Глава 5

Разлагане на многообразие в обединение от неприводими компоненти

Определение 5.1. *Афинното многообразие $X \subseteq k^n$, съответно, проективното многообразие $X \subseteq \mathbb{P}^n$ е неприводимо, ако за всяко представяне $X = X_1 \cup X_2$ като обединение на афинни (проективни) подмногообразия X_1, X_2 на X е в сила $X_1 = X$ или $X_2 = X$.*

Твърдение 5.2. *Афинното многообразие $X \subseteq k^n$ е неприводимо тогава и само тогава, когато неговият идеал*

$$I(X) = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n] \,|\, f(a) = 0 \ \text{ за } \ \forall a \in X\}$$

е прост.

Доказателство: Нека $X \subseteq k^n$ е неприводимо многообразие, а $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ са полиноми с произведение $fg \in I(X)$. Тогава $V(fg) \supseteq VI(X) = X$. Сега от $V(fg) = V(f) \cup V(g)$ получаваме разлагане $X = [X \cap V(f)] \cup [X \cap V(g)]$ на X в обединение на своите афинни подмногообразия $X \cap V(f)$ и $X \cap V(g)$. Съгласно неприводимостта на X, оттук следва $X \cap V(f) = X$ или $X \cap V(g) = X$. С други думи, $X \subseteq V(f)$ или $X \subseteq V(g)$. Следователно $I(X) \supseteq IV(f) \ni f$ или $I(X) \supseteq IV(g) \ni g$ и идеалът $I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е прост.
Обратно, да предположим, че идеалът $I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е прост и афинното многообразие $X = X_1 \cup X_2$ е обединение на афинните си подмногообразия X_1 и X_2. Ако $X_1 \subsetneqq X$, то съгласно Следствие 4.16 (i) имаме $I(X_1) \supsetneqq I(X)$. Следователно съществува полином $f \in I(X_1) \setminus I(X)$. Тогава за всеки полином $g \in I(X_2)$, произведението $fg \in I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$. Простотата на идеала $I(X) = I(X_1 \cup X_2)$ изисква $g \in I(X)$. По този начин, $I(X_2) \subseteq I(X)$. Но от $X_2 \subseteq X$ следва $I(X_2) \supseteq I(X)$, така че $I(X_2) = I(X)$. Прилагайки Лема 4.14 получаваме

$$X_2 = VI(X_2) = VI(X) = X,$$

Q.E.D.
От Твърдение 5.2 следва, че ако J е прост идеал в пръстена на полиномите $k[x_1, \ldots, x_n]$ над алгебрично затворено поле k , то афинното многообразие $V(J) \subseteq k^n$ е неприводимо. По-точно, съгласно Теоремата на Хилберт за нулите и радикалността на простите изеали имаме

$$IV(J) = r(J) = J.$$

Следователно идеалът $IV(J)$ на $V(J)$ е прост и многообразието $V(J) \subseteq k^n$ е неприводимо. По този начин, неприводимите афинни многообразия $X \subseteq k^n$ над алгебрично затворено поле k се оказват във взаимно-еднозначно съответствие с простите идеали $J \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$.

Определение 5.3. *Топологията $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ се нарича ньотерова, ако всяка ненамаляваща редица от отворени подмножества*

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq U_{n+1} \subseteq \ldots$$

се стабилизира след краен брой стъпки, $U_m = U_{m+1} = \ldots$ за някое $m \in \mathbb{N}$.

ТВЪРДЕНИЕ 5.4. *Топологията на Зариски върху афинно или проективно многообразие $X \subset k^n$ е ньотерова.*

Доказателство: Нека

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_{n-1} \subseteq U_n \subseteq \ldots$$

е ненамаляваща редица от Зариски отворени подмножества. Допълненията им $Z_n := X - U_n$ образуват нерастяща редица от Зариски затворени подмножества

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \ldots \supseteq Z_n \supseteq Z_{n+1} \supseteq \ldots.$$

Съответните (евентуално хомогенни) идеали

$$I(Z_1) \subseteq I(Z_2) \subseteq \ldots \subseteq I(Z_n) \subseteq I(Z_{n+1}) \subseteq \ldots$$

се нареждат в ненамаляваща редица. Обединението

$$I_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} I(Z_n)$$

е (хомогенен) идеал в ньотеровия полиномиален пръстен $k[x_1, \ldots, x_n]$ (съответно в $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$). Следователно I_∞ е крайнопороден и се съдържа в $I(Z_m)$ за някое $m \in \mathbb{N}$. В резултат, редицата от идеали $I_\infty = I(Z_m) = I(Z_{m+1}) = \ldots$ се стабилизира след краен брой стъпки. Оттук и редицата от афинни или проективни многообразия $VI(Z_m) = VI(Z_{m+1}) = \ldots$ се стабилизира след краен брой стъпки. Вземайки предвид $VI(Z_i) = Z_i$ съгласно Лема 4.14, получаваме $Z_m = Z_{m+1} = \ldots$, а оттам и $U_m = U_{m+1} = \ldots$. В случая на проективни многообразия $Z_i \subseteq \mathbb{P}^n$ разглеждаме проекцията $\Pi : k^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\} \to \mathbb{P}^n$, $\Pi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ и k^*-инвариантните афинни многообразия $\widehat{Z_i} = \Pi^{-1}(Z_i) \cup \{0^{n+1}\} \subseteq k^{n+1}$ с идеали $I(\widehat{Z_i}) = I(Z_i)$. Тогава от $\widehat{Z_m} = \widehat{Z_{m+1}} = \ldots$ следва $Z_m = Z_{m+1} = \ldots$, а оттам и $U_m = U_{m+1} = \ldots$, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 5.5. *Ако $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е ньотерова топология върху X, то всяко отворено покритие на X има крайно подпокритие.*

