Глава 16

Теорема на Риман-Рох.

ТЕОРЕМА 26. (Риман) *Съществува неотрицателно цяло g, наречено род на кривата X и функция $\delta(D)$, която на дивизор D съпоставя неотрицателно цяло $\delta(D)$ по такъв начин, че за $D \geq E$ е изпълнено $\delta(D) \leq \delta(E)$, $\delta(D_0) = 0$ за някакъв дивизор D_0 и*

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + \delta(D) \tag{16.1}$$

за всички дивизори D.

Доказателство: Съгласно Лема 15.12, можем да изберем дивизора D_0 по такъв начин, че $\Lambda(D_0) + F = A$. Тогава (15.4) дава

$$\infty > r(D_0) - r(D) = (A : \Lambda(D) + F) \geq 0$$

и можем да определим

$$\delta(D) := (A : \Lambda(D) + F).$$

Ясно е, че $\delta(D_0) = 0$ и ако $D \geq E$, то $\delta(E) - \delta(D) = r(D) - r(E) \geq 0$ съгласно Лема 15.10 (ii). Оттук

$$r(D) + \delta(D) = \deg(D) - l(D) + \delta(D)$$

е константа за произволен дивизор D и задаваме

$$g : r(D) + \delta(D) + 1 = \deg(D) - l(D) + \delta(D) + 1.$$

За да проверим, че $g \geq 0$ избираме $D = 0$ и пресмятаме, че $g = -l(0) + \delta(0) + 1$. От Лема 15.8 (i) имаме $l(0) = 1$, така че $g = \delta(0) \geq 0$, Q.E.D.
Теоремата на Риман-Рох уточнява Теоремата на Риман, отъждествявайки $\delta(D)$ с размерност на пространство от диференциали.
За да определим диференциални 1-форми върху пред-многообразие X, да разгледаме афинно отворено подмножество $U \subseteq X$. Сечението $TU = \cap_{p\in U} T_p U$ на допирателните пространства на Зариски към точките от U се състои от диференциранията на афинния координатен пръстен $\cap_{p\in U} \mathcal{O}_{p,U} = k[U]$. Елементите на TU се наричат векторни полета върху U. Векторните полета Tk^n върху k^n образуват n-мерно линейно пространство над k с базис $\frac{\partial}{\partial x_i} : k[x_1, \dots, x_n] \to k[x_1, \dots, x_n]$ за $1 \leq i \leq n$. В случая $U \subsetneqq k^n$, пространството на векторните полета TU се състои от k-линейните комбинации $D = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ с $D(f) = 0$ за $\forall f \in I(U) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. По този начин, TU е пространството на k-диференциранията $D : k[U] \to k[U]$ на афинния координатен пръстен $k[U]$. Полето $k(U)$ на рационалните функции върху U съвпада с полето от частни на $k[U]$ и с функционалното поле F на X. Всяко диференциране $D : k[U] \to k[U]$ се продължава еднозначно до диференциране

$$D : F \longrightarrow F,$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD(f) - fD(g)}{g^2} \text{ за } \forall f, g \in k[U].$$

Непосредствено се проверява, че ако $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}$, то $D\left(\frac{f}{g}\right) = D\left(\frac{f_1}{g_1}\right)$. Линейното пространство на k-диференциранията $D : F \to F$ е с размерност $d = \dim(X) = \operatorname{tr}\deg_k(F)$ над F. Първо избераме базис на трансцен $x_1, \dots, x_d$ на F над k и проверяваме, че $\frac{\partial}{\partial x_i} : k(x_1, \dots, x_d) \to k(x_1, \dots, x_d)$ за $1 \leq i \leq d$ са линейно независими над $k(x_1, \dots, x_d)$. Всяко k-диференциране $D : k(x_1, \dots, x_d) \to k(x_1, \dots, x_d)$ има еднозначно продължение до k-диференциране $D : F \to F$ на крайното сепарабелно разширение $F \supset k(x_1, \dots, x_d)$. По-точно, ако θ е примитивен елемент на F над $k(x_1, \dots, x_d)$ и $f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \in k(x_1, \dots, x_d)[t]$ е минималният полином на θ над $k(x_1, \dots, x_d)$, то всеки елемент на F е от вида $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \theta^i$ за някои $a_i \in k(x_1, \dots, x_d)$ и

$$D\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \theta^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} D(a_i)\theta^i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i a_i \theta^{i-1}\right) D(\theta) \text{ с}$$

$$D(\theta) = -\frac{\sum_{j=0}^{n} D(c_j)\theta^j}{\sum_{j=1}^{n} j c_j \theta^{j-1}}$$

задава единственото продължение на $D : k(x_1, \dots, x_d) \to k(x_1, \dots, x_d)$ до $D : F \to F$. Тук използваме сепарабелността на θ над $k(x_1, \dots, x_d)$, което осигурява $f'(\theta) = \sum_{j=1}^{n} j c_j \theta^{j-1} \neq 0$.

