overline{E_i}/\overline{F}}(f)$ с $\sum\limits_{i=1}^{r} e_i = m$. Следователно $\nu(N_{E/F}(f)) = \sum\limits_{i=1}^{r} \nu(N_{\overline{E_i}/\overline{F}}(f))$ и за да установим (15.1) е достатъчно да отбележим, че $\nu(N_{\overline{E_i}/\overline{F}}(f)) = \frac{w_i}{f_i}(f) = w_i(f)$, Q.E.D.

Определение 15.3. *Дивизорите D_1 и D_2 се наричат линейно еквивалентни, ако съществува $f \in F$ с $D_1 - D_2 = (f)$.*
Ще бележим с $D_1 \sim D_2$ линейно еквивалентните дивизори. Множеството на дивизорите, които са линейно еквивалентни с фиксиран дивизор D е клас на линейна еквивалентност на D.

Определение 15.4. *Дивизорът $D = \sum n_P P$ е ефективен, ако всичките му коефициенти са неотрицателни, $\forall n_P \geq 0$.*
Определяме частична наредба на дивизорите $D \leq E$, ако $E - D$ е ефективен дивизор.

Произволен дивизор $D = \sum n_P P$ се представя като разлика на ефективни дивизори $D = D_+ - D_-$, където

$$D_+ = \sum_{n_P > 0} n_P P, \quad D_- = \sum_{n_P < 0} (-n_P) P.$$

В частност, ако $D = (f)$ е главен дивизор, то $D_+ = (f)_0$ е дивизорът на нулите, а $D_- = -(f)_\infty$ е дивизорът на полюсите на f.

Лема 15.5. *Нека $f \in F \setminus k$ е такъв елемент на функционалното поле F на пълна гладка крива X, че F е крайно сепарабелно разширение на $k(f)$. Да разгледаме крайното разклонено покритие $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$, индуцирано от влагането $k(f) \hookrightarrow F$ и да означим с e_i индексите на разклонение на Q_i над ∞ за*

$\varphi^{-1}(\infty) = \{Q_1, \dots, Q_r\}$. *Тогава*

$$(f)_\infty = \sum e_i Q_i \ \ \text{и} \ \ \deg((f)_0) = \deg((f)_\infty) = [F : k(f)]. \qquad (15.2)$$

Доказателство: Нека ν е дискретното нормиране на локалния пръстен на ∞, а $w_1, \dots, w_r$ са дискретните нормирания на F, продължаващи ν. Те отговарят на точките $Q_1, \dots, Q_r$, които се изобразяват в ∞ чрез φ. Нека e_i са съответните индекси на разклонение. Ако $Q \in X$ съответства на дискретно нормиране w, то коефициентът на Q в дивизора на полюсите $(f)_\infty$ е ненулев тогава и само тогава, когато $w(f) < 0$. Понеже ν е единственото нормиране на $k(f)$ с $\nu(f) < 0$, необходимо и достатъчно условие за $w(f) < 0$ е w да продължава ν, т.е. $\varphi(Q) = \infty$. Следователно точките, които имат ненулеви коефициенти в $(f)_\infty$ са точно $Q_1, \dots, Q_r$. Още повече, тези коефициенти са

$$n_{Q_i} = -w_i(f) = -e_i \nu(f) = e_i.$$

(ii) Степента $\deg((f)_\infty) = \sum n_{Q_i} = \sum e_i = n$. От Лема 15.2 имаме $\deg((f)_0) = \deg((f)_\infty)$, Q.E.D.

Определение 15.6. *За произволно многообразие X, което е гладко в коразмерност 1, дивизор на Вайл е елемент на свободната абелева група, породена от неприводимите подмногообразия с коразмерност* 1.

Локалният пръстен на всяко подмногообразие E с коразмерност 1 е регулярен, а оттам и пръстен на дискретно нормиране. Да означим с ν_E съответното дискретно нормиране. За всяка функция f от функционалното поле F на X и за произволно неприводимо подмногообразие E с коразмерност 1 определяме цяло число $\nu_E(f)$. Дивизорът на f се задава като $(f) = \sum\limits_E \nu_E(f)E$. За $\forall f \in F$ съществуват краен брой хиперповърхнини $E \subset X$ с $\nu_E(f) \neq 0$, доколкото нулите и полюсите на f са крайни обединения на неприводими хиперповърхнини. Два дивизора са линейно еквивалентни, ако разликата им е дивизор на функция.

