Глава 6

Регулярни функции и изображения

Определение 6.1. *Ако $X \subseteq k^n$ е афинно многообразие с идеал*

$$I(X) = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n] \,|\, f(x) = 0 \text{ за } \forall x \in X\},$$

то фактор-пръстенът

$$k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$$

се нарича афинен координатен пръстен на X.

Определение 6.2. *Елементите на $k[X]$ са коректно определени функции върху X и се наричат регулярни функции.*

За всеки идеал $I \triangleleft k[X]$, множеството

$$\widetilde{I} = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n] \,|\, \overline{f} = f + I(X) \in I\}$$

е идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$, съдържащ $I(X)$. Факторът $\widetilde{I}/I(X) = I$. Обратно, всеки идеал $J \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$, съдържащ $I(X)$ индуцира идеал $I = J/I(X) \triangleleft k[X]$. При това,

$$\widetilde{I} = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \,|\, f + I(X) \in J/I(X)\} = J,$$

защото $J \subseteq \widetilde{I}$ и за $\forall f \in \widetilde{I}$ съществуват $g \in J$ и $h \in I(X)$, така че $f = g + h \in J$. С това установяваме, че идеалите $I \triangleleft k[X]$ са във взаимно еднозначно съответствие с идеалите $\widetilde{I} \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$, съдържащи $I(X)$. Още повече, съответните фактор-пръстени са изоморфни,

$$k[X]/I \simeq [k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)] \,/\, \left[\widetilde{I}/I(X)\right] \simeq k[x_1, \ldots, x_n]/\widetilde{I}.$$

В частност, $I \triangleleft k[X]$ е максимален идеал точно когато $\widetilde{I} \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е максимален идеал, съдържащ $I(X)$. Вземайки предвид взаимно еднозначното съответствие между точки $p \in k^n$ и максимални идеали

$$\widetilde{\mathfrak{M}_p} = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$$

над алгебрично затворено поле k, получаваме следното

Следствие 6.3. *Нека X е непразно афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, а $k[X]$ е афинният координатен пръстен на X. Тогава точките p от X са във взаимно еднозначно съответствие с максималните идеали $\mathfrak{M}_p = \langle \overline{x_1 - p_1}, \ldots, \overline{x_n - p_n} \rangle$ в $k[X]$.*

Аналогично, $I \triangleleft k[X]$ е радикален идеал точно когато $\widetilde{I} \triangleleft k[x_1 \ldots, x_n]$ е радикален идеал, съдържащ $I(X)$. В светлината на биективното съответствие между афинни многообразия и радикални полиномиални идеали над алгебрично затворено поле е в сила следното

Следствие 6.4. *Нека $X \subseteq k^n$ е непразно афинно многообразие над алгебрично затворено поле k. Тогава подмногообразията $Y \subset X$ са във взаимно еднозначно съответствие с радикалните идеали*

$$I_X(Y) = \{\overline{f} \in k[X] \,|\, f(p) = 0 \text{ за } \forall p \in Y\} \triangleleft k[X].$$

Това съответствие обръща включванията.

Ако $\emptyset \neq X \subseteq k^n$ е непразно афинно многообразие, идеалът $I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ на X е собствен и $I(X) \cap k = \{0\}$. Следователно

$$k = k/[k \cap I(X)] \simeq [k + I(X)]/I(X)$$

се влага изоморфно в афинния координатен пръстен $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$. В резултат,

$$k[X] = k[x_1 + I(X), \ldots, x_n + I(X)]$$

се оказва крайнопородена k-алгебра. Идеалът $I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е радикален тогава и само тогава, когато в $k[X]$ няма ненулеви нилпотентни елементи. В някои източници, пръстените без ненулеви нилпотентни елементи се наричат редуцирани. Следващото твърдение характеризира афинните координатни пръстени $k[X]$ над алгебрично затворено поле k.