Пространството $\Omega_{F/k}$ на диференциалните 1-форми е дуалното на пространството на k-диференциранията $D : F \to F$. В частност, $\Omega_{F/k}$ е дуално на пространството на векторните полета TU върху афинно отворено подмножество $U \subseteq X$. Размерността на $\Omega_{F/k}$ над F съдпада с размерността на предмногообразието X. По-точно, определяме $\Omega_{F/k}$ като универсалното F-линейно пространство на k-диференциранията на F. Това означава съществуване на k-диференциране $d : F \to \Omega_{F/k}$ и пропускане на всяко k-диференциране $D : F \to V$ във F-линейно пространство V през d и еднозначно определено F-линейно изображение $\tau : \Omega_{F/k} \to V$,

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega_{F/k} \arrow[d, "\tau"] \\ & V \end{tikzcd} .$$

Можем да разглеждаме $\Omega_{F/k}$ като фактор-пространството на F-линейната обвивка на $d(f)$ за $\forall f \in F$ по подпространството, породено от

$$d(f_1 f_2) - f_1 d(f_2) - f_2 d(f_1) \text{ за } \forall f_1, f_2 \in F \text{ и}$$

$$d(a) \text{ за } \forall a \in k.$$

Съгласно универсалното свойство на диференциалните форми $\Omega_{F/k}$, за всяко k-диференциране $D : F \to F$ съществува F-линеен функционал $\tau_D : \Omega_{F/k} \to F$, така че $D = \tau_D d$. Това задава F-линейно изображение

$$\tau : Der_k(F, F) \longrightarrow \Omega^*_{F/k} = Hom_F(\Omega_{F/k}, F),$$

$$D \mapsto \tau_D.$$

Проверява се, че τ е влагане и всеки F-линеен функционал върху $\Omega_{F/k}$, който се анулира върху $\tau(Der_k(F,F)) \simeq Der_k(F,F)$ е нулев. По този начин, $\tau : Der_k(F,F) \to \Omega^*_{F/k}$ се оказва F-линеен изоморфизъм.
Нека X е пълна гладка крива над алгебрично затворено поле k. Попълнението F_P на функционалното поле F на X относно дискретното нормиране $\nu_P : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, отговарящо на $P \in X$ е изоморфно на полето на формалните степенни редове $k((t_P)) = \left\{ \sum\limits_{i=-N}^{\infty} a_i t_P^i \,\middle|\, a_i \in k,\, N \in \mathbb{N} \right\}$ на локален параметър t_P в P. По-точно, ν_P има едиствено продължение до дискретно нормиране $\overline{\nu_P} : F_P \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Всеки елемент $t_P \in F_P$ с $\overline{\nu_P}(t_P) = 1$ поражда максималния идеал $\mathfrak{M}_{\mathfrak{o}_P}$ на пръстена $\mathfrak{o}_P = \{\alpha \in F_P \,|\, \overline{\nu_P}(\alpha) \geq 0\}$ на това нормиране $\overline{\nu_P}$ и се нарича локален параметър в P. Естественото влагане $\varphi : k[t_P] \to \mathfrak{o}_P$ на полиномите на локален параметър t_P се продължава до хомоморфизъм на формалните степенни редове

$$\varphi : k[[t_P]] \longrightarrow \mathfrak{o}_P,$$

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t_P^i\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t_P^i\right),$$

който се оказва изоморфизъм. В резултат, полето от частни $k((t_P))$ на $k[[t_P]]$ е изоморфно на полето от частни F_P на $\mathfrak{o}_P$.
Определението на резидуум на диференциална форма $\omega \in \Omega_{F/k}$ обобщава случая на $k = \mathbb{C}$ и $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Нека функцията $f(z)$ е холоморфна (т.е. регулярна) в допълнението на краен брой изолирани точки $a \in \mathbb{C}$. Ако $f(z)$ е холоморфна във венец $V_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z-a| < R\}$ около особена точка $a \in \mathbb{C}$, то тя се представя чрез ред на Лоран $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ във $V_{r,R}(a)$. Резидуумът на $f(z)dz$ в $a \in \mathbb{C}$ се определя като интеграла

$$Res_a(f(z)dz) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,\varepsilon)} f(z)dz$$