Пълната линейна система $|D|$ на дивизор D върху крива X е множеството на ефективните дивизори, които са линейно еквивалентни с D. Всеки елемент на $|D|$ може да се представи във вида $(f) + D$ за някое $f \in F$. Нека

$$L(D) = \{f \in F \,|\, (f) + D \geq 0 \ \text{ или } f = 0\}.$$

Тогава $L(D)$ е линейно пространство над k и съответствието $f \mapsto (f) + D$ изобразява $L(D)$ върху $|D|$. Функциите $f_1, f_2 \in L(D)$ имат един и същи образ тогава и само тогава, когато те имат един и същи дивизор, така че $\frac{f_1}{f_2}$ е функция без нули и полюси. Това означава, че $\frac{f_1}{f_2} \in k$, защото $\frac{f_1}{f_2}$ е във всеки пръстен на нормиране на F, а оттам и цял над алгебрично затвореното поле k. Поточно, ако $\frac{f_1}{f_2}$ не е цял над k, разглеждаме хомоморфизма $\varphi : k\left[\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{-1}\right] \to k$ с $\varphi\left(\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{-1}\right) = 0$. Съгласно Теоремата за продължение, съществува пръстен на нормиране R на F и продължение $\Phi : R \to k$ на φ с $Ker(\Phi) = \mathfrak{M}_R$. По този начин, $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{-1} \in \mathfrak{M}_R$, откъдето $\frac{f_1}{f_2} \notin R$, противно на факта, че $\frac{f_1}{f_2}$ се съдържа във всички пръстени на нормиране на F. И така, $f \mapsto (f) + D$ задава сюрективно изображение $L(D) \setminus \{0\} \to |D|$, под действие на което функциите $f_1, f_2 \in L(D) \setminus \{0\}$ имат един и съще образ тогава и само тогава, когато са пропорционални с ненулева константа от k. В резултат, $|D|$ може да се отъждестви с проективното пространство $\mathbb{P}(L(D) \setminus \{0\})$.

Ако $X \subseteq \mathbb{P}^n$ е проективно многообразие, то за произволна хиперравнина $H \subset \mathbb{P}^n$ разбиваме $X \cap H$ в обединение $X \cap H = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ от неприводими компоненти Y_i. Въвеждаме кратности на пресичане $n_i = n_i(H, X, Y_i) > 0$ така, че $n_i > 1$ точно когато H се допира до X по протежение на някаква неприводима компонента Y_i на $X \cap H$. Тогава $D_H = \sum n_i Y_i$ е ефективен дивизор върху X. Твърдим, че ако H пробягва хиперравнините в $\mathbb{P}^n$, то D_H образува линейна система. По-точно, ако $H' \subset \mathbb{P}^n$ е друга хиперравнина, трябва да проверим, че $D_H \sim D_{H'}$ са линейно еквивалентни. Нека $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ за линейно пространство V с $\dim(V) = n+1$, а $U \subset V$ и $U' \subset V$ са хиперравнините с $\mathbb{P}(U) = H$, $\mathbb{P}(U') = H'$. Да означим с T и T' линейните функционали във V, които задават $U = \{v \in V \,|\, T(v) = 0\}$ и $U' = \{v \in V \,|\, T'(v) = 0\}$. Разглеждаме функцията

$$f : V \setminus U' \longrightarrow k,$$

$$f(v) = \frac{T(v)}{T'(v)}.$$

Тя е постоянна върху правите през началото във V и индуцира функция върху X, която е регулярна в допълнението на H'. С други думи, f е елемент на функционалното поле F на X с дивизор $D_H - D_{H'}$, така че $D_H \sim D_{H'}$. Получената линейна система дивизори $\{D_H\}_H$ отговаря на конкретното проективно влагане на X.