Твърдение 6.5. *Нека k е алгебрично затворено поле, а R е k-алгебра. В такъв случай, R е афинен координатен пръстен на афинно многообразие X тогава и само тогава, когато R е крайнопородена k-алгебра без ненулеви нилпотентни елементи.*

Доказателство: Вече споменахме, че афинният координатен пръстен $k[X]$ е крайнопородена k-алгебра без ненулеви нилпотентни елементи.
Обратно, нека $R = k[a_1, \ldots, a_n]$ е крайнопородена k-алгебра без ненулеви нилпотентни елементи. Естественият хомоморфизъм

$$\pi_R : k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow R = k[a_1, \ldots, a_n],$$
$$\pi_R(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n)$$

индуцира изоморфизъм на k-алгебри

$$k[x_1, \ldots, x_n]/Ker(\pi_R) \simeq Im(\pi_R) = R.$$

Понеже R няма ненулеви нилпотентни елементи, идеалът $Ker(\pi_R) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е радикален. Разглеждаме афинното многообразие $X = V(Ker(\pi_R)) \subset k^n$. По Теоремата на Хилберт за нулите,

$$I(X) = IV(Ker(\pi_R)) = r(Ker(\pi_R)) = Ker(\pi_R),$$

така че $R \simeq k[x_1, \ldots, x_n]/I(X) = k[X]$ е изоморфен на афинния координатен пръстен на X като k-алгебра, Q.E.D.
Понякога крайнопородените k-алгебри без ненулеви нилпотентни елементи се наричат афинни алгебри.

Определение 6.6. *Нека $X \subset k^n$ и $Y \subset k^m$ са афинни многообразия, а $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_m} \in k[X]$ са регулярни функции върху X. Ако*

$$f : X \longrightarrow Y,$$
$$f(p_1, \ldots, p_n) = (f_1(p_1, \ldots, p_n), \ldots, f_m(p_1, \ldots, p_n))$$

взема стойности в Y за всички точки $p = (p_1, \ldots, p_n) \in X$, то казваме, че f е регулярно изображение от X в Y.

Лема 6.7. *Всяко регулярно изображение $f : X \to Y$ на афинни многообразия индуцира хомоморфизъм*

$$f^* : k[Y] \longrightarrow k[X],$$
$$f^*(\overline{g(y_1, \ldots, y_m)}) = \overline{(g \circ f)(x_1, \ldots, x_n)}$$

на съответните афинни координатни пръстени.
Още повече, ако $\mathfrak{M}_p \triangleleft k[X]$ и $\mathfrak{M}_{f(p)} \triangleleft k[Y]$ са максималните идеали на точките $p \in X$ и $f(p) \in Y$, то

$$\mathfrak{M}_{f(p)} = (f^*)^{-1}(\mathfrak{M}_p).$$

Доказателство: По определение, регулярното изображение

$$f : X \to Y,$$

$$f(p_1, \dots, p_n) = (f_1(p_1, \dots, p_n), \dots, f_m(p_1, \dots, p_n))$$

се задава с полиноми $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ на променливите $x_1, \dots, x_n$. От друга страна, регулярните функции $\overline{g} = g(y_1, \dots, y_m) + I(Y) \in k[Y]$ се представят с полиноми $g(y_1, \dots, y_m) \in k[y_1, \dots, y_m]$ на $y_1, \dots, y_m$, така че

$$(g \circ f)(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \in k[x_1, \dots, x_n]$$

е полином на $x_1, \dots, x_n$ и класът $\overline{(g \circ f)(x_1, \dots, x_n)} = (g \circ f)(x_1, \dots, x_n) + I(X)$ е регулярна функция върху X.
Изображението f^* е хомоморфизъм на пръстени, защото

$$f^*(\overline{g_1} + \overline{g_2}) = f^*(\overline{g_1 + g_2}) = \overline{(g_1 + g_2) \circ f} = \overline{g_1 \circ f + g_2 \circ f} =$$

$$\overline{g_1 \circ f} + \overline{g_2 \circ f} = f^*(\overline{g_1}) + f^*(\overline{g_2}), \text{ и}$$

$$f^*((\overline{g_1})(\overline{g_2})) = f^*(\overline{g_1 g_2}) = \overline{(g_1 g_2) \circ f} =$$

$$\overline{(g_1 \circ f)(g_2 \circ f)} = (\overline{g_1 \circ f})(\overline{g_2 \circ f}) = f^*(\overline{g_1}) f^*(\overline{g_2}).$$