по достатъчно малка окръжност $\partial D(a,\varepsilon) = \{a + \varepsilon e^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $\varepsilon > 0$, така че a е единствената особеност на $f(z)$ в затворения диск

$$\overline{D(a,\varepsilon)} = \{a + re^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\, 0 \leq r \leq \varepsilon\}.$$

Оказва се, че резидуумът $Res_a(f(z)dz) = c_{-1}$ съвпада с коефициента на $\frac{dz}{z-a} = \frac{d(z-a)}{z-a}$ в диференциалната форма $\omega = f(z)dz$. В частност, ако $f(z)$ е холоморфна в $a \in \mathbb{C}$, то $Res_a(f(z)dz) = 0$. Може да се провери, че ако $f(z)$ е холоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $a_0 = \infty$, то $\sum\limits_{i=0}^{n} Res_{a_i}(f(z)dz) = 0$. Еквивалентно,

$$\sum_{a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} Res_a(f) = 0.$$

Горното равенство се обобщава за произволна крива над произволно алгебрично затворено поле k. Построяваме 1-мерно пространство над k, което е породено от $\frac{dt_P}{t_P}$ за произволен локален параметър t_P в P и което не зависи от избора на този локален параметър, т.е. $\frac{d(ut_P)}{ut_P} = \frac{dt_P}{t_P}$ за $\forall u \in \mathfrak{o}_P^*$. За целта преминаваме от $\Omega_{F_P/k}$ към фактора $\Omega^{(c)}_{F_P/k}$, където индуцираното диференциране $d : F_P \to \Omega^{(c)}_{F_P/k}$ изпълнява равенството

$$d\left(\sum a_i x^i\right) = \left(\sum i a_i x^{i-1}\right) dx.$$

Ако полето k е с проста характеристика $\mathrm{char}(k) = p$, разглеждаме операторите на Картие $\delta_i : F_P \to \Omega_{F_P/k}$, $\delta_i(x) = x^{p^i - 1}dx$ за $i \in \mathbb{N}$ и определяме индуктивно $\Sigma^0_{F_P/k} = 0$,

$$\Sigma^{i+1}_{F_P/k} = \{\omega \in \Omega_{F_P/k} \,|\, \omega - \delta_i(x) \in \Sigma^i_{F_P/k} \text{ за някое } x \in F_P\}.$$

Тогава $\Sigma^i_{F_P/k}$ се оказват абелеви групи, породени от $\delta_j(F_P)$ за $j < i$. Полагаме $\Sigma_{F_P,k} = \cup_{i=0}^{\infty}\Sigma^i_{F_P/k}$ в случая на $\mathrm{char}(k) = p$ и $\Sigma_{F_P/k} = d(F_P) \subseteq \Omega_{F_P/k}$ за $\mathrm{char}(k) = 0$. Затворената обвивка на $\Sigma_{F_P/k}$ в $\Omega_{F_P/k}$ се съдържа в $\Omega^{(c)}_{F_P/k}$ като подпространство с коразмерност 1 и се бележи с $\Sigma^{(c)}_{F_P/k}$.
Нека $x \in F_P$. Ако $\mathrm{char}(k) = 0$, то $\frac{dx}{x} \in \Sigma^{(c)}_{F_P/k}$ тогава и само тогава, когато $\overline{\nu_P}(x) = 0$. За $\mathrm{char}(k) = p_o$ условието $\frac{dx}{x} \in \Sigma^{(c)}_{F_P/k}$ е еквивалентно на това p_o да дели $\overline{\nu_P}(x)$. Произволен локален параметър t_P в $P \in X$ задава ненулев елемент $\frac{dt_P}{t_P} \in \Omega^{(c)}_{F_P/k}/\Sigma^{(c)}_{F_P/k}$. Непоследствено се вижда, че всеки друг локален параметър ut_P в $P \in X$ с $u \in \mathcal{O}^*_{P,X}$ определя същия клас. Вземайки предвид, че фактор-пространството $\Omega^{(c)}_{F_P/k}/\Sigma^{(c)}_{F_P/k}$ е едномерно, получаваме изображението

$$\rho_{F_P/k} : \Omega^{(c)}_{F_P/k}/\Sigma^{(c)}_{F_P/k} \longrightarrow k.$$

Ако $\pi : \Omega_{F_P/k} \to \Omega^{(c)}_{F_P/k}/\Sigma^{(c)}_{F_P/k}$ е каноничната проекция, то $\mathrm{res}_P(\omega) = \rho_{F_P/k}\pi(\omega)$ за $\forall \omega \in \Omega_{F_P/k}$. За $\forall \omega \in \Omega_{F/k}$ съществуват само краен брой точки $P \in X$, така че $\mathrm{res}_P(\omega) \neq 0$. Причина за това е, че ω оппада в $\Omega_{\mathfrak{o}_P/k}$ за всички с изключение на краен брой точки от X.
За произволна диференциална форма $\omega \in \Omega_{F/k}$ твърдим, че

