Глава 2

Афинни и проективни пространства и многообразия. Топология на Зариски.

Алгебричната геометрия възниква през XIX век в Италия и изучава чрез конструктивни геометрични методи проективните многообразия. Своята алгебрична основа предметът придобива чрез работите на Зариски и немската школа в началото на XX век. По това време Вайл въвежда абстрактното понятие за алгебрично многообразие. През 50-те години на XX век Сер развива теорията на сноповете. През 60-те години на същия век Гротендик, Артин, Мамфорд и други разработват теорията на схемите.

Определение 2.1. *Ако F е поле, то множеството*

$$F^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in F,\, 1 \leq i \leq n\}$$

на наредените n-торки с елементи от F ще наричаме афинно пространство с размерност n.

За да опишем накратко общото определение за афинно пространство $A(F^n)$, ни трябват някои сведения за действие на група върху множество.

Определение 2.2. *Действие на група G върху множество M е изображение*

$$G \times M \longrightarrow M,$$

$$(g, m) \mapsto gm$$

със свойствата:
(i) $e_G x = x$ за неутралния елемент $e_G \in G$ и $\forall x \in M$;
(ii) $(gh)x = g(hx)$ за $\forall g, h \in G$, $\forall x \in M$.

Ако за една, а оттам и за всяка точка $x \in M$, орбитата

$$\mathrm{Orb}_G(x) = \{gx \,|\, g \in G\}$$

съвпада с цялото множество M, то действието на G върху M се нарича транзитивно. Стабилизаторът

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \,|\, gx = x\}$$

на точка $x \in M$ е подгрупа на G. Ако $gx \in \mathrm{Orb}(x)$, то стабилизаторът

$$\mathrm{Stab}_G(gx) = g\mathrm{Stab}_G(x)g^{-1}$$

на gx е спрегнат на стабилизатора на x. Ако $\mathrm{Stab}_G(x) = \{e_G\}$, то изображението $G \to \mathrm{Orb}_G(x)$, $g \mapsto gx$ е взаимно еднозначно и орбитата $\mathrm{Orb}_G(x)$ е изоморфна на G като множество. Групата G действа ефективно върху множеството M, ако стабилизаторите $\mathrm{Stab}_G(x) = \{e_G\}$ са тривиални за всички $x \in M$.
Адитивната група $(F^n, +)$ на линейното пространство F^n на наредените n-торки с елементи от F действа транзитивно и ефективно върху множеството $A(F^n)$ на векторите в F^n по правилото

$$F^n \times A(F^n) \longrightarrow A(F^n),$$

$$(u, v) \mapsto u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n).$$

Множеството $A(F^n)$, снабдено с това действие, се нарича афинно пространство. Изборът на начало $v_o \in A(F^n)$ води до представяне на афинното пространство $A(F^n) = \mathrm{Orb}_{(F^n,+)}(v_o) = F^n + v_o$ като орбита на v_o и задава изоморфизъм на множества $\varphi : A(F^n) \to F^n$, $\varphi(v + v_o) = v$ с групата $(F^n, +)$ или линейното пространство F^n. Затова казваме, че афинното пространство $A(F^n)$ е линейното пространство F^n със забравено начало.

Определение 2.3. *Нека F е поле, а $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$, $\alpha \in A$ са полиноми на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от полето F. Множеството от точки*

$$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n \mid f_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \text{ за } \forall \alpha \in A\}$$

се нарича афинно многообразие, определено от фамилията $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Сега ще определим понятието n-мерно проективно пространство $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(F)$ над поле F. Геометрично, $\mathbb{P}^n$ е множеството на правите през началото 0^{n+1} в F^{n+1}. Алгебрично, мултипликативната група F^* на полето F действа по правилото

$$F^* \times \left(F^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}\right) \longrightarrow F^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\},$$
$$(\lambda, (x_0, x_1, \ldots, x_n)) \mapsto (\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