Освен това, f^* е хомоморфизъм на k-алгебри съгласно

$$f^*(\lambda \overline{g}) = f^*(\overline{\lambda g}) = \overline{(\lambda g) \circ f} = \overline{\lambda (g \circ f)} = \lambda \overline{(g \circ f)} = \lambda f^*(\overline{g}).$$

По определение, $\mathfrak{M}_p = \{\overline{h} \in k[X] \mid h(p) = 0\}$ се състои от регулярните функции върху X, които се анулират в точка $p \in X$. Следователно $\overline{g} \in k[Y]$ принадлежи на $(f^*)^{-1}(\mathfrak{M}_p)$ тогава и само тогава, когато $f^*(\overline{g}) = \overline{g \circ f}$ има нулева стойност $(g \circ f)(p) = 0$. Последното условие е еквивалентно на $\overline{g} \in \mathfrak{M}_{f(p)}$, Q.E.D.

Твърдение 6.8. *Нека $X \subseteq k^n$ и $Y \subseteq k^m$ са афинни многообразия над поле k. Тогава регулярните изображения $X \to Y$ са във взаимно еднозначно съответствие с хомоморфизмите $k[Y] \to k[X]$ на k-алгебри.*

Доказателство: Всеки хомоморфизъм $\Phi : k[Y] \to k[X]$ на k-алгебри се индуцира от регулярно изображение $\varphi : X \to Y$, т.е. $\Phi = \varphi^*$. По-точно, ако $\Phi(\overline{y_j}) = \Phi(y_j + I(Y)) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n) + I(X) = \overline{\varphi_j(x_1, \dots, x_n)}$ за някакви полиноми $\varphi_j(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ при $1 \leq j \leq m$, то

$$\varphi = (\overline{\varphi_1(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \overline{\varphi_m(x_1, \dots, x_n)}) : X \longrightarrow Y$$

е регулярно изображение. Образът на φ се съдържа в Y, защото за всеки полином $G(y_1, \dots, y_m)$ от идеала на Y е в сила

$$G(\overline{\varphi_1}, \dots, \overline{\varphi_m}) = G(\Phi(\overline{y_1}), \dots, \Phi(\overline{y_m})) = \Phi(G(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})) = \Phi(\overline{0}) = \overline{0}.$$

Още повече,

$$\varphi^*(\overline{g(y_1, \dots, y_m)}) = \overline{(g \circ \varphi)(x_1, \dots, x_n)} = \overline{g(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n))} =$$

$$g(\overline{\varphi_1(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \overline{\varphi_m(x_1, \dots, x_n)}) = g(\Phi(\overline{y_1}), \dots, \Phi(\overline{y_m})) =$$

$$\Phi(g(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})) = \Phi(\overline{g(y_1, \dots, y_m)}),$$

така че $\varphi^* = \Phi$.
Ако регулярното изображение $f = (f_1, \dots, f_m) : X \to Y$ индуцира хомоморфизъм $f^* : k[Y] \to k[X]$ на съответните афинни координатни пръстени, то $f^*(\overline{y_j}) = \overline{(y_j \circ f)(x_1, \dots, x_n)} = \overline{f_j(x_1, \dots, x_n)}$ за $\forall 1 \leq j \leq m$. С други думи, регулярното изображение $X \to Y$, отговарящо на $f^* : k[Y] \to k[X]$ е f. С това проверихме взаимната еднозначност на съответствието между регулярни изображения $X \to Y$ и хомоморфизми $k[Y] \to k[X]$ на k-алгебри, Q.E.D.

Определение 6.9. *Ако $\varphi : X \to Y$ е регулярно взаимно еднозначно изображение с регулярно обратно $\varphi^{-1} : Y \to X$, то φ се нарича бирегулярно.*

Твърдение 6.10. *(i) Нека $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to Z$ са регулярни изображения на афинни многообразия. Тогава композицията им $\psi\varphi : X \to Z$ индуцира хомоморфизма*

$$(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^* : k[Z] \longrightarrow k[X]$$

на съответните афинни координатни пръстени.
(ii) Тъждественото изображение $\mathrm{Id}_X : X \to X$ на афинно многообразие X индуцира тъждествения хомоморфизъм $\mathrm{Id}_X^* = \mathrm{Id}_{k[X]} : k[X] \to k[X]$ на афинния координатен пръстен.
(iii) Бирегулярните изображения $\varphi : X \to Y$ на афинни многообразия са във взаимно еднозначно съответствие с изоморфизмите $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ на афинните координатни k-алгебри.