$$\sum_{P \in X} \mathrm{res}_P(\omega) = 0.$$

За $X = \mathbb{P}^1$ с функционално поле $F = k(x)$ представяме всяка рационална функция $f(x)$ като сума на полином $f_o(x) \in k[x]$ и изрази от вида $(x-a)^{-n}$ за $n \in \mathbb{N}$. Достатъчно е да докажем, че $\sum\limits_{P \in X} \mathrm{res}_P(\omega) = 0$ за $\omega = f_o(x)dx$ с полином $f_o(x) \in k[x]$ или за $\omega = (x-a)^{-n}dx$ с $a \in k$ и $n \in \mathbb{N}$. Понеже резидуумите са независими при транслация на променливата и са линейни относно ω, свеждаме твърдението към $\sum\limits_{P \in X} \mathrm{res}_P(x^n dx) = 0$ за $n \in \mathbb{Z}$. Последното е ясно от

$$\mathrm{res}_P\left(\frac{dx}{x^n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{за } n = 1 \text{ и } P = 0, \\ -1 & \text{за } n = 1 \text{ и } P = \infty \\ 0 & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

За произволна пълна гладка крива Y с функционално поле E избираме базис на трансцендентност x на E над k, така че E е крайно сепарабелно разширение на $F = k(x)$. Влагането $F \subset E$ индуцира краен доминантен морфизъм $\varphi : Y \to X = \mathbb{P}^1$. Може да се докаже, че ако x е локален параметър в точка $P \in Y$, то x е базис на трансцендентност на E над k, E е крайно сепарабелно разширение на $F = k(x)$ и $dx \neq 0$ в $\Omega_{E/k}$, така че всяка диференциална форма $\omega \in \Omega_{E/k}$ може да се представи във вида $\omega = ydx$ чрез някакъв елемент $y \in E$.
За да установим, че $\omega = ydx$ има само краен брой ненулеви резидууми, избираме афинно отворено подмножество $U \subseteq Y$, така че x и y са регулярни върху U. Твърдим, че $\mathrm{res}_P(\omega) = 0$ за $\forall P \in U$. За произволна точка $P \in U$ нека $\nu_P : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ е съответното дискретно нормиране, F_P е попълнението на F относно ν_P, а $\mathfrak{o}_P$ е пръстенът на нормирането $\overline{\nu_P} : F_P \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Тогава

афинният координатен пръстен $k[U] \subseteq \mathfrak{o}_P$ и $x, y \in k[U]$, така че $x, y \in \mathfrak{o}_P$. По този начин, $\omega = ydx$ се оказва елемент на $\Omega_{\mathfrak{o}_P/k}$ и $\mathrm{res}_P(\omega) = 0$.
Нека $tr(\omega) = tr(ydx) = tr_{E/F}(y)dx \in \Omega_{F/k}$. Достатъчно е да докажем, че

$$\mathrm{res}_P(tr(\omega)) = \sum_{Q \in \varphi^{-1}(P)} \mathrm{res}_Q(\omega),$$

за да получим, че

$$0 = \sum_{P \in \mathbb{P}^1} \mathrm{res}_P(tr(\omega)) = \sum_{P \in \mathbb{P}^1} \sum_{Q \in \varphi^{-1}(P)} \mathrm{res}_Q(\omega) = \sum_{Q \in Y} \mathrm{res}_Q(\omega).$$

Нека $P \in \mathbb{P}^1$, $\varphi^{-1}(P) = \{Q_1, \dots, Q_r\}$, а $w_1, \dots, w_r$ са дискретните нормирания на E, които продължават $\nu_P : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ и отговарят на $Q_1, \dots, Q_r$. Означаваме с $\overline{F}$ попълнението на F относно ν_P, а с $\overline{E_i}$ - попълненията на E относно w_i. От $tr_{E/F}(y) \simeq \sum\limits_{i=1}^{r} tr_{\overline{E_i}/\overline{F}}(y)$ следва, че

$$\mathrm{res}_P(tr(\omega)) = \rho_{\overline{F}/k}\pi(tr(y)dx) = \sum_{i=1}^{r} \rho_{\overline{F}/k}\pi(tr_{\overline{E_i}/\overline{F}}(y)dx) =$$

$$\sum_{i=1}^{r} \rho_{\overline{E_i}/k}\pi(ydx) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{res}_{Q_i}(\omega).$$