Доказателство: Да допуснем противното. Тогава съществува отворено покритие $X = \cup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$, от което не може да се избере крайно подпокритие. Конструираме редица $\{U_{\gamma_i}\}_{i=1}^n$, $\gamma_i \in \Gamma$, започвайки с произволно U_{γ_1}. На всяка стъпка твърдим, че за вече избраните $U_{\gamma_1}, \ldots, U_{\gamma_n}$ съществува

$$U_{\gamma_{n+1}} \not\subseteq U_{\gamma_1} \cup \ldots \cup U_{\gamma_n}$$

с $\gamma_{n+1} \in \Gamma$. В противен случай $\cup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma = \cup_{i=1}^n U_{\gamma_i}$. Наличието на безкрайна строго растяща редица

$$U_{\gamma_1} \subset \left(\cup_{i=1}^2 U_{\gamma_i}\right) \subset \ldots \subset \left(\cup_{i=1}^n U_{\gamma_i}\right) \subset \left(\cup_{i=1}^{n+1} U_{\gamma_i}\right) \subset \ldots$$

от отворени подмножества на X противоречи на ньотеровостта на $\mathcal{U}$, Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.6. *Топологичното пространство X е квази-компактно, ако всяко негово отворено покритие $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ съдържа крайно подпокритие $X = U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$.*
Хаусдорфовите квази-компактни пространства се наричат компактни.

От Твърдение 5.5 получаваме, че всяка ньотерова топология $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е квази-компактна.
Обратното твърдение не е в сила, както се вижда от следния

ПРИМЕР 5.7. *Метричната топология върху затвореното кълбо $\mathcal{B} = \overline{B(\check{o}, 1)}$ е компактна, но не и ньотерова.*

Затвореното кълбо $\mathcal{B}$ е Хаусдорфово топологично пространство, защото за произволни различни точки $x, y \in \mathcal{B}$ на разстояние $r = \mathrm{dist}(x, y)$ отворените подмножества $B\left(x, \frac{1}{3}r\right) \cap \mathcal{B}$ и $B\left(y, \frac{1}{3}r\right) \cap \mathcal{B}$ не се пресичат.
Съгласно Теоремата на Хайне-Борел, затвореното и ограничено подмножество $\mathcal{B} = \overline{B(\check{o}, 1)}$ на евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ е компактно топологично пространство. Накратко, $\mathcal{B} = \overline{B(\check{o}, 1)}$ е затворено подмножество на n-мерния затворен куб

$$C_n = [-1, 1] \times \ldots \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^n.$$

Достатъчно е да установим компактността на C_n, за да получим компактността на $\mathcal{B}$. Допускаме противното и избираме отворено покритие $C_n = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ без крайно подпокритие. Ако всеки от интервалите $[-1, 1]$ се раздели на две равни части, то C_n се разбива на 2^n затворени кубове със страна 1. Поне един от тях, $C_n^{(1)}$ не се покрива от краен брой U_α, $\alpha \in A$. Продължавайки по същия начин, за всяко естествено k получаваме затворен куб $C_n^{(k)}$ със страна $\frac{1}{2^{k-1}}$, който не се покрива от краен брой U_α, $\alpha \in A$. Твърдим, че намаляващата редица

$$C_n \supset C_n^{(1)} \supset \ldots \supset C_n^{(k)} \supset C_n^{(k+1)} \supset \ldots$$

има непразно сечение $\cap_{k=1}^{\infty} C_n^{(k)}$. Нека

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$\mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

е проекцията върху i-тата компонента за произволно $1 \leq i \leq n$. Тогава образите $\mathrm{pr}_i(C_n^{(k)}) = [a_i^{(k)}, b_i^{(k)}] \subset [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ са затворени интервали, образуващи намаляваща редица

$$[-1, 1] \supset [a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \supset [a_i^{(2)}, b_i^{(2)}] \supset \ldots \supset [a_i^{(k-1)}, b_i^{(k-1)}] \supset [a_i^{(k)}, b_i^{(k)}] \supset \ldots.$$

Редицата $\{a_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset [-1, 1]$ от левите краища е ненамаляваща и ограничена отгоре, така че има точна горна граница ξ_i. За произволни $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$ твърдим, че $a_i^{(k)} \leq b_i^{(l)}$. Тогава $b_i^{(l)}$ е горна граница на $\{a_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $a_i^{(k)} \leq \xi_i \leq b_i^{(l)}$. В частност, $a_i^{(k)} \leq \xi_i \leq b_i^{(k)}$ за $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\xi_i \in \cap_{k=1}^{\infty} [a_i^{(k)}, b_i^{(k)}]$. По този начин получаваме точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \cap_{k=1}^{\infty} C_n^{(k)}$ от сечението на всички построени кубове. За $a_i^{(k)} \leq b_i^{(l)}$, ако $k \leq l$, то $[a_i^{(l)}, b_i^{(l)}] \subset [a_i^{(k)}, b_i^{(k)}]$, откъдето $a_i^{(k)} \leq b_i^{(l)}$. За $k > l$ имаме $[a_i^{(k)}, b_i^{(k)}] \subset [a_i^{(l)}, b_i^{(l)}]$, което също води до $a_i^{(k)} \leq b_i^{(l)}$. Накрая, $\xi \in \cap_{k=1}^{\infty} C_n^{(k)}$ принадлежи на някое отворено множество U_{α_o}, $\alpha_o \in A$, заедно с кълбо $B(\xi, \varepsilon) \subset U_{\alpha_o}$. Но за достатъчно голямо $k \in \mathbb{N}$ имаме $C_n^{(k)} \subset B(\xi, \varepsilon) \subset U_{\alpha_o}$, което противоречи на избора на $C_n^{(k)}$ и доказва компактността на C_n.
Наличието на безкрайна строго растяща редица

$$B\left(\check{o}, 1 - \frac{1}{2}\right) \subset B\left(\check{o}, 1 - \frac{1}{3}\right) \subset \ldots \subset B\left(\check{o}, 1 - \frac{1}{n}\right) \subset B\left(\check{o}, 1 - \frac{1}{n+1}\right) \subset \ldots$$

от отворени подмножества на $\overline{B(\check{o}, 1)}$ установява, че метричната топология на затвореното единично кълбо не е ньотерова.