Доказателство: (i) За прозиволна регулярна функция $\overline{f} \in k[Z]$ проверяваме, че

$$(\psi\varphi)^*(\overline{f}) = \overline{f(\psi\varphi)} = \overline{(f\psi)\varphi} = \varphi^*\overline{(f\psi)} = \varphi^*\psi^*(\overline{f}).$$

(ii) За всяко $\overline{f} \in k[X]$ е в сила $\mathrm{Id}_X^*(\overline{f}) = \overline{f\mathrm{Id}_X} = \overline{f}$, така че $\mathrm{Id}_X^* = \mathrm{Id}_{k[X]}$.
(iii) По определение, бирегулярните изображения $\varphi : X \to Y$ са взаимно еднозначни и регулярни заедно със своите обратни $\varphi^{-1} : Y \to X$. Това дава възможност да приложим (i), (ii) към $\varphi^{-1}\varphi = \mathrm{Id}_x$, $\varphi\varphi^{-1} = \mathrm{Id}_Y$ и да получим $\varphi^*(\varphi^{-1})^* = (\varphi^{-1}\varphi)^* = \mathrm{Id}_x^* = \mathrm{Id}_{k[X]}$, $(\varphi^{-1})^*\varphi^* = (\varphi\varphi^{-1})^* = \mathrm{Id}_Y^* = \mathrm{Id}_{k[Y]}$. В резултат, $\varphi^*k[Y] \to k[X]$ се оказва изоморфизъм на k-алгебри с $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$. Обратно, ако $\Phi : k[Y] \to k[X]$ е изоморфизъм на k-алгебри, то съществуват регулярни изображения $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ с $\varphi^* = \Phi$ и $\psi^* = \Phi^{-1}$. Оттук $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^* = \Phi\Phi^{-1} = \mathrm{Id}_{k[X]}$ и $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^* = \Phi^{-1}\Phi = \mathrm{Id}_{k[Y]}$ съгласно (i). Възоснова на (ii) и взаимната еднозначност на съответствието между регулярни изображения $X \to X$ и хомоморфизми $k[X] \to k[X]$ на k-алгебри, стигаме до извода, че $\psi\varphi = \mathrm{Id}_X$. Аналогично, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_Y$, така че $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ са бирегулярни изображения, Q.E.D.
Следващото твърдение изучава ядрото и образа на хомоморфизъм на афинни координатни k-алгебри на езика на съответното регулярно изображение на афинни монгообразия.

Определение 6.11. *Регулярното изображение $\varphi : X \to Y$ на афинни многообразия е доминантно, ако Зариски затворената обвивка на образа $\overline{\varphi(X)} = VI(\varphi(X)) = Y$ съвпада с Y.*

Да напомним, че хомоморфизъм на пръстени $\psi : R \to S$ се нарича влагане или мономорфизъм, ако $Ker(\psi) = \{0_R\}$. Ще казваме, че ψ е епиморфизъм, ако $Im(\psi) = S$

Твърдение 6.12. *Нека $\varphi : X \to Y$ е регулярно изображение на афинни многообразия над алгебрично затворено поле k, $Z = \overline{\varphi(X)} = VI(\varphi(X))$ е Зариски затворената обвивка на образа на φ, а $I_Y(Z) \triangleleft k[Y]$ е идеалът на $Z \subseteq Y$ в афинния координатен пръстен на Y. Тогава:*
(i) хомоморфизмът $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ на афинните координатни пръстени има ядро $Ker(\varphi^*) = I_Y(Z)$ и образ $Im(\varphi^*) \simeq k[Z]$;
(ii) $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е влагане тогава и само тогава, когато $\varphi : X \to Y$ е доминантно регулярно изображение;
(iii) ако $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е епиморфизъм, то произволни различни точки $p, q \in X$ имат различни образи $\varphi(p), \varphi(q) \in Y$.