На всеки ненулев диференциал $\omega \in \Omega_{F/k}$ отговаря дивизор $(\omega) = \sum n_P P$. Ако $t \in F$ е локален параметър в точка $P \in X$, то $dt \neq 0 \in \Omega_{F/k}$ и $\omega = fdt$ за някое $f \in F$. Полагаме $n_P = v_P(f)$. Да обърнем внимание, че локалният параметър t в p е определен с точност до множител от $\mathcal{O}^*_{P,X}$, така че $n_P = \nu_P(f)$ не зависи от избора на локален параметър. За да твърдим, че $(\omega) = \sum\limits_P n_P P$ е дивизор, трябва да проверим, че $n_P \neq 0$ за евентуално краен брой точки P. За целта, нека $x \in F$, $dx \neq 0$ и $y \in F$ е такова, че $\omega = ydx$. Съществува афинно отворено множество U, така че x, y и y^{-1} са регулярни върху U. Разклоненото покритие $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$, индуцирано от влагането на полета $k(x) \hookrightarrow F$ има краен брой точки на разклонение в U и можем да ги изключим от U без ограничение на общността. Сега за $\forall P \in U$ и $Q = \varphi(P) \in \mathbb{P}^1$ имаме степен на разклонение $e(P|Q) = 1$. Твърдим, че $n_P = 0$ за $\forall P \in U$. Наистина, ако разглеждаме x като функция върху U със стойност $x(P) = a$, то $\nu_P(x - a) \geq 1$. Но $x - a \in k(x)$ е локален параметър в точката $\varphi(P)$ и P не е точка на разклонение, така че $x - a \in F$ е локален параметър в P. Сега $\omega = ydx = yd(x - a)$ и $n_P = \nu_P(y)$. От това, че y и y^{-1} са едновременно в локалния пръстен на точката P, следва $\nu_P(y) = 0$. Това доказва, че $n_P \neq 0$ за евентуално краен брой P и $(\omega) = \sum\limits_P n_P P$ е дивизор.
За произволна функция f е ясно, че $(f\omega) = (f) + (\omega)$. Понеже $\Omega_{F/k}$ е 1-мерно, класът на линейна еквивалентност на (ω) е еднозначно определен. Този клас се нарича каноничен клас. Произволен дивизор от каноничния клас се нарича каноничен дивизор.

Пример 16.1. *Ако $\mathbb{P}^1 = k \cup \{\infty\}$ е проективната права с функционално поле $k(x)$, каноничният дивизор $(dx) = -2\infty$.*

В произволна точка $a \in k$ имаме локален параметър $t = x - a$ с $dx = 1.dt$. От $\nu_a(1) = 0$ за $\forall a \in k$ следва, че $n_a = 0$ за $\forall a \in k$ и $(dx) = n_\infty \infty$. В точката ∞ имаме локален параметър $t = x^{-1}$. Диференцирайки $x = t^{-1}$ получаваме $dx = -t^{-2}dt$, откъдето $\nu_\infty(t^{-2}) = -2$ и $(dx) = -2\infty$.
Нека Δ е множеството на k-линейните функционали върху A, които се анулират върху $\Lambda(D) + F$ за някакъв дивизор D. Тогава Δ е линейно пространство

над F, защото за $\forall T \in \Delta$ и $\forall f \in F$ имаме $(fT)(a) = T(fa)$ за $\forall a \in A$. Ако T се анулира върху $\Lambda(D) + F$, то fT се анулира върху $\Lambda(D + (f))$. Ако $T_1, T_2 \in \Delta$ се анулират съответно върхе $\Lambda(D_1)$ и $\Lambda(D_2)$, то за $D = \min(D_1, D_2)$ имаме $\Lambda(D) \subseteq \Lambda(D_1)$, $\Lambda(D) \subseteq \Lambda(D_2)$, така че T се анулира върху $\Lambda(D)$. Това доказва, че Δ е линейно пространство над F.