Оттук нататък, X е пълна гладка крива. Разглеждаме Декартовото произведение $\prod\limits_{P \in X} F_P$ на всички попълнения F_P на F. Казваме, че $x = (x_P) \in \prod F_P$ е адел, ако $\nu_P(x_P) \geq 0$ за всички точки P с изключение на краен брой. Ако $x_P = 0$, то $\nu_P(x_P) = \nu_P(0) = \infty \geq 0$. Множеството на аделите A е подпръстен на $\prod\limits_{P \in X} F_P$. Освен това, A съдържа F като подпръстен, вложен диагонално - всяко $f \in F$ се отъждествява с адела $x = (x_P)$ с $x_P = f$ за $\forall P$.

За произволен дивизор $D = \sum n_P P$ нека

$$\Lambda(D) = \{x \in A \,|\, \nu_P(x_P) + n_P \geq 0 \text{ за } \forall P \in X\}.$$

Тогава $L(D) = \Lambda(D) \cap F$.

Лема 15.7. *Нека R е пръстен, M е R-модул, а $V \supsetneqq V'$ и U са R-подмодули на M. Тогава съществува точна редица*

$$0 \longrightarrow (V \cap U)/(V' \cap U) \xrightarrow{f} V/V' \xrightarrow{g} (V+U)/(V'+U) \longrightarrow 0 .$$

Доказателство: Композицията

$$V \longrightarrow V + U \longrightarrow (V+U)/(V'+U)$$

е хомоморфизъм на R-модули, чието ядро съдържа V'. Следователно тя индуцира хомоморфизъм

$$g : V/V' \longrightarrow (V+U)/(V'+U).$$

Непосредствено се вижда, че g е епиморфизъм. От друга страна, $V' \cap U$ е ядрото на композицията

$$V \cap U \longrightarrow V \longrightarrow V/V'$$

и индуцираното изображение

$$f : (V \cap U)/(V' \cap U) \longrightarrow V/V'$$

е мономорфизъм. За точността във V/V' трябва да проверим, че $Im(f) = Ker(g)$. За $\forall v \in V \cap U$ е в сила $gf(v + (V' \cap U)) = g(v + V') = v + (V' + U) = (V' + U)$, така че $Im(f) \subseteq Ker(g)$. Обратно, ако $g(v + V') = v + U = V' + U$, то

$v = v' + u$ за подходящи $v' \in V'$ и $u \in U$. Следователно $v - v' = u \in V \cap U$ и $f(u + (V' \cap U)) = u + V' = v + V'$, така че $Ker(g) \subseteq Im(f)$, Q.E.D.
Ако $D \geq E$, то $L(D) \supseteq L(E)$ и $\Lambda(D) \supseteq \Lambda(E)$. Прилагаме Лема 15.7 с $R = k$, $V = \Lambda(D)$, $V' = \Lambda(E)$, $U = F$ и получаваме, че

$$\dim(L(D)/L(E)) + \dim(\Lambda(D) + F/\Lambda(E) + F) = \dim(\Lambda(D)/\Lambda(E)), \qquad (15.3)$$

при условие, че $\Lambda(D)/\Lambda(E)$ е крайномерно.

Лема 15.8. *(i)* $L(0) = k$.
(ii) Ако $\deg(D) < 0$*, то* $L(D) = 0$.

Доказателство: (i) Ако $f \in k$, то $(f) = 0$, така че $f \in L(0)$. От друга страна, ако $f \in L(0)$, то f няма полюси. Съгласно условие (15.2) от Лема 15.5, f има един и същи брой нули и полюси, броени с техните кратности. В случая, f няма нули и $(f) = 0$. Както вече обяснихме, това е достатъчно за $f \in k$.
(ii) Ако $\deg(D) < 0$ и $f \in L(D) \setminus \{0\}$, то $(f) \geq -D$, така че $\deg(f) > 0$. Това противоречи на Лема 15.2 и доказва, че $L(D) = 0$, Q.E.D.

Твърдение 15.9. *Нека $D \geq E$ са дивизори върху пълна гладка крива X. Тогава*
(i) $\dim(\Lambda(D)/\Lambda(E)) = \deg(D) - \deg(E)$*;*
(ii) ако $\deg(D) \geq 0$*, то* $\dim(L(D)) \leq \deg(D) + 1$*;*
(iii) $\dim(\Lambda(D) + F) / (\Lambda(E) + F) < \infty$.