Доказателство: (i) Ядрото

$$Ker(\varphi^*) = \{\overline{g} \in k[Y] \,|\, \varphi^*(g)(p) = g\varphi(p) = 0, \forall p \in X\}$$

се състои от класовете $\overline{g} = g+I(Y)$ на онези полиноми $g(y_1, \ldots, y_m) \in k[y_1, \ldots, y_m]$, които принадлежат на идеала $I(\varphi(X)) \triangleleft k[y_1, \ldots, y_m]$ на образа $\varphi(X)$ на φ. Съгласно Теоремата на Хилберт за нулите и радикалността на $I(\varphi(X))$, Зариски затворената обвивка $Z = \overline{\varphi(X)}$ има идеал $I(Z) = IVI(\varphi(X)) = r(I(\varphi(X))) = I(\varphi(X))$. От $Z \subseteq Y$ става ясно, че идеалът $I(Y) \triangleleft k[y_1, \ldots, y_m]$ се съдържа в идеала $I(Z) \triangleleft k[y_1, \ldots, y_m]$ и факторът $I_Y(Z) = I(Z)/I(Y) \triangleleft k[y_1, \ldots, y_m]/I(Y) = k[Y]$ е точно идеалът на Z в афинния координатен пръстен $k[Y]$ на Y. С това установихме, че $Ker(\varphi^*) = I(\varphi(X))/I(Y) = I(Z)/I(Y) = I_Y(Z)$.
По теоремата за хомоморфизмите на пръстени, $\varphi^*; k[Y] \to k[X]$ индуцира изоморфизъм на k-алгебри

$$k[Y]/Ker(\varphi^*) \simeq Im(\varphi^*).$$

От своя страна, факторът

$$k[Y]/Ker(\varphi^*) = [k[y_1, \ldots, y_m]/I(Y)] \,/\, [I(Z)/I(Y)] \simeq k[Z]$$

е изоморфен на афинния координатен пръстен $k[Z]$ на Z.
(ii) Хомоморфизмът на k-алгебри $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е влагане тогава и само тогава, когато $Ker(\varphi^*) = I_Y(Z) = o \triangleleft k[Y]$. Последното е еквивалентно на $I(Z) = I(Y) \triangleleft k[y_1, \ldots, y_m]$, което от своя страна е равносилно на $Z = VI(Z) = VI(Y) = Y$. С други думи, $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е влагане точно когато регулярното изображение $\varphi : X \to Y$ е доминантно.
(iii) Да допуснем, че $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е епиморфизъм и съществуват различни точки $p, q \in X \subseteq k^n$ с един и същи образ $\varphi(p) = \varphi(q) \in Y \subseteq k^m$. Тогава за всяка координатна функция $\overline{y_j} = y_j + I(Y) \in k[Y]$, $1 \leq j \leq m$ върху Y е изпълнено

$$\varphi^*(\overline{y_j})(p) = y_j\varphi(p) = y_j\varphi(q) = \varphi^*(\overline{y_j})(q).$$

Вземайки предвид, че $k[Y] = k[\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_m}]$ е k-алгебрата, породена от $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_m}$, стигаме до извода, че всяка регулярна функция $\overline{f} \in k[X] = Im(\varphi^*) = \varphi^*(k[Y])$ има една и съща стойност $f(p) = f(q)$ върху p и q. В частност, всяка координатна функция $\overline{x_i} = x_i + I(X) \in k[X]$, $1 \leq i \leq n$ върху X има една и съща стойност в p и q, откъдето $p = q$. Противоречието доказва, че ако $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е епиморфизъм, то произволни $p \neq q$ от X имат различни образи $\varphi(p) \neq \varphi(q)$, Q.E.D.
За да докажем, че главните Зариски отворени подмножества U_f на афинно многообразие $X \subseteq k^n$ се изобразяват биективно върху афинни подмногообразия на k^{n+1}, да напомним накратко конструкцията на локализация $S^{-1}R$ на комутативен пръстен с единица R по мултипликативно затворено подмножество $S \subset R$.