върху $F^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$. Орбитите на това действие са класовете на колинеарност на ненулевите вектори от F^{n+1} и те са във взаимно-еднозначно съответствие с правите в F^{n+1} през началота 0^{n+1}. По този начин, множеството на орбитите $\left(F^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}\right)/F^*$ се отъждествява с проективното пространство $\mathbb{P}^n$. Да означим с $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ орбитата на $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in F^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$ под действие на F^*. Равенството $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] = [y_0 : y_1 : \ldots : y_n]$ е еквивалентно на съществуването на $\lambda \in F^*$ с $y_0 = \lambda x_0$, $y_1 = \lambda x_1, \ldots, y_n = \lambda x_n$. С други думи, хомогенните координати $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ на точка от $\mathbb{P}^n$ са определени с точност до ненулева мултипликативна константа от F^*.
Произволна точка $x = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ има поне една ненулева компонента $x_i \neq 0$, така че

$$[x_0 : \ldots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \ldots : x_n] = \left[\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right].$$

Множеството

$$U_i = \{x \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} =$$
$$\left\{ \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \middle| x_i \in F^*, \, x_j \in F \ \text{ за } \forall j \neq i \right\} \simeq F^n$$

е n-мерно афинно пространство. Обединението $\cup_{i=0}^n U_i = \mathbb{P}^n$ образува стандартното афинно покритие на $\mathbb{P}^n$. Наредените n-торки $\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ се наричат афинни координати върху U_i.

Определение 2.4. *Полиномът $f(x_0, \ldots, x_n) \in F[x_0, \ldots, x_n]$ е хомогенен, ако всичките му мономи имат една и съща обща степен d.*

Произволен полином $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in F[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ е крайна сума от мономи и се представя като сума

$$f(x_0, \ldots, x_n) = f_0(x_0, \ldots, x_n) + f_1(x_0, \ldots, x_n) + \ldots + f_k(x_0, \ldots, x_n)$$

от хомогенни полиноми $f_i(x_0, \ldots, x_n) \in F[x_0, \ldots, x_n]$ от степен i.
Ако $f(x_0, \ldots, x_n) \in F[x_0, \ldots, x_n]$ е хомогенен полином от степен d, то за всяка $\lambda \in F^*$ е в сила $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)$. Оттук $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ тогава и само тогава, когато $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$. С други думи, анулирането на $f(x_0, \ldots, x_n)$ в точка $x \in \mathbb{P}^n$ не зависи от избора на хомогенни координати на x.

Да предположим, че полето F е безкрайно. Тогава полином

$$f(x_0,\dots,x_n) = f_0(x_0,\dots,x_n) + \dots + f_k(x_0,\dots,x_n)$$

с хомогенни компоненти $f_i(x_0,\dots,x_n) \in F[x_0,\dots,x_n]$ от степен i се анулира едновременно в $[\lambda x] \in \mathbb{P}^n$ за $\forall \lambda \in F^*$ тогава и само тогава, когато всяка от хомогенните компоненти се анулира в $[x] = [\lambda x]$. По-точно, ако $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ са различни елементи от F^*, то $f(\lambda_j x) = \sum\limits_{i=0}^{k} \lambda_j^i f_i(x_0,\dots,x_n) = 0$ за $0 \leq j \leq k$ образуват хомогенна линейна система

$$\left(\begin{array}{ccc} \lambda_0^0 & \dots & \lambda_0^k \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_k^0 & \dots & \lambda_k^k \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} f_0(x_0,\dots,x_n) \\ \dots \\ f_k(x_0,\dots,x_n) \end{array}\right) = 0_{(k+1)\times 1}$$

за $f_0(x_0,\dots,x_n),\dots,f_k(x_0,\dots,x_n)$. Матрицата на тази система

$$\left(\begin{array}{ccc} \lambda_0^0 & \dots & \lambda_0^k \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_k^0 & \dots & \lambda_k^k \end{array}\right)$$

е транспонираната на матрицата на Вандермонд на $\lambda_0,\dots,\lambda_k$ и има ненулева детерминанта. Следователно $f_i(x_0,\dots,x_n) = 0$ за всички $0 \leq i \leq k$.

Определение 2.5. *Множеството на нулите*

$$X = \{x \in \mathbb{P}^n \quad | \quad f_\alpha(x_0,\dots,x_n) = 0,\, \alpha \in A\},$$

на хомогенни полиноми $f_\alpha(x_0,\dots,x_n) \in F[x_0,x_1,\dots,x_n]$ *, се нарича проективно многообразие.*

В останалата част от въпроса ще разгледаме топологията на Зариски върху афинно или проективно многообразие.