Доказателство: (i) Достатъчно е да докажем формулата за $D = E + P$, $P \in X$. Нека $E = \sum n_Q Q$. Съществува адел x с $\nu_P(x_P) = -n_P - 1$ и $\nu_Q(x_Q) \geq -n_Q$ за $\forall Q \neq P$, така че $x \in \Lambda(D) \setminus \Lambda(E)$. От друга страна, за всеки друг елемент $y \in \Lambda(D)$ съществува константа $c \in k$, така че $\nu_P(y_P - cx_P) \geq n_P$ и $y - cx \in \Lambda(E)$. Това доказва, че $\dim(\Lambda(E + P)/\Lambda(E)) = 1$.
Сега от (15.3) следва, че $L(D)/L(E)$ и $(\Lambda(D)+F)/(\Lambda(E)+F)$ са крайномерни, така че е изпълнено (iii).
За (ii) да означим степента на D с $\deg(D) = n \geq 0$ и да изберем произволна точка P от кривата X. Тогава дивизорът $E = D-(n+1)P$ е от степен $\deg(E) = \deg(D) - (n+1) = -1 < 0$ и $L(E) = 0$ съгласно Лема 15.8 (ii). Освен това, $D - E = (n+1)P \geq 0$, така че

$$\dim(L(D)) = \dim(L(D)/L(E)) \leq \dim(\Lambda(D)/\Lambda(E)) = \deg(D) - \deg(E) = n + 1,$$

Q.E.D.
Съгласно условие (ii) от предишното твърдение можем да определим естественото число

$$l(D) = \dim L(D).$$

Нека U и U' са подпространства на линейно пространство V, чието сечение $U \cap U'$ е с краен индекс във V. Определяме обобщената коразмерност като

$$(U : U') = \dim(U/(U \cap U')) - \dim(U'/(U \cap U')).$$

За разлика от обикновената коразмерност, $(U : U')$ е коректно зададено независимо от това дали U съдържа U'. За произволни подпространства U_1, U_2 и U_3 на V е в сила $(U_1 : U_2)+(U_2 : U_3) = (U_1 : U_3)$, стига $U_i \cap U_j$ да са с краен индекс във V за всички $1 \leq i < j \leq 3$. По-точно, ако $W = U_1 \cap U_2 \cap U_3$, то за произволни $1 \leq i < j \leq 3$ фактор-пространството $(U_i \cap U_j)/W \simeq [(U_i \cap U_j) + U_k]/U_k$ е крайномерно в качеството си на подпространство на $(U_i + U_k)/U_k \simeq U_i/(U_i \cap U_k)$. Следователно обичайният индекс $[U_i : W] = [U_i : (U_i \cap U_j)][(U_i \cap U_j) : W]$ е краен и $(U_i : U_j) = \dim(U_i/W) - \dim(U_j/W)$. В резултат, получаваме равенството $(U_1 : U_2) + (U_2 : U_3) = (U_1 : U_3)$.
Можем да запишем (15.3) във вида

$$l(D) - l(E) + (\Lambda(D) + F : \Lambda(E) + F) = \deg(D) - \deg(E).$$

Ако $r(D) = \deg(D) - l(D)$, то

$$r(D) - r(E) = (\Lambda(D) + F : \Lambda(E) + F). \tag{15.4}$$

В доказателството на горните формули допуснахме, че $D \geq E$, но те са верни и без това предположение. По-точно, за произволни дивизори $D = \sum_P n_P P$ и $E = \sum_P m_P P$ съществува дивизор $E' = \min(D, E) = \sum_P \min(n_P, m_P)P$, така че $D \geq E'$ и $E \geq E'$. Тогава изваждайки почленно

$$r(D) - r(E') = (\Lambda(D) + F : \Lambda(E') + F) \text{ и}$$

$$r(E) - r(E') = (\Lambda(E) + F : \Lambda(E') + F)$$

получаваме (15.4) за произволни дивизори D и E.