Твърдение 5.8. *Произволно афинно или проективно многообразие X е крайно обединение*

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$$

на свои неприводими подмногообарзия $X_i \subseteq X$.

Доказателство: Да допуснем противното и да изберем афинно или проективно многообразие X, което не може да се представи като крайно обединение на неприводими подмногообразия. Тогава X не е неприводимо, така че може да се представи като обединение $X = X_1 \cup X_1'$ на собствени подмногообразия $X_1 \subsetneq X$

и $X_1' \subsetneq X$. Поне едното от X_1 или X_1' не е крайно обединение от неприводими подмногообразия, защото в противен случай X ще се окаже крайно обединение от неприводими подмногообразия. За определеност да предположим, че X_1 не е крайно обединение на неприводими подмногообразия. Повтаряйки горното разсъждение получаваме представяне $X_1 = X_2 \cup X_2'$ в обединение на собствени подмногообразия $X_2 \subsetneq X_1$ и $X_2' \subsetneq X_1$, така че X_2 не се представя като крайно обединение от неприводими подмногообразия. Продължавайки по същия начин построяваме безкрайна строго намаляваща редица

$$X \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \ldots \supsetneq X_n \supsetneq X_{n+1} \supsetneq \ldots$$

от афинни или проективни многообразия в k^n. Съответната редица от Зариски отворени подмножества $U_i = X \setminus X_i$ е строго растяща,

$$U_1 \subsetneqq U_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq U_n \subsetneqq U_{n+1} \subsetneqq \ldots$$

и това противоречи на ньотеровостта на топологията на Зариски. Следователно всяко афинно или проективно многообразие се представя като крайно обединение на неприводими подмногообразия, Q.E.D.
За да имаме единственост на разлагането на афинно или проективно многообразие в крайно обединение на неприводими подмногообразия, трябва да се ограничим с така наречените несъкратими разлагания в обединение на неприводими подмногообразия.

Определение 5.9. *Разлагането $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ на афинно или проективно многообразие $X \subseteq k^n$ в крайно обединение от неприводими подмногообразия $X_i \subseteq X$ се нарича несъкратимо, ако $X_i \not\subseteq X_j$ за всички $i \neq j$.*

Твърдение 5.10. *Всяко афинно или проективно многообразие X има несъкратимо разлагане $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ в крайно обединение от неприводими подмногообразия $X_i \subseteq X$.*
Всеки две несъкратими разлагания $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m = Y_1 \cup \ldots \cup Y_l$ в крайни обединения от неприводими подмногообразия $X_i \subseteq X$ или $Y_j \subseteq X$ съвпадат, т.е. $m = l$ и съществува пермутация $\sigma \in S_m$, така че $X_i = Y_{\sigma(i)}$ за всички $1 \leq i \leq m$.

Доказателство: Ако $X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$ е произволно разлагане на афинно или проективно многообразие X в крайно обединение от неприводими подмногообразия X_i, то за всяка двойка индекси $1 \leq i \neq j \leq s$ с $X_i \subseteq X_j$ изпускаме X_i и отново получаваме разлагане на X в крайно обединение от неприводими подмногообразия. Двойките индекси $1 \leq i \neq j \leq s$ са краен брой, така че след евентуално изпускане на краен брой X_i получаваме несъкратимо разлагане $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, $m \leq s$ в обединение на краен брой неприводими подмногообразия X_j.
Нека $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ и $X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_l$ са две несъкратими разлагания на X в обединение от неприводими подмногообразия X_i или Y_j. Тогава

$$X_i = X_i \cap X = X_i \cap (Y_1 \cup \ldots \cup Y_l) = (X_i \cap Y_1) \cup \ldots \cup (X_i \cap Y_l)$$

за неприводимото многообразие X_i изисква $X_i = X_i \cap Y_{j(i)}$ за някое $1 \leq j(i) \leq l$. С други думи, $X_i \subseteq Y_{j(i)}$. Разменяме ролите на двете разлагания и прилагаме горното разсъждение, за да получим $Y_{j(i)} \subseteq X_{k(j(i))}$ за някое $1 \leq k(j(i)) \leq m$. Сега $X_i \subseteq Y_{j(i)} \subseteq X_{k(j(i))}$ води до $X_i \subseteq X_{k(j(i))}$, откъдето $k(j(i)) = i$ съгласно несъкратимостта на $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$. Още повече, $X_i \subseteq Y_{j(i)} \subseteq X_i$ изисква $X_i = Y_{j(i)}$. Доколкото неприводимите многообразия $X_1, \ldots, X_m$ от несъкратимото разлагане $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ са различни, оттук следва $m \leq l$. Аналогично получаваме $l \leq m$, откъдето и $m = l$. Сега различните помежду си неприводими подмногообразия $X_1, \ldots, X_m$ съвпадат, съответно, с различните помежду

си неприводими подмногообразия $Y_{j(1)}, \dots, Y_{j(m)}$, така че $(j(1), \dots, j(m))$ е пермутация на $(1, \dots, m)$, Q.E.D.
По аналогия с несъкратимото разлагане на афинно многообразие $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$ в обединение от неприводими подмногообразия $X_i \not\subseteq X_j$ за $\forall 1 \leq i \neq j \leq m$, ще казваме, че разлагането

$$J = P_1 \cap \dots \cap P_m$$

на полиномиален идеал J в крайно сечение от прости полиномиални идеали P_i е несъкратимо, ако $P_i \not\subseteq P_j$ за всички $1 \leq i \neq j \leq m$.