Определение 2.6. *Топология върху множество* X *е фамилия*
$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *от подмножества, така че*
(i) $X \in \mathcal{U}, \quad \emptyset \in \mathcal{U}$;
(ii) $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{U}$ *за* $\forall \ \ I \subseteq A$;
(iii) $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_k} \in \mathcal{U}$.
Подмножествата $U_\alpha \in \mathcal{U}$ *се наричат отворени, а допълненията им* $Z_\alpha = X \setminus U_\alpha$ *са затворени.*
Множество X, *снабдено с топология* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *се нарича топологично пространство.*

Топология върху X може да се зададе с фамилия $\mathcal{Z} = \{Z_\alpha\}_{\alpha\in A}$ от затворени подмножества, така че
(i) $\emptyset \in \mathcal{Z}, \quad X \in \mathcal{Z}$;
(ii) $\cap_{i\in I} Z_\alpha \in \mathcal{Z}$ за $\forall \ \ I \subseteq A$;
(iii) $Z_{\alpha_1} \cup \dots \cup Z_{\alpha_k} \in \mathcal{Z}$.

Лема-Определение 1. *Ако* $X \subset F^n$ *е афинно многообразие, то множествата*

$$V_X(I) = \{x \in X \,|\, f(x) = 0 \ \text{ за } \ \forall f \in I\},$$

индексирани с идеалите $I \triangleleft F[x_1,\dots,x_n]$ *образуват фамилия от затворени подмножества на* X. *По-точно,*
(i) $V_X(F[x_1,\dots,x_n]) = \emptyset$; $V_X(0) = X$;
(ii) $\cap_{\alpha\in A} V_X(I_\alpha) = V_X\left(\sum\limits_{\alpha\in A} I_\alpha\right)$ *за произволна фамилия от полиномиални идеали* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$*;*

(iii) $V_x(I_1) \cup \ldots \cup V_X(I_m) = V_X(I_1 \cap \ldots \cap I_m)$ *за краен брой полиномиални идеали* $I_1, \ldots, I_m$.
Топологията върху $X \subset F^n$*, определена от фамилията затворени множества* $\{V_X(I)\}_{I \triangleleft F[x_1,\ldots,x_n]}$ *се нарича топология на Зариски.*

Доказателство: (i) Множеството $V_X(F[x_1,\ldots,x_n]) = \emptyset$ е празно, защото ненулевите константи от F не се анулират в нито една точка от X. Тъждествено нулевият полином се анулира във всяка точка на X.
(ii) Да напомним, че сумата $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ на идеали $I_\alpha \triangleleft F[x_1,\ldots,x_n]$ е множеството на крайните суми $f_{\alpha_1} + \ldots + f_{\alpha_s}$ на $f_{\alpha_j} \in I_{\alpha_j}$. Непосредствено се проверява, че $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ е иедал в $F[x_1,\ldots,x_n]$.
Нека $p \in \cap_{\alpha \in A} V_X(I_\alpha)$ и $f \in \sum_{\alpha \in A} I_\alpha$. Тогава $f = f_{\alpha_1} + \ldots + f_{\alpha_n}$ за полиноми $f_{\alpha_j} \in I_{\alpha_j}$. Но $f_{\alpha_j}(p) = 0$ съгласно $p \in V_X(I_{\alpha_j})$ за $\forall 1 \leq j \leq n$, откъдето $f(p) = 0$ и $p \in V_X\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right)$. Това установява включването $\cap_{\alpha \in A} V_X(I_\alpha) \subseteq V_X\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right)$.
Обратно, ако $p \in V_X\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right)$ и $f_\alpha \in I_\alpha \subseteq \sum_{\alpha \in A} I_\alpha$, то $f_\alpha(p) = 0$. Следователно $p \in V_X(I_\alpha)$ за $\forall \alpha \in A$ и $V_X\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right) \subseteq \cap_{\alpha \in A} V_X(I_\alpha)$. Това доказва $\cap_{\alpha \in A} V_X(I_\alpha) = V_X\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right)$.
(iii) Ако $p \in V_X(I_j)$ за някое $1 \leq j \leq m$, то $I_j|_p = 0$, откъдето $(\cap_{j=1}^m I_j)|_p = 0$. Следователно $p \in V_X(\cap_{j=1}^m I_j)$, с което сме доказали, че $\cup_{j=1}^m V_X(I_j) \subseteq V_X(\cap_{j=1}^m I_j)$.
Да допуснем, че $V_X(\cap_{j=1}^m I_j) \not\subseteq \cup_{j=1}^n V_X(I_j)$. Тогава съществува точка p от допълнението $V_X(\cap_{j=1}^m I_j) \setminus \cup_{j=1}^m V_X(I_j)$, а оттам и полиноми $f_j \in I_j$ с $f_j(p) \neq 0$. Но $f_1 f_2 \ldots f_m \in I_1 \cap \ldots \cap I_m$, така че $(f_1 f_2 \ldots f_m)(p) = f_1(p) f_2(p) \ldots f_m(p) = 0$, което е невъзможно поради липсата на делители на нулата в полето F. Следователно $V_X(\cap_{j=1}^m I_j) \subseteq \cup_{j=1}^m V_X(I_j)$, откъдето $\cup_{j=1}^m V_X(I_j) = V_X(\cap_{j=1}^m I_j)$, Q.E.D.
Да напомним, че идеал I в комутативен пръстен с единица R се поражда от своето подмножество $M \subseteq I$, ако