Лема 16.2. *Пространството Δ над F е с размерност най-много 1.*

Доказателство: Ще докажем, че произволни $T_1, T_2 \in \Delta$ са линейно зависими. Да допуснем противното и да изберем F-линейно независими $T_i \in \Delta$, анулиращи се върху $\Lambda(D_i) + F$ за $i = 1$ и $i = 2$. Ако $D_1 = \sum\limits_P n_P P$, $D_2 = \sum\limits_P m_P P$ и $D = \sum\limits_P \min(m_P, n_P)P$, то $\Lambda(D) \subseteq \Lambda(D_i)$ за $1 \leq i \leq 2$, така че T_1 и T_2 се анулират върху $\Lambda(D) + F$. За произволен дивизор E да изберем $y \in L(E)$. Тогава yT_i се анулира върху $\Lambda(D - E)$, а оттам и върху $\Lambda(D - E) + F$. Ако $y_1, \ldots, y_r$ е k-базис на $L(E)$, линейните функционали $y_j T_i$ са линейно независими над k, защото в противен случай съществуват неедновременно анулиращи се $a_{ij} \in k$, така че $\sum\limits_{i,j} a_{ij} y_j T_i = 0$. Ако $a_i = \sum\limits_j a_{ij} y_j$ за $i = 1$ или 2, то поради линейната независимост на $y_1, \ldots, y_r$ над k твърдим, че поне едното от a_1 или a_2 не се анулира. Но тогава $a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0$ противоречи на линейната независимост на T_1 и T_2 над F. Следователно $y_j T_i$ са линейно независими над k за $1 \leq j \leq r$, $1 \leq i \leq 2$. Още повече, $y_j T_i$ се анулират върху $\Lambda(D - E) + F$. Оттук

$$\delta(D - E) = (A : \Lambda(D - E) + F) = \dim \{A / [\Lambda(D - E) + F]\} \geq 2r = 2l(E),$$

защото съществуват $2r$ линейно независими над k линейни функционала върху $A / [\Lambda(D - E) + F]$. Прилагайки двукратно (16.1) и $\delta(E) \geq 0$ получаваме

$$\begin{gathered} l(D - E) = \deg(D) - \deg(E) + 1 - g + \delta(D - E) \geq \\ \deg(D) - \deg(E) + 1 - g + 2l(E) \geq \\ \deg(D) - \deg(E) + 1 - g + 2[\deg(E) + 1 + (-g)] = \\ \deg(D) + \deg(E) + 3 - 3g. \end{gathered}$$

Ако изберем достатъчно голям дивизор E, можем да имаме $l(D - E) = 0$ и произволно голяма степен $\deg(E)$. Това е противоречие, доказващо линейната зависимост на $T_1, T_2 \in \Delta$, Q.E.D.

Сега ще покажем как се конструират елементи от Δ. Нека $\omega \in \Omega_{F/k}$. За произволен адел $a = (a_P) \in A$ определяме

$$T_\omega(a) = \sum_{P \in X} \mathrm{res}_P(a_P \omega).$$

Известно е, че T_ω се анулира върху F. Ако $D = (\omega)$, то по определение T_ω се анулира върху $\Lambda(D)$.

Лема 16.3. *Всеки елемент на Δ има вида T_ω за някое $\omega \in \Omega_{F/k}$.*

Доказателство: Ясно е, че

$$\Omega_{F/k} \longrightarrow \Delta,$$

$$\omega \mapsto T_\omega,$$

е ненулево F-линейно изображение. Съгласно $\dim_F(\Delta) \leq 1 = \dim_F(\Omega_{F/k})$, достатъчно е да проверим, че това изображение не се анулира тъждествено, за да получим, че е F-линеен изоморфизъм и $\dim_F(\Delta) = 1$. Наистина, за произволна диференциална форма $\omega \in \Omega_{F/k} \setminus \{0\}$ с дивизор $(\omega) = \sum\limits_{P \in X} n_P P$ и произволна точка $P_o \in X$ да изберем локален параметър t_o в P_o. Нека $x = (x_P)_{P \in X} \in$

$\prod_{P\in X} F_P$ е с компоненти $x_P = 0$ за $\forall P \in X \setminus \{P_o\}$ и $x_{P_o} = t_o - n_{P_o} - 1$. Тогава $x \in A$ и

$$T_\omega(x) = \sum_{P\in X} \operatorname{res}_P(x_P\omega) = \operatorname{res}_{P_o}(x_{P_o}\omega) \neq 0.$$

Това доказва, че $\omega \mapsto T_\omega$ е влагане, Q.E.D.

Лема 16.4. *Числото $\delta(D)$ е равно на размерността на линейното пространство на диферунциалните форми $\omega \in \Omega_{F/k}$ с дивизор $(\omega) \geq D$.*