Следствие 5.11. *Нека k е алгебрично затворено поле, а $J = r(J) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ е радикален идеал. Тогава съществува единствено несъкратимо разлагане*

$$J = P_1 \cap \dots \cap P_m$$

в крайно сечение от прости идеали $P_i \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$.
Още повече, $P_1, \dots, P_m$ са точно минималните прости идеали, съдържащи J.

Доказателство: Съгласно Твърдение 5.10, афинното многообразие $V(J) \subseteq k^n$ има единствено несъкратимо разлагане

$$V(J) = X_1 \cup \dots \cup X_m$$

в крайно обединение от неприводими подмногообразия $X_i \subsetneqq X$. Прилагайки Теоремата на Хилберт за нулите и радикалността на идеала J получаваме

$$J = r(J) = IV(J) = I(X_1 \cup \dots \cup X_m) = I(X_1) \cap \dots \cap I(X_m).$$

Твърдение 5.2 гарантира простотата на идеалите $P_i := I(X_i) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. Още повече, допускането $I(X_i) = P_i \subseteq P_j = I(X_j)$ за $1 \leq i \neq j \leq m$ води до $X_i = VI(X_i) \supseteq VI(X_j) = X_j$. Това противоречи на несъкратимостта на разлагането $V(J) = X_1 \cup \dots \cup X_m$ и доказва несъкратимостта на разлагането $J = P_1 \cap \dots \cap P_m$.
Нека $J = P_1 \cap \dots \cap P_m$ и $J = Q_1 \cap \dots \cap Q_l$ са две несъкратими представяния в сечения от прости идеали. Тогава

$$V(P_1) \cup \dots \cup V(P_m) = V(J) = V(Q_1) \cup \dots \cup V(Q_l)$$

са две разлагания на афинното многообразие $V(J) \subseteq k^n$ в крайно обединение от неприводими компоненти $V(P_i)$ или $V(Q_j)$. Тези разлагания са несъкратими, защото от допускането $V(P_i) \subseteq V(P_j)$ за някои $1 \leq i \neq j \leq m$ следва

$$P_i = r(P_i) = IV(P_i) \supseteq IV(P_j) = r(P_j) = P_j$$

съгласно Теоремата на Хилберт за нулите и радикалността на простите идеали. Сега от единствеността на несъкратимото разлагане на $V(J)$ в крайно обединение от неприводими компоненти получаваме $m = l$ и $V(P_i) = V(Q_i)$ за $\forall 1 \leq i \leq m$, след евентуална пермутация на $Q_1, \dots, Q_m$. Повторното прилагане на Теоремата на Хилберт за нулите и радикалността на простите идеали дава

$$P_i = r(P_i) = IV(P_i) = IV(Q_i) = r(Q_i) = Q_i.$$

Това установява единствеността на несъкратимото разлагане $J = P_1 \cap \dots \cap P_m$ на радикален идеал $J \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ в крайно сечение от прости идеали.
За всяко $1 \leq i \leq m$ да отбележим, че X_i е максимално неприводимо подмногообразие на $V(J) = X_1 \cup \dots \cup X_m$, така че $P_i = I(X_i)$ е минимален прост идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$, съдържащ J. Обратно, ако $\mathfrak{p}$ е минимален прост идеал, съдържащ J, то $V(\mathfrak{p})$ е максимално неприводимо подмногообразие на $V(J)$. Следователно $V(\mathfrak{p}) = X_i$ съвпада с някоя неприводима компонента на $V(J)$. Използвайки Теоремата на Хилберт за нулите и радикалността на простия идеал $\mathfrak{p}$, получаваме $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{p}) = IV(\mathfrak{p}) = I(X_i) = P_i$, Q.E.D.

Разгледаното представяне е частен случай на така нареченото примарно разлагане на идеал в ньотеров пръстен.

Определение 5.12. *Идеалът* $\mathfrak{q}$ *в комутативния пръстен с единица* R *е примарен, ако от* $ab \in \mathfrak{q}$ *за* $a, b \in R$ *следва* $a \in \mathfrak{q}$ *или* $b^m \in \mathfrak{q}$ *за някое* $m \in \mathbb{N}$.

Лема 5.13. *Идеалът* $\mathfrak{q}$ *в комутативния пръстен с единица* R *е примарен тогава и само тогава, когато всички делители на нулата в* $R/\mathfrak{q}$ *са нилпотентни.*

Определение 5.14. *Идеалът* $\mathfrak{a}$ *в комутативен пръстен с единица* R *е неприводим, ако във всяко представяне* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ *като сечение на идеали* $\mathfrak{b} \triangleleft R$ *и* $\mathfrak{c} \triangleleft R$ *имаме* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *или* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

За да изясним етимологията на понятието неприводим идеал, да разгледаме радикален идеал $\mathfrak{a}$ в полиномиален пръстен $k[x_1, \ldots, x_n]$ над алгебрично затворено поле k. Тогава от неприводимостта на идеала $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ следва неприводимостта на съответното афинно многообразие $V(\mathfrak{a}) \subseteq k^n$. Наистина, ако $V(\mathfrak{a}) = Y \cup Z$ е обединение на афинни подмногообразия Y и Z, то съгласно Теоремата на Хилберт за нулите и радикалността на идеала $\mathfrak{a}$ получаваме

$$\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) = IV(\mathfrak{a}) = I(Y \cup Z) = I(Y) \cap I(Z).$$

Неприводимостта на $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ изисква $\mathfrak{a} = I(Y)$ или $\mathfrak{a} = I(Z)$. Оттук, $V(\mathfrak{a}) = VI(Y) = Y$ или $V(\mathfrak{a}) = VI(Z) = Z$, така че афинното многообразие $V(\mathfrak{a}) \subseteq k^n$ е неприводимо. Да напомним, че неприводимите афинни многообразия $V(\mathfrak{a})$ над алгебрично затворено поле k са във взаимно еднозначно съответствие с простите идеали $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$. По този начин установяваме, че ако k е алгебрично затворено поле, то всеки неприводим радикален идеал $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е прост.