$$I = \langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i r_i \,\middle|\, k \in \mathbb{N},\, m_i \in M,\, r_i \in R \right\}.$$

Ако полиномиален идеал $I \triangleleft F[x_1,\ldots,x_n]$ се поражда от $M \subset I$, то $V_X(I) = V_X(M)$. По този начин, Зариски затворените подмножества $V_X(M)$ на афинно многообразие X се индексират с подмножествата $M \subseteq F[x_1,\ldots,x_n]$. Твърдим, че топологията на Зариски върху афинно многообразие $X \subset F^n$ се издърпва от топологията на Зариски върху афинното пространство F, разглеждайки полиномите $f(x_1,\ldots,x_n) \in F[x_1,\ldots,x_n]$ като непрекъснати изображения $f : X \to F$. Преди всичко, да опишем Зариски затворените подмножества на F. Ако съществува $\lambda \in N \cap F^*$, то $V_F(N) = \emptyset$. Ясно е, че $V_F(0) = F$. Произволно подмножество $\{0\} \neq N \subseteq F[x] \setminus F^*$ съдържа непостоянен полином $f(x) \in F[x]$ с празно или крайно множество от нули $V_F(f)$. Следователно $V_F(N) \subseteq V_F(f)$ е празно или крайно множество. Твърдим, че

$$\left\{ \cap_{f \in M} f^{-1} V_F(N) \,|\, M \subseteq F[x_1,\ldots,x_n],\, N \subseteq F[x] \right\}$$

съвпада с фамилията $\{V_X(M) \,|\, M \subseteq F[x_1,\ldots,x_n]\}$ на Зариски затворените подмножества на X. Наистина,

$$\cap_{f \in M} f^{-1} V_F(N) = \{x \in X \,|\, f(x) \in V_F(N),\, \forall f \in M\} =$$

$$\{x \in X \,|\, (g \circ f)(x) = 0,\, \forall f \in M,\, \forall g \in N\}.$$

Множеството $N \circ M = \{g \circ f \,|\, g \in N,\, f \in M\}$ се състои от полиноми на $x_1,\ldots,x_n$ с коефициенти от F. Следователно $\cap_{f \in M} f^{-1} V_F(N) = V_X(N \circ M)$. Обратно, $V_X(M) = \cap_{f \in M} f^{-1} V_F(x)$, така че топологията на Зариски върху $X \subset F^n$ се

издърпва от топологията на Зариски върху F чрез полиномиалните изображения $f : X \to F$.
Топологията на Зариски върху проективно многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ се задава със затворените множества $V_X(I)$ на хомогенните идеали $I \lhd F[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

Определение 2.7. *Пръстенът R се нарича градуиран, ако адитивната му група $(R, +)$ е директна сума $R = \oplus_{i=0}^{\infty} R_i$ на свои подгрупи $(R_i, +)$ със свойството $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$. Разлагането $R = \oplus_{i=0}^{\infty} R_i$ в директна сума означава, че всеки елемент r на R има единствено представяне $r = r_{i_1} + \ldots + r_{i_s}$ чрез $r_{i_j} \in R_{i_j}$.*