Доказателство: Функционалът T_ω се анулира върху $\Lambda(D)+F$ тогава и само тогава, когато $(\omega) \geq D$. По-точно, ако $(\omega) = \sum_P m_P P$ и $D = \sum_P n_P P$ с $m_P \geq n_P$, то за всеки адел $a \in \Lambda(D)$ имаме $\nu_P(a_P\omega) = \nu(a_P) + m_P \geq \nu_P(a_P) + n_P \geq 0$, така че $\operatorname{res}_P(a_P\omega) = 0$ във всички точки $P \in X$. С това проверихме, че условието $(\omega) \geq D$ е достатъчно за анулирането на T_ω върху $\Lambda(D) + F$. Да допуснем, че T_ω се анулира върху $\Lambda(D)$ и съществува точка $P \in X$ с $m_P < n_P$. Във всяка точка $Q \in X$ избираме локален апраметър t_Q. За $Q \neq P$ полагаме $k_Q = \max(-m_Q, -n_Q, 0)$ и избираме $k_P = -m_P - 1$. Тогава $a = (t_Q^{k_Q})_{Q\in X}$ е адел, защото $k_Q \geq 0$ за $\forall Q \in X \setminus \{P\}$. Още повече, $a \in \Lambda(D)$, съгласно $\nu_Q(t_Q^{k_Q}) + n_Q = \max(n_Q - m_Q, 0, n_Q) \geq 0$ за $\forall Q \neq P$ и $\nu_P(t_P^{-m_P-1}) + n_P = n_P - m_P - 1 \geq 1$. Във всяка точка $Q \in X \setminus \{P\}$ резидуумът $\operatorname{res}_Q(t_Q^{k_Q}\omega) = 0$, защото $\nu_Q(t_Q^{k_Q}\omega) = k_Q + m_Q = \max(0, m_Q - n_Q, m_Q) \geq 0$. Следователно

$$T_\omega(a) = \operatorname{res}_P(t_P^{-m_P-1}\omega) \neq 0,$$

противно на допускането. Това доказва, че $(\omega) \geq D$ е необходимо условие за анулирането на T_ω върху $\Lambda(D)+F$. Накрая да напомним, че $\delta(D)$ е размерността на пространството на линейните функционали върху $A/[\Lambda(D)+F]$ или размерността на линейните функционали върху A, анулиращи се върху $\Lambda(D)+F$, Q.E.D.

Теорема 27. (Риман-Рох) *Ако K е дивизор от каноничния клас на пълна гладка крива X, то за произволен дивизор D върху X е в сила $\delta(D) = l(K-D)$ и*

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(K-D). \tag{16.2}$$

Доказателство: Нека $K = (\omega)$. Изображението $f \mapsto f\omega$ е изоморфизъм на $L(K-D)$ върху пространството на онези $\omega' \in \Omega_{F/k}$, за които $(\omega') \geq D$. Тогава съгласно Лема 16.4 имаме $\delta(D) = l(K-D)$. Комбинирайки с (16.1) получаваме (16.2), Q.E.D.

Нека X е пълна гладка крива над алгебрично затворено поле k. Точките с координати от подполе $F \subseteq k$ се наричат F-рационални. Множеството на F-рационалинте точки на X се бележи с $X(F)$. Нека $\mathbb{F}_q$ е крайно поле с q елемента, а $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ са $\mathbb{F}_q$-рационални точки от X. За произволен дивизор $D \subset X$, чийто носител не пресича $\mathcal{P}$, разглеждаме остойностяващото изображение

$$\mathcal{E}_\mathcal{P} : L(D) \longrightarrow \mathbb{F}_q^n,$$

$$\mathcal{E}_\mathcal{P}(f) = (f(P_1), \ldots, f(P_n))$$

и означаваме с $C = C(X, \mathcal{P}, D)_L$ образа на $\mathcal{E}_\mathcal{P}$. Ако всяка функция $f \in L(D)$ има най-много $b < n$ нули върху $X(\mathbb{F}_q)$, то $\mathcal{E}_\mathcal{P}$ е влагане и C е линеен код с размерност $k = l(D)$ и минимално разстояние $d \geq n - b$.

Следствие 16.5. *Нека X е пълна гладка крива над крайно поле $\mathbb{F}_q$, а $D \subset X$ е дивизор от степен $0 \leq \deg(D) = a < n = \mathrm{card}(\mathcal{P})$. Тогава $C = Im(\mathcal{E}_{\mathcal{P}}) = \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(L(D))$ е $[n,k,d]_q$-код с*

$$k \geq a - g + 1,$$
$$d \geq n - a.$$

Докаазтелство: Ако представим $D = D_1 - D_2$ чрез ефективни дивизори D_1 и D_2 върху X, то произволна ненулева функция $f \in L(D)$ изпълнява $D_1 - D_2 + (f)_0 - (f)_\infty \geq 0$ и има най-много $a_1 = \deg(D_1)$ полюси и поне $a_2 = \deg(D_2)$ нули в носителя $\mathrm{Supp}(D)$ на D. Следователно f има най-много $a_1 - a_2 = a$ нули извън $\mathrm{Supp}(D)$. Предположението $a < n$ осигурява $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(f) \neq 0$ за $\forall f \in L(D) \setminus \{0\}$ и $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ се оказва влагане. Освен това, $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(f)$ има поне $n - a$ ненулеви координати, така че $d \geq n - a$. От друга страна, $C = \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(L(D)) \simeq L(D)$, така че $k = l(D) \geq a - g + 1$ по Теоремата на Риман-Рох, Q.E.D.