Твърдение 5.15. *Ако* R *е ньотеров пръстен, то всеки идеал* $\mathfrak{a} \triangleleft R$ *се разлага в сечение* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ *на краен брой примарни идеали* $\mathfrak{q}_i \triangleleft R$.

Доказателство: Първо ще установим, че всеки идеал $\mathfrak{a} \triangleleft R$ се представя като сечение на краен брой неприводими идеали в R. След това ще проверим, че всеки неприводим идеал в R е примарен.
Да допуснем, че множеството Σ на идеалите $\mathfrak{a} \triangleleft R$, които не се представят като крайно сечение на неприводими идеали е непразно. Тогава Σ е частично наредено относно теоретико-множественото включване. Всяко линейно наредено подмножество $\{\mathfrak{a}\}_{\beta \in B}$ има точна горна граница $\mathfrak{q}_\infty := \cup_{\beta \in B} \mathfrak{a}_\beta$. По-точно, за произволни $x, y \in \mathfrak{a}_\infty$ съществуват $\gamma_1, \gamma_2 \in B$, така че $x \in \mathfrak{a}_{\gamma_1}$, $y \in \mathfrak{a}_{\gamma_2}$. След евентуална пермутация на x с y можем да предполагаме, че $\mathfrak{a}_{\gamma_1} \subseteq \mathfrak{a}_{\gamma_2}$, така че $x - y \in \mathfrak{a}_{\gamma_2} \subseteq \mathfrak{a}_\infty$. От друга страна, за $\forall r \in R$ е в сила $xr \in \mathfrak{a}_{\gamma_1} \subseteq \mathfrak{a}_\infty$ и $\mathfrak{a}_\infty$ е идеал в R. Поради ньотеровост на R, идеалът $\mathfrak{a}_\infty$ е породен от краен брой свои елементи $x_1, \ldots, x_r$. Нека $x_j \in \mathfrak{a}_{\beta_j}$ за $\forall 1 \leq j \leq r$ и $1 \leq j_o \leq r$ е такова, че $\mathfrak{a}_{\beta_{j_o}} \supseteq \mathfrak{a}_{\beta_j}$ за $\forall 1 \leq j \leq r$. Тогава $\mathfrak{a}_{\beta_{j_o}} \subseteq \mathfrak{a}_\infty \subseteq \mathfrak{a}_{\beta_{j_o}}$, откъдето $\mathfrak{a}_\infty = \mathfrak{a}_{\beta_{j_o}}$ не се представя като крайно сечение на неприводими идеали и принадлежи на Σ. Съгласно Лемата на Цорн, съществува максимален елемент $\mathfrak{a} \in \Sigma$. Идеалът $\mathfrak{a}$ не е неприводим по определение. Следователно съществуват идеали $\mathfrak{b} \supsetneqq \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{c} \supsetneqq \mathfrak{a}$ с $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. Съгласно максималността на $\mathfrak{a} \in \Sigma$ идеалите $\mathfrak{b} \notin \Sigma$ и $\mathfrak{c} \notin \Sigma$ имат представяния $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{b}_m$ и $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{c}_n$ като крайни сечения на неприводими идеали. Оттук $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{b}_m \cap \mathfrak{c}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{c}_n$, което противоречи на $\mathfrak{a} \in \Sigma$. Следователно $\Sigma = \emptyset$ и всеки идеал в ньотеров пръстен R се представя като сечение на краен брой неприводими идеали.
Остава да установим, че всеки неприводим идеал $\mathfrak{a}$ в ньотеров пръстен R е примарен. Преминавайки към $R' = R/\mathfrak{a}$ ще докажем, че ако нулевият идеал в

ньотеров пръстен R' е неприводим, то делителите на нулата в R' са нилпотентни. За произволен елемент $x \in R'$ анулаторът $\mathrm{Ann}(x) = \{r \in R \,|\, rx = 0_{R'}\}$ е идеал в R'. Ако $xy = 0$ и $y \neq 0$, то $y \in \mathrm{Ann}(x)$ и $\langle y \rangle \neq \langle 0 \rangle$. Ненамаляващата редица от идеали

$$\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathrm{Ann}(x^2) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Ann}(x^n) \subseteq \mathrm{Ann}(x^{n+1}) \subseteq \ldots$$

от идеали в R' се стабилизира след краен брой стъпки, $\mathrm{Ann}(x^m) = \mathrm{Ann}(x^{m+1}) = \ldots$, съгласно ньотеровостта на R'. Твърдим, че $\langle x^m \rangle \cap \langle y \rangle = \langle 0 \rangle$. Наистина, ако $a \in \langle x^m \rangle \cap \langle y \rangle \subseteq \langle x^m \rangle \cap \mathrm{Ann}(x)$, то $a = x^m b$ с $b \in R'$ и $ax = x^{m+1}b = 0$. Следователно $b \in \mathrm{Ann}(x^{m+1}) = \mathrm{Ann}(x^m)$ и $a = 0$. По предположение, нулевият идеал $\langle 0 \rangle$ е неприводим. От друга страна, $\langle y \rangle \neq \langle 0 \rangle$, така че $\langle x^m \rangle = \langle 0 \rangle$ или $x^m = 0$. Това означава примарност на нулевия идеал, Q.E.D.

Твърдение 5.16. *Нека R е ньотеров пръстен, а $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ е разлагане на идеала $\mathfrak{a} \triangleleft R$ в сечение от примарни идеали $\mathfrak{q}_i$. Тогава:*
(i) $r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{q}_1) \cap \ldots \cap r(\mathfrak{q}_n)$;
(ii) радикалът $r(\mathfrak{q}_i)$ на примарен идеал $\mathfrak{q}_i$ е минималният прост идеал, съдържащ $\mathfrak{q}_i$;
(iii) съществува естествено число m, така че $r(\mathfrak{a})^m \subseteq \mathfrak{a}$.
(iv) съществуват примарни идеали $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_k$ в R с различни прости радикали $r(\mathfrak{q}'_1), \ldots, r(\mathfrak{q}'_k)$, така че $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}'_k$.