Определение 6.13. *Подмножеството S на комутативен пръстен с единица R е мултипликативно затворено, ако съдържа единицата 1_R, не съдържа нулата 0_R и от $a, b \in S$ следва $ab \in S$.*

Ако S е мултипликативно затворено подмножество на комутативен пръстен с единица R, то в Декартовото произведение $R \times S$ определяме релация

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow (at - bs)u = 0 \text{ за някое } u \in S.$$

Непосредствено се проверява, че $(a, s) \sim (a, s)$ и ако $(a, s) \sim (b, t)$, то $(b, t) \sim (a, s)$. Тази релация е транзитивна, защото ако $(a, s) \sim (b, t)$ и $(b, t) \sim (c, r)$, то съществуват $u, v \in S$, така че $(at - bs)u = 0$ и $(br - ct)v = 0$. Умножаваме почленно последните две равенства с rv, съответно, su и събираме, за да елиминираме b и да получим $(ar - cs)tuv = 0$. Съгласно мултипликативната затвореност на S имаме $tuv \in S$, така че $(a,s) \sim (c,r)$. По този начин, $\sim$ се оказва релация на еквивалентност и $R \times S$ се разбива на непресичащи се класове относно $\sim$. Да означим с $\frac{a}{s}$ класа на еквивалентност на $(a,s) \in R \times S$ и да положим $S^{-1}R$ за множеството на тези класове. В $S^{-1}R$ определяме събиране и умножение по правилото

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

Проверяваме коректността на тези определения, т.е. независимостта им от избора на представители на класовете на еквивалентност. Ако $\frac{a}{s} = \frac{a_1}{s_1}$ и $\frac{b}{t} = \frac{b_1}{t_1}$, то съществуват $u, v \in S$, така че $(as_1 - a_1 s)u = 0$, $(bt_1 - b_1 t)v = 0$. Тогава

$$[(at+bs)t_1 s_1 - (a_1 t_1 + b_1 s_1)ts]uv = [(as_1 - a_1 s)u](tt_1 v) + [(bt_1 - b_1 t)v](ss_1 u) = 0,$$

$$(abs_1 t_1 - a_1 b_1 st)uv = [(as_1 - a_1 s)u](bt_1 v) + [(bt_1 - b_1 t)v](a_1 su) = 0$$

гарантират

$$\frac{at+bs}{ts} = \frac{a_1 t_1 + b_1 s_1}{t_1 s_1} \text{ и } \frac{ab}{st} = \frac{a_1 b_1}{s_1 t_1}.$$

С така определените операции $S^{-1}R$ е комутативен пръстен с единица. Проверката на комутативността и асоциативността на събирането и умножението следва дословно като съответните закони за рационални числа. Класът $\frac{0_R}{1_R}$ изпълнява ролята на нулев елемент в $S^{-1}R$, защото

$$\frac{a}{s} + \frac{0_R}{1_R} = \frac{a1_R + 0_R s}{s1_R} = \frac{a}{s}.$$

Противоположният на $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$ е $\frac{(-a)}{s}$, съгласно

$$\frac{a}{s} + \frac{(-a)}{s} = \frac{as + (-a)s}{s^2} = \frac{as - as}{s^2} = \frac{0_R}{s^2} = \frac{0_R}{1_R}.$$

Дистрибутивният закон за събиране и умножение в $S^{-1}R$ се проверява както за рационални числа. Единицата на $S^{-1}R$ е $\frac{1_R}{1_R}$, защото

$$\frac{a}{s}\frac{1_R}{1_R} = \frac{a1_R}{s1_R} = \frac{a}{s}.$$

Ако R е област на цялост, то и $S^{-1}R$ е област на цялост и R се влага в $S^{-1}R$ като подпръстена

$$\left\{ \frac{r}{1_R} \,\middle|\, r \in R \right\} \subset S^{-1}R = \left\{ \frac{r}{s} \,\middle|\, r \in R,\, s \in S \right\}.$$

Ако пръстенът R е редуциран, т.е. няма ненулеви нилпотентни елементи, то за произволен ненулев елемент $0 \neq a \in R$, множеството $S_a = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ на неотрицателните цели степени на a е мултипликативно затворено. Локализацията $S_a^{-1}R$ се състои от класовете на еквивалентност $\frac{r}{a^n}$ с $r \in R$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Затова разглеждаме $S_a^{-1}R$ като множество от мономи на $\frac{1}{a}$ с коефициенти от R. Произволен полином $f\left(\frac{1}{a}\right) = r_0 + r_1 \frac{1}{a} + \ldots + r_m \left(\frac{1}{a}\right)^m \in R\left[\frac{1}{a}\right]$ може да се представи като моном $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{m} r_i a^{m-i}\right)}{a^m} \in S_a^{-1}R$ на $\frac{1}{a}$ с коефициенти от R. Това позволява да отъждествяваме множествата $S_a^{-1}R = R\left[\frac{1}{a}\right]$. За произволни елементи $r, s \in R$ и естествени числа $m \leq n$ е в сила

$$\frac{r}{a^m} + \frac{s}{a^n} = \frac{ra^n + sa^m}{a^{m+n}} = \frac{ra^{n-m} + s}{a^n},$$