Пръстенът на полиномите $F[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ е градуиран относно общата степен. По-точно, ако $F[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{(i)}$ е множеството на хомогенните полиноми от степен i, то $F[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \oplus_{i=0}^{\infty} F[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{(i)}$ и

$$F[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{(i)} F[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{(j)} \subseteq F[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{(i+j)}.$$

Определение 2.8. *Идеалът I в градуирания пръстен $R = \oplus_{i=0}^{n} R_i$ се нарича хомогенен, ако произволен негов елемент $r = r_{i_1} + \ldots + r_{i_s} \in I$, $r_{i_j} \in R_{i_j}$ има хомогенни компоненти r_{ij} от I.*

Лема 2.9. *Идеалът I в градуирания пръстен R е хомогенен тогава и само отгава, когато има пораждащо множество N, съставено от хомогенни елементи $r_i \in R_i$.*

Доказателство: За улеснение в записа, ако $r = r_{i_1} + \ldots + r_{i_s}$ с $r_{i_j} \in R_{i_j}$ за $i_1 < i_2 < \ldots < i_s = m(r)$, то ще пишем $r = \sum_{i=0}^{m(r)} r_i$ и ще считаме, че $r_i = 0_R$ за $\forall i \notin \{i_1, \ldots, i_s\}$. Ако $I \lhd R$ е хомогенен идеал и $M \subseteq I$ е пораждащо множество на I, то за всеки елемент $x = \sum_{i=0}^{m(x)} x_i$ на M следва, че $x_i \in I$. Нека M' е множеството на ненулевите хомогенни компоненти на елемнтите на M. Тогава I се съдържа в идеала J, породен от M'. От друга страна, $M' \subseteq I$ дава $J \subseteq I$, откъдето $I = J$ и M' е пораждащо множество на I, съставено от хомогенни елементи.
Обратно, нека идеалът I в градуирания пръстен R се поражда от множество $M \subset R$, съставено от хомогенни елементи $x_i \in M \cap R_{d_i}$. Тогава всеки елемент на I се задава във вида $x = \sum_{i=1}^{m} x_i s_i$ с $s_i \in R$, при подходящо означение на елементите на M, участващи в представянето на x. Ако $s_i = \sum_{j=0}^{\delta_i} s_{i,j}$ за $s_{i,j} \in R_j$, то $x = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{\delta_i} x_i s_{i,j}$ има хомогенни компоненти $x^{(k)} = \sum_i x_i s_{i,k-d_i} \in \langle M \rangle = I$ за всички $0 \leq k \leq \max\{d_i + \delta_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$, Q.E.D.

Лема-Определение 2. *Върху проективното многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$, множествата*

$$V_X(I) = \{x \in X \,|\, f(x) = 0 \ \text{ за } \ \forall f \in I \cap F[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{(j)}, \forall j \geq 0\},$$

индексирани с хомогенните идеали $I \lhd F[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ образуват фамилия от затворени подмножества. По-подробно,
(i) $V_X(F[x_0, x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$, $V_X(0) = X$;
(ii) $\cap_{\alpha \in A} V_X(I_\alpha) = V_X\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right)$ за произволна фамилия $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от хомогенни полиномиални идеали;

(iii) $V_X(I_1) \cup \ldots \cup V_X(I_m) = V_x(I_1 \cap \ldots \cap I_m)$ *за краен брой хомогенни полиномиални идеали* $I_1, \ldots, I_m$.
Топологията върху $X \subset \mathbb{P}^n$ *със затворени подмножества* $\{V_X(I)\}_I$ *за произволни хомогенни идеали* $I \triangleleft F[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *се нарича топология на Зариски.*

Доказателството на Лема-Определение 2 е аналогично с доказателството на Лема-Определение 1. Трябва да отбележим за (ii), че сумата $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ на хомогенни идеали $I_\alpha \triangleleft F[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ е хомогенен идеал в $F[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. По-точно, ако M_α е множество от хомогенни пораждащи на I_α, то $\cup_{\alpha \in A} M_\alpha$ е множество от хомогенни пораждащи на $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$. За (iii) да споменем, че сечението $\cap_{j=1}^m I_j$ на хомогенни идеали I_j в $F[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ е хомогенен идеал. По определение, ако $f = \sum\limits_{i=0}^{d} f^{(i)} \in \cap_{j=1}^m I_j$, то $f^{(i)} \in I_j$ за $\forall 0 \leq i \leq d$, $\forall 1 \leq j \leq m$. Следователно $f^{(i)} \in \cap_{j=1}^m I_j$ и $\cap_{j=1}^m I_j$ е хомогенен идеал.