Доказателство: (i) Достатъчно е да проверим, че $r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$ за произволни идеали $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ в R и да приложим индукция по n.
(ii) За да докажем, че $\mathfrak{p}_j = r(\mathfrak{q}_j)$ са прости идеали в R предполагаме, че $xy \in \mathfrak{p}_j$ за някакви $x, y \in R$. Тогава съществува $m \in \mathbb{N}$, така че $(xy)^m \in \mathfrak{q}_j$. По определението за примарност на $\mathfrak{q}_j$ оттук следва $x^m \in \mathfrak{q}_j$ или $y^{mk} \in \mathfrak{q}_j$ за някое $k \in \mathbb{N}$. По този начин, $x \in \mathfrak{p}_j = r(\mathfrak{q}_j)$ или $y \in \mathfrak{p}_j$ и идеалът $\mathfrak{p}_j \triangleleft R$ е прост. Ако $\mathfrak{p}'_j \triangleleft R$ е прост идеал, съдържащ $\mathfrak{q}_j$, твърдим, че $\mathfrak{p}_j = r(\mathfrak{q}_j) \subseteq \mathfrak{p}'_j$. Наистина, ако $x \in \mathfrak{p}_j = r(\mathfrak{q}_j)$, то $x^m \in \mathfrak{q}_j$ за някое $m \in \mathbb{N}$. Следователно $x^m \in \mathfrak{p}'_j$ и простотата на $\mathfrak{p}'_j$ изисква $x \in \mathfrak{p}'_j$. По този начин, $\mathfrak{p}_j = r(\mathfrak{q}_j)$ е единственият минимален прост идеал, съдържащ $\mathfrak{q}_j$, Q.E.D.
(iii) Нека радикалът $r(\mathfrak{a}) = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ се поражда от $x_1, \ldots, x_k \in r(\mathfrak{a})$ с $x_i^{n_i} \in \mathfrak{a}$ за подходящи $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$. Ако $m = \sum\limits_{i=1}^{k}(n_i - 1) + 1$, то идеалът $r(\mathfrak{a})^m$ се поражда от произведенията $x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}$ с $\sum\limits_{i=1}^{k} r_i = m$. Лесно се вижда, че съществува $1 \leq i_o \leq k$ с $r_{i_o} \geq n_{i_o}$. Затова всеки такъв моном принадлежи на $\mathfrak{a}$ и $r(\mathfrak{a})^m \subseteq \mathfrak{a}$.
(iv) Достатъчно е да докажем, че ако $\mathfrak{q}_1$ и $\mathfrak{q}_2$ са примарни идеали в R с един и същи прост радикал $r(\mathfrak{q}_1) = r(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ е примарен идеал с радикал $\mathfrak{p}$. Наистина, от (i) имаме $r(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2) = r(\mathfrak{q}_1) \cap r(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Съгласно (iii) съществува естествено число m, така че $r(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2)^m = \mathfrak{p}^m \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$. Сега за произволни $a, b \in R$ с $ab \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \subseteq \mathfrak{p}$ е в сила $a \in \mathfrak{p}$ или $b \in \mathfrak{p}$ поради простотата на идеала $\mathfrak{p}$. Но ако $a \in \mathfrak{p}$, то $a^m \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ и идеалът $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ е примарен. Аналогично, от $a \notin \mathfrak{p}$ следва $b \in \mathfrak{p}$, а оттам и $b^m \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$, така че идеалът $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ е примарен, Q.E.D.
Примарните идеали $\mathfrak{q}$ с радикал $r(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ се наричат $\mathfrak{p}$-примарни.
Нека $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_m$ е произволно примарно разлагане на радикален идеал $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$ в ньотеров комутативен пръстен с единица R. Тогава радикалът на това разлагане

$$\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{q}_1) \cap \ldots \cap r(\mathfrak{q}_m)$$

е разлагане на $\mathfrak{a}$ в крайно сечение от прости идеали $r(\mathfrak{q}_i)$. Изпускаме $r(\mathfrak{q}_i) \subsetneqq r(\mathfrak{q}_j)$ за произволни $1 \leq i \neq j \leq m$ и получаваме несъкратимо разлагане $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l$ в крайно обединение от прости идеали $\mathfrak{p}_i$. В частност, за произволен радикален идеал $J = r(J) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ в полиномиален пръстен съществува несъкратимо разлагане $J = P_m \cap \ldots \cap P_m$ в крайно сечение на прости идеали $P_i \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$.

Определение 5.17. *Подмножеството M на топологично пространство X е навсякъде гъсто, ако затворената обвивка $\overline{M} = X$ съвпада с X.*

Например, подмножеството M на афинно многообразие X е Зариски навсякъде гъсто тогава и само тогава, когато $VI(M) = X$.

Определение 5.18. *Околност V_p на точка p от топологично пространство X е подмножество $V_p \subset X$, което съдържа p заедно с някакво отворено множество $p \in U_p \subseteq V_p$.*

Лема 5.19. *Подмножеството M на топологично пространство X е навсякъде гъсто тогава и само тогава, когато за всяка точка $p \in X$ и за всяка околност V_p на p е в сила $M \cap V_p \neq \emptyset$.*

Доказателство: Да допуснем, че $\overline{M} = X$, но съществува околност V_p на p, която не пресича M. Ако U_p е отворено множество с $p \in U_p \subseteq V_p$, то $U_p \cap M = \emptyset$. Следователно $Z_p := X \setminus U_p$ е затворено подмножество, съдържащо M, а оттам и затворената обвивка $\overline{M} = \cap_{Z \supseteq M} Z$, която е сечението на затворените подмножества $Z \supseteq M$. В резултат, $Z_p = \overline{M} = X$ и $U_p = X \setminus Z_p = \emptyset$, противно на $p \in U_p$. С това установихме, че ако M е навсякъде гъсто, то M пресича всички околности на точки от X.
Обратно, нека $M \cap V_p \neq \emptyset$ за произволна околност V_p на точка $p \in X$. Ако затворената обвивка $\overline{M}$ е собствено затворено подмножество на X, то $U := X \setminus \overline{M}$ е непразно отворено подмножество. Ако разгледаме U като околност на всяка своя точка $q \in U$, ще получим, че $M \cap U = M \cap (X \setminus \overline{M}) \neq \emptyset$, което противоречи на $M \subseteq \overline{M}$. Следователно $\overline{M} = X$ и M е навсякъде гъсто, Q.E.D.