така че адитивните групи $(S_a^{-1}R, +) \simeq \left(R\left[\frac{1}{a}\right], +\right)$ са изоморфни. Още повече, умножението на мономи на $\frac{1}{a}$ съвпада с умножението в $S_a^{-1}R$ и $S_a^{-1}R \simeq R\left[\frac{1}{a}\right]$ са изоморфни като пръстени.

За да характеризираме R-алгебрата $R\left[\frac{1}{a}\right]$, да разгледаме естествения хомоморфизъм

$$\pi_a : R[x] \longrightarrow R\left[\frac{1}{a}\right],$$

$$\pi_a(f(x)) = f\left(\frac{1}{a}\right) \text{ за } \forall f(x) \in R[x].$$

Той има образ $Im(\pi_a) = R\left[\frac{1}{a}\right]$ и ядро $Ker(\pi_a) = \{f(x) \in R[x] \,|\, f(\frac{1}{a}) = 0\}$. Произволен полином $f(x) \in R[x] \subset S_a^{-1}R[x]$ се дели на $ax-1$ в $S_a^{-1}R[x]$ с частно $q(x) \in S_a^{-1}R[x]$ и остатък $\frac{r}{a^n} \in S_a^{-1}R$. Равенството $f(x) = (ax-1)q(x) + \frac{r}{a^n}$ показва, че $f \in Ker(\pi_a)$ тогава и само тогава, когато $\frac{r}{a^n} = 0$ или $Ker(\pi_a) = \langle ax-1 \rangle$ е главният идеал, породен от полинома $ax - 1 \in R[x]$. Следователно

$$R[x]/\langle ax-1\rangle = R[x]/Ker(\pi_a) \simeq Im(\pi_a) = R\left[\frac{1}{a}\right].$$

Да формулираме направените разглеждания:

Твърдение 6.14. *Ако $0 \neq a \in R$ е ненулев елемент на комутативна област с единица R без ненулеви нилпотентни елементи, а $S_a = \{a^n \,|\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ е мултипликативно затвореното подмножество на неотрицателните цели степени на a, то локализацията*

$$S_a^{-1}R = R\left[\frac{1}{a}\right] \simeq R[x]/\langle ax-1\rangle$$

съвпада с R-алгебрата без делители на нулата, породена от $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Твърдение 6.15. *Нека $X \subseteq k^n$ е неприводимо афинно многообразие, $f \notin I(X)$ е полином извън простия идеал $I(X) \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$, а $\overline{1} = 1 + I(X) \in k[X]$ и $\overline{f} = f + I(X) \in k[X]$ са класовете на 1 и f в афинния координатен пръстен $k[X]$. Тогава главното Зариски отворено подмножество*

$$U_f = \{x \in X \,|\, f(x) \neq 0\}$$

е изоморфно като множество на афинното многообразие $X_f \subseteq k^{n+1}$ с афинен координатен пръстен

$$k[X_f] \simeq k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{f}}\right].$$

Доказателство: Съгласно Теоремата на Хилберт за базиса, полиномиалният идеал $I(X) \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ се поражда от краен брой свои елементи $g_1, \ldots, g_l \in I(X)$. Следователно

$$U_f = \{x \in k^n \,|\, g_1(x) = \ldots = g_l(x) = 0,\ f(x) \neq 0\}.$$

Да разгледаме афинното многообразие

$$X_f = \{(x_0, x) \in k \times k^n = k^{n+1} \,|\, g_1(x) = \ldots = g_l(x) = 0,\ x_0 f(x) - 1 = 0\}$$

и изображението

$$\Phi : U_f \longrightarrow k^{n+1},$$

$$\Phi(x) = \left(\frac{1}{f(x)}, x\right).$$

Образът

$$Im(\Phi) = \left\{\left(\frac{1}{f(x)}, x\right) \in k^{n+1} \,\middle|\, x_0 = \frac{1}{f(x)},\ g_1(x) = \ldots = g_l(x) = 0\right\} = X_f$$

съвпада с афинното многообразие $X_f \subseteq k^{n+1}$. Различни точки $x, y \in U_f$ се изобразяват в различни точки $\Phi(x), \Phi(y) \in X_f$, така че $\Phi : U_f \to X_f$ е взаимно еднозначно изображение.