Лема 15.10. *(i) Ако $D_1 \sim D_2$ са линейно еквивалентни, то $l(D_1) = l(D_2)$ и $r(D_1) = r(D_2)$.*
(ii) Ако $D \geq E$, то $r(D) \geq r(E)$.

Доказателство: (i) Ако $D_1 \sim D_2$, то $D_1 = (g) + D_2$ за някое $g \in F$. Но $(f) \geq -D_1$ тогава и само тогава, когато $(fg) = (f) + (g) \geq -D_2$, така че $f \mapsto fg$ е k-линеен изоморфизъм на $L(D_1)$ с $L(D_2)$. Оттук $l(D_1) = l(D_2)$. От Лема 15.2 следва, че $\deg(D_1) = \deg(D_2)$, така че $r(D_1) = r(D_2)$.
Условие (ii) се получава от (15.4).

Твърдение 15.11. *Съществува константа c, която зависи само от X, така че*

$$r(D) = \deg(D) - l(D) \leq c$$

за всички дивизори D върху X.

Доказателство: Да фиксираме $x \in F$, така че F е крайно сепарабелно разширение на $k(x)$. Да разгледаме морфизма $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$, отговарящ на влагането $k(x) \hookrightarrow F$. Представяме $\mathbb{P}^1 = k \cup \{\infty\}$ и $\varphi^{-1}(\infty) = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$. Ако $D_0 = (x)_\infty$ е дивизорът на полюсите на x, то $D_0 = \sum e_i Q_i$, където e_i са индексите на разклонение, а $n = [F : k(x)] = \deg(D_0)$ по Лема 15.5. След умножение с подходящи елементи на $k[x]$ можем да предполагаме, че базисът $y_1, \ldots, y_n$ на F над $k(x)$ се състои от цели над $k[x]$ елементи. Тогава всеки полюс на y_i е измежду полюсите Q_i на x, защото ако P е точка на X, в която x няма полюс, то $k[x]$ се съдържа в локалния пръстен $\mathcal{O}_P$, заедно с цялата си обвивка $\overline{k[x]}$ във F. Следователно $y_i \in \mathcal{O}_P$ и P не е полюс на y_i. По този начин установихме, че съществува достатъчно голямо естествено число m_o, така че $y_1, \ldots, y_n \in L(m_o D_o)$. За произволно $m \geq m_o$ да разгледаме функциите $x^s y_i$ за $0 \leq s \leq m - m_o$, $1 \leq i \leq n$. Това са линейно независими над k елементи от $L(mD_0)$, така че $l(mD_0) \geq n(m - m_o + 1)$. От друга страна, $\deg(mD_o) = mn$, така че $r(mD_0) \leq c = (m_o - 1)n$ за $\forall m \geq m_o$.
Произволен дивизор D може да се представи като сума на дивизори $D = D_1 + D_2$, където D_1 е линейна комбинация на Q_i, а коефициенттите на Q_i в D_2 са 0. Избираме полином $f \in k[x]$, който има нули с висока кратност в носителя на D_2, така че $D - (f)$ има неположителни коефициенти във всички точки освен някакви Q_i. Тогава $D - (f) \leq mD_0$ за достатъчно големи $m \in \mathbb{N}$. Съгласно Лема 15.10 (i) е в сила $r(D) = r(D - (f))$, а Лема 15.10 (ii) дава $r(D - (f)) \leq r(mD_0) \leq c$, Q.E.D.

Лема 15.12. *Съществува дивизор E, така че пръстенът на аделите*

$$A = \Lambda(E) + F.$$

Доказателство: С помощта на Твърдение 15.11 да изберем в (15.4) дивизор E с максимално $r(E)$. Ако допуснем, че $\Lambda(E)+F \neq A$, то съществува $x \in A \setminus (\Lambda(E)+F)$ и можем да изберем дивизор $D \geq E$ с $x \in \Lambda(D)$. Тогава $(\Lambda(D)+F : \Lambda(E)+F) > 0$, така че $r(D) > r(E)$ съгласно (15.4). Това противоречи на избора на E с максимално $r(E)$ и доказва, че $A = \Lambda(E)+F$, Q.E.D.