Твърдение 5.20. *Следните условия са еквивалентни за афинно многообразие X :*
(i) X е неприводимо;
(ii) всеки две непразни Зариски отворени подмножества $U, V \subset X$ имат непразно сечение $U \cap V \neq \emptyset$;
(iii) всяко непразно Зариски отворено подмножество U на X е навсякъде гъсто в X.

Доказателство: $(i) \Rightarrow (ii)$ Да допуснем противното и да изберем непразни Зариски отворени подмножества U, V с $U \cap V = \emptyset$. Тогава $Y := X - U$ и $Z := X - V$ са собствени Зариски затворени подмножества с $Y \cup Z = X$, което противоречи на неприводимостта на X.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Да предположим, че X е приводимо и се представя като обединение $X = Y \cup Z$ на собствени Зариски затворени подмножества Y, Z. Тогава $U := X - Y$ и $V := X - Z$ са непразни Зариски отворени подмножества с $U \cap V = \emptyset$, което противоречи на допускането (ii).
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Да разгледаме Зариски отворено подмножество $\emptyset \neq U \subset X$, точка $x \in X$ и околност $V_x \subset X$ на x. По определението за околност съществува Зариски отворено подмножество $W_x \subset X$, така че $x \in W_x \subseteq V_x$. По предположение $U \cap W_x \neq \emptyset$, откъдето $U \cap V_x \neq \emptyset$ и U е навсякъде гъсто в X, съгласно Лема 5.19.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Нека всяко непразно Зариски отворено подмножество $U \subset X$ е навсякъде гъсто в X. Произволно Зариски отворено $\emptyset \neq V \subset X$ е околност на всяка своя точка $x \in V$. Следователно $U \cap V = \emptyset$, Q.E.D.

Сега ще изследваме връзката между неприводимостта на проективно многообразие и неприводимостта на неговите афинни околности. За целта, нека $X \subseteq \mathbb{P}^n$ е непразно проективно многообразие, чийто хомогенен идеал $I(X) \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ се поражда от хомогенните полиноми $g_j^{(d_j)}(x_0, \ldots, x_n) \in k[x_0, \ldots, x_n]$ от степен d_j за $1 \leq j \leq l$. Всяко стандартно афинно подмножество $U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n \,|\, x_i \neq 0\}$ пресича X в афинно многообразие $X \cap U_i \subseteq U_i \simeq k^n$, което се нарича афинна околност на X. Въвеждаме афинни координати

$$t_0 = \frac{x_o}{x_i}, \ldots, t_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, t_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, t_n = \frac{x_n}{x_i}$$

върху U_i. Тогава идеалът $I(X \cap U_i) \triangleleft k[t_0, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n]$ е дехомогенизация на хомогенния идеал $I(X) \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$. По-точно, ако разделим $g_j^{(d_j)}(x_0, \ldots, x_n)$ на $x_i^{d_j}$ и заместим $\frac{x_s}{x_i}$ с t_s за всички $s \neq i$, то получаваме дехомогенизацията $g_j^{(d_j)}(t_0, \ldots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \ldots, t_n) \in k[t_0, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n]$ на $g_j^{(d_j)}(x_0, \ldots, x_n)$, която в общия случай е нехомогенен полином от обща степен d_j. Идеалът $I(X \cap U_i)$ се поражда от дехомогенизациите $g_j^{(d_j)}(t_0, \ldots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \ldots, t_n)$ на пораждащите $g_j^{(d_j)}(x_0, \ldots, x_n)$ на $I(X)$.

Обратно, ако $Y \subset U_i$ е афинно многообразие, то $I(Y) \triangleleft k[t_0, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n]$ се поражда от краен брой (нехомогенни)полиноми $f_j^{(d_j)}(t_0, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots t_n)$ от обща степен d_j за $1 \leq j \leq l$. Хомогенизациите

$$\widetilde{f_j^{(d_j)}}(x_0, \ldots, x_n) = x_i^{d_j} f_j^{(d_j)}\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in k[x_0, \ldots, x_n],$$

за $1 \leq j \leq l$ се получават чрез замяна на t_s с $\frac{x_s}{x_i}$ за всички $s \neq i$ и умножение с $x_i^{d_j}$. По-точно, ако

$$f_j^{(d_j)}\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) = \sum_{\nu=0}^{d_j} f_j^{(d_j)}\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)^{(\nu)}$$

е разлагането в сума от хомогенни компоненти, то всяко произведение

$$x_i^{d_j} f_j^{(d_j)}\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)^{(\nu)} = x_i^{d_j - \nu} f_j^{(d_j)}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^{(\nu)}$$

е хомогенен полином на $x_0, \ldots, x_n$ от степен d_j. Степента му относно x_i е $d_j - \nu$, а сумарната стапен относно останалите променливи е ν. Нека $\widetilde{I(Y)} \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ е хомогенният идеал, породен от хомогенизациите $\widetilde{f_j^{(d_j)}}(x_0, \ldots, x_n)$ за $\forall 1 \leq j \leq l$. Тогава проективното многообразие $\overline{Y} = V(\widetilde{I(Y)})$ се нарича проективна обвивка на Y. Ясно е, че $\overline{Y} \cap U_i = Y$, защото всеки полином $f_j^{(d_j)}(t_0, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots t_n)$ се възстановява след последователно прилагане на хомогенизация и дехомогенизация.