Следствие 16.6. *Нека X е пълна гладка крива от род g, а $D \subset X$ е дивизор от степен $2g - 2 < \deg(D) < n = \mathrm{card}(\mathcal{P})$. Тогава $C = Im(\mathcal{E}_{\mathcal{P}}) = \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(L(D))$ е $[n, \deg(D) - g + 1, d]_q$-код с $d \geq n - \deg(D)$.*

За доказване на това следствие е достатъчно да отбележим, че ако $\deg(K - D) = 2g - 2 - \deg(D) < 0$, то $L(K - D) = 0$.
Например, за $X = \mathbb{P}^1$ и $D = a\infty$ пространството $L(D)$ се състои от полиномите от степен $\leq a$. Избираме $\mathcal{P} = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) \setminus \{\infty\}$ и получаваме $[q, a+1, q-a]_q$-код, който съвпада с кода на Рис-Соломон.

Нека отново X е пълна гладка крива, $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\} \subseteq X(\mathbb{F}_q)$ и $P = \sum_{i=1}^{n} P_i \in \mathrm{Div}(X)$. Множеството

$$\Omega(P - D) = \{\omega \in \Omega(X) \,|\, (\omega) + P - D \geq 0\} \cup \{0\}$$

се състои от 0 и диференциалните форми, които имат най-много прост полюс в P и дивизор на нулите $(\omega)_0 \geq D$. Изображението на резидуумите

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{P}} : \Omega(P - D) \longrightarrow \mathbb{F}_q^n,$$
$$\mathrm{Res}_{\mathcal{P}}(\omega) = (\mathrm{Res}_{P_1}(\omega), \ldots, \mathrm{Res}_{P_n}(\omega)),$$

определя линеен код $C_o = Im(\mathrm{Res}_{\mathcal{P}}) = \mathrm{Res}_{\mathcal{P}}(\Omega(P - D))$.

Следствие 16.7. *Нека X е пълна гладка крива от род g, D е дивизор от степен $\deg(D) = a > 2g - 2$, а $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ е множество от $\mathbb{F}_q$-рационални точки, което не се пресича с носителя на D. Тогава C_o е $[n,k,d]_q$-код с*

$$k \geq n - a + g - 1,$$
$$d \geq a - 2g + 2.$$

Доказателство: Нека K е каноничният дивизор, така че $\deg(K) = 2g - 2$. Тогава

$$\Omega(P - D) \simeq L(K + P - D),$$

откъдето

$$\dim \Omega(P - D) = l(K + P - D) \geq (2g - 2 + n - a) - g + 1 = n - a + g - 1,$$

съгласно $\deg(K + P - D) = 2g - 2 + n - a$. Всяка диференциална форма ω има дивизор $(\omega) = (\omega)_0 - (\omega)_\infty$, който е линейно еквивалентен с K. Следователно

$$2g - 2 = \deg(K) = \deg(K) = \deg(\omega)_0 - \deg(\omega)_\infty.$$

Ако $D = D_1 - D_2$ за ефективни дивизори D_1, D_2 с непресичащи се носители и $\omega \in \Omega(P - D)$, то $(\omega)_0 \geq D_1$, така че

$$\deg(\omega)_\infty = \deg(\omega)_0 - 2g + 2 \geq a - 2g + 2 + \deg(D_2).$$

С други думи, диференциалната форма ω има поне $a - 2g + 2$ полюса извън $\mathrm{Supp}(D_2)$. Съгласно $\mathcal{P} \cap \mathrm{Supp}(D) = \emptyset$, всички тези полюси са в точки $P_i \in \mathcal{P}$ и с кратност 1. Затова $P_i \in (\omega)_\infty$ тогава и само тогава, когато $\mathrm{Res}_{P_i}(\omega) \neq 0$. Съгласно предположението $a > 2g - 2$, всяка форма $0 \neq \omega \in \Omega(P - D)$ има $\mathrm{Res}_{\mathcal{P}}(\omega) \neq 0$ и $\mathrm{Res}_{\mathcal{P}}$ е влагане. Борят на ненулевите координати на $\mathrm{Res}_{\mathcal{P}}(\omega)$ с $\omega \neq 0$ е поне $g - 2g + 2$, така че $d \geq a - 2g + 2$, Q.E.D.