Определение 2.10. *База* $\mathcal{B} = \{U_\beta\}_{\beta \in B}$ *на топология* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *е подфамилия* $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ *от отворени подмножества, така че всяко отворено множество* $U_\alpha \in \mathcal{U}$ *може да се представи като обединение* $U_\alpha = \cup_{\beta \in I(\alpha)} U_\beta$ *на подмножества от базата. (Тук* $I(\alpha)$ *са подмножества на* B*, зависещи от* α*.)*

Лема-Определение 3. *Ако* $X \subset F^n$ *е афинно многообразие, то множеството*

$$I(X) = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n] \,|\, f(x) = 0 \ \text{ за } \forall x \in X\}$$

на полиномите $f(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$*, анулиращи се тъждествено върху* X *е иедал в* $F[x_1, \ldots, x_n]$*, който се нарича идеал на афинното многообразие* $X \subset F^n$.

Доказателство: Достатъчно е да проверим, че ако $f, g \in I(X)$ и $\lambda \in F$, то $f - g, \lambda f \in I(X)$. Наистина, $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 0 - 0 = 0$ и $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0$ за $\forall x \in X$ дават $f - g, \lambda f \in I(X)$, Q.E.D.
Вземайки предвид Лема 2.9, даваме следното определение за идеал на проективно многообразие.

Определение 2.11. *Ако* $X \subset \mathbb{P}^n$ *е проективно многообразие, то идеалът*

$$I(X) = \langle f(x_0, \ldots, x_n) \in F[x_0, \ldots x_n]^{(i)} \,|\, f(x) = 0 \ \text{ за } \forall x \in X, \, i \in \mathbb{N} \rangle,$$

породен от хомогенните полиноми, анулиращи се тъждествено върху X *е хомогенен идеал* $I(X)$ *в* $F[x_0, \ldots, x_n]$*, наречен идеал на проективното многообразие* X.

Определение 2.12. *За произволни полиноми* f *извън идеала* $I(X)$ *на афинно многообразие* X*, съответно, за произволни хомогенни полиноми* f *извън хомогенния идеал* $I(X)$ *на проективно многообразие* X*, подмножествата*

$$U_f = \{x \in X \quad | \quad f(x) \neq 0\}$$

се наричат главни Зариски отворени подмножества на X.

Твърдение 2.13. *(i) Ако* $X \subseteq F^n$ *е афинно многообразие, то фамилията* $\{U_f\}_{f \notin I(X)}$ *на главните Зариски отворени подмножества, отговарящи на полиномите* $f(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$*, които не се анулират нъждествено върху* X*, е база на топологията на Зариски върху* X.
(ii) Ако $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *е проективно многообразие, то фамилията* $\{U_f\}_{f \notin I(X)}$ *на главните Зариски отворени подмножества, отговарящи на хомогенните полиноми* $f(x_0, \ldots, x_n) \in F[x_0, \ldots, x_n]^{(\deg(f))}$*, които не се анулират тъждествено върху* X*, е база на топологията на Зариски върху* X.

Доказателство: Всяко Зариски затворено подмножество на афинно (проективно) многообразие X е от вида

$$V_X(M) = \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in M\} = \cap_{f \in M} V_X(f)$$

за някакво множество от полиноми $M \subset F[x_1, \ldots, x_n]$ (множество от хомогенни полиноми $M \subset F[x_0, x_1, \ldots, x_n]$). Ако $f \in I(X)$, то $V_X(f) = X$, така че $V_X(M) = \cap_{f \in M \setminus I(X)} V_X(f)$. Следователно всяко Зариски отворено подмножество на X е от вида

$$X \setminus V_X(M) = X \setminus \left(\cap_{f \in M \setminus I(X)} V_X(f) \right) = \cup_{f \in M \setminus I(X)} (X \setminus V_X(f)) = \cup_{f \in M \setminus I(X)} U_f,$$

където $U_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ са главни Зариски отворени подмножества, Q.E.D.