Ще проверим, че $V(\widetilde{I(Y)})$ съвпада със сечението $\cap_{Z \supset Y} Z$ на проективните многообразия $Z \supseteq Y$. Преди всичко, $V(\widetilde{I(Y)}) \supseteq \cap_{Z \supset Y} Z$, защото $V(\widetilde{I(Y)})$ е проективно многообарзие, съдържащо Y. Да допуснем, че $V(\widetilde{I(Y)}) \supsetneqq \cap_{Z \supseteq Y} Z$. Тогава съществува проективно многообразие $Z_o \supseteq Y$, което не съдържа $V(\widetilde{I(Y)})$. Нека $p \in V(\widetilde{I(Y)}) \setminus Z_o$ и $Z_o = V(J)$ за някакъв хомогенен идеал $J \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$. В резултат, можем да изберем хомогенен полином $f_o \in J$, така че $f_o(p) \neq 0$. Съгласно $V(J) = Z_o \supseteq Y$, дехомогенизацията на f_o се анулира върху Y. С други думи, $f_o(t_0, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n) \in I(Y)$, откъдето хомогенизацията $f_o(x_0, \dots, x_n) \in \widetilde{I(Y)}$. Вземайки предвид, че $p \in V(\widetilde{I(Y)})$, получаваме $f_o(p) = 0$. Противоречието доказва, че $V(\widetilde{I(Y)}) \subseteq \cap_{Z \supset Y} Z$, откъдето $V(\widetilde{I(Y)}) = \cap_{Z \supset Y} Z$.

Твърдение 5.21. *Нека k е алгебрично затворено поле, V е $(n+1)$-мерно линейно пространство на k, $W \subset V$ е хиперравнина през началото, $U(W) = \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W) \simeq k^n$ е допълнението на проективизацията $\mathbb{P}(W)$ на W до проективизацията $\mathbb{P}(V)$ на V, а $X \subseteq \mathbb{P}^n$ е непразно проективно многообразие. Тогава:*
(i) ако X е неприводимо проективно многообразие с $X \cap U(W) \neq \emptyset$, то сечението $X \cap U(W) \subseteq U(W)$ е неприводимо афинно многообразие в $U(W) \simeq k^n$;
(ii) ако за всяка хиперравнина $W^n \subset V^{n+1}$ с $X \cap U(W) \neq \emptyset$ афинното многообразие $X \cap U(W) \subseteq U(W)$ е неприводимо, то X е неприводимо проективно многообразие.

Доказателство: (i) Нека $X \cap U(W) = Y_1 \cup Y_2$ е обединение от афинни подмногообразия $Y_1 \subseteq X \cap U(W)$ и $Y_2 \subseteq X \cap U(W)$. Тогава проективното многообразие $X \supseteq Y_i$ съдържа проективните обвивки $\overline{Y_i} = V(\widetilde{I(Y_i)})$ и може да се представи като обединение

$$X = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2} \cup (X \cap \mathbb{P}(W))$$

на проективни подмногообразия. От неприводимостта на X имаме $X = \overline{Y_1}$, $X = \overline{Y_2}$ или $X = X \cap \mathbb{P}(W)$. По предположение, $X \cap U(W) \neq \emptyset$, така че $X \not\subseteq \mathbb{P}(W)$ и $X \neq X \cap \mathbb{P}(W)$. След евентуална размяна на $\overline{Y_1}$ с $\overline{Y_2}$, можем да считаме, че $X = \overline{Y_1} = V(\widetilde{I(Y_1)})$. Включването $Y_1 \subseteq X \cap U(W)$ е по предпоолжение. Ако допуснем, че $Y_1 \subsetneqq X \cap U(W)$, то $I(Y_1) \supsetneqq I(X \cap U(W))$ съгласно Следствие 4.16 (i). Следователно съответните хомогенизации $\widetilde{I(Y_1)} \supsetneqq \widetilde{I(X \cap U(W))} = I(X)$ се съдържат строго. В резултат, $\overline{Y_1} = V(\widetilde{I(Y_1)}) \subsetneqq VI(X) = X$ съгласно Следствие 4.16 (ii), което противоречи на $X = \overline{Y_1}$ и доказва, че $X \cap U(W) = Y_1$. Следователно $X \cap U(W) \subseteq U(W)$ е неприводимо афинно многообразие.
(ii) Да допуснем, че $X \cap U(W) \subseteq U(W)$ са неприводими афинни многообразия за всяка хиперравнина $W \subset V$ с $X \cap U(W) \neq \emptyset$, но X е приводимо проективно многообразие. Тогава съществуват собствени проективни подмногообразия $Y \subsetneqq X$ и $Z \subsetneqq X$, така че $X = Y \cup Z$. Избираме точки $[p] = [p_0 : p_1 : \ldots : p_n] \in X \setminus Y$ и $[q] = [q_0 : q_1 : \ldots : q_n] \in X \setminus Z$. Съответните повдигания $p, q \in V$ са линейно независими и се допълват до базис $p, q, r^{(3)}, \ldots, r^{(n+1)}$ на V. Тогава линейната обвивка $W = l(p+q, r^{(3)}, \ldots, r^{(n+1)})$ е хиперравнина във V, чиято проективизация $\mathbb{P}(W)$ не съдържа $[p]$ и $[q]$. В резултат, $[p], [q] \in U(W) = \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$ и $X \cap U(W) \neq \emptyset$. По предположение, $X \cap U(W) = (Y \cap U(W)) \cup (Z \cap U(W))$ е неприводимо афинно подмногообразие на $U(W)$, така че $X \cap U(W) = Y \cap U(W)$ след евентуална размяна на Y с Z. Тогава $[p] \in X \cap U(W) = Y \cap U(W)$, което противоречи на $[p] \notin Y$ и доказва неприводимостта на проективното многообразие X, Q.E.D.