Афинният координатен пръстен $k[X_f] = k[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I(X_f)$ е фактор-пръстенът на идеала

$$I(X_f) = \langle g_1(x), \ldots, g_l(x),\ x_0 f(x) - 1 \rangle \lhd k[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Ако $I(X)_o = \langle g_1(x), \ldots, g_l(x) \rangle_{k[x_0,x_1,\ldots,x_n]}$ е идеалът в $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, породен от $I(X) = \langle g_1(x), \ldots, g_l(x) \rangle \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$, то $I(X)_o \subseteq I(X_f)$ и $I(X_f)/I(X)_o = \langle x_0 f(x) - 1 + I(X)_o \rangle$. Фактор-пръстенът

$$k[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I(X)_o = k[x_1, \ldots, x_n][x_0]/I(X)_o = k[X][x_0 + I(X)_o],$$

където $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ с $I(X) = I(X)_o \cap k[x_1, \ldots, x_n]$ е афинният координатен пръстен на X. В резултат,

$$k[X_f] = k[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I(X_f) \simeq$$

$$(k[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I(X)_o) \,/\, (I(X_f)/I(X)_o) = k[X][x_0 + I(X)_o]/\langle x_0 f(x) - 1 + I(X)_0 \rangle.$$

Да отбележим, че $x_0 f(x) - 1 + I(X)_o = [f(x) + I(X)_o][x_0 + I(X)_o] - [1 + I(X)_o]$. Съгласно Твърдение 6.14, фактор-пръстенът

$$k[X][x_0 + I(X)_o]/\langle [f(x) + I(X)_o][x_0 + I(X)_o] - [1 + I(X)_o] \rangle \simeq$$

$$k[X]\left[\frac{1 + I(X)_o}{f(x) + I(X)_o}\right] = k[X]\left[\frac{1 + I(X)}{f(x) + I(X)}\right],$$

Q.E.D.

За да определим хомогенния координатен пръстен $Gr(X)$ на проективно многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ ни трябва понятието градуирана k-алгебра.

Определение 6.16. *Градуираният пръстен $R = \oplus_{i=0}^{\infty} R_i$ е градуирана k-алгебра, ако нулевата хомогенна компонента $R_0 = k$ съвпада с полето k.*

Лесно се вижда, че ако $R = \oplus_{i=0}^{\infty} R_i$ е градуирана k-алгебра, то всяка хомогенна компонента R_i на R е линейно пространство над k. По този начин, R е линейно пространство над k, така че всяка градуирана k-алгебра е k-алгебра.

Например, пръстенът $k[x_1, \ldots, x_n]$ на полиномите на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от поле k е градуирана k-алгебра относно общата степен.

Лема 6.17. *Ако R е градуирана k-алгебра и $I \lhd R$ е собствен хомогенен идеал, то фактор-алгебрата R/I е градуирана k-алгебра.*

Доказателство: Твърдим, че идеалът $I = \oplus_{i=0}^{\infty} (I \cap R_i)$ е директна сума на хомогенните си компоненти. Включването $\oplus_{i=0}^{\infty} (I \cap R_i) \subseteq I$ следва от това, че $I \cap R_i$ са k-подмодули на I. Обратното включване $I \subseteq \oplus_{i=0}^{\infty} (I \cap R_i)$ се получава от определението за хомогенност на $I \lhd R$, т.е. всеки елемент $x = \sum_{i=0}^{m} x_i \in I$ принадлежи на I заедно с всички свои хомогенни компоненти $x_i \in R_i$. В резултат, адитивната група $(R/I, +)$ на фактор-пръстена е директна сума $R/I = \oplus_{i=0}^{\infty} [(R_i + I)/I]$ на своите подгрупи $(R_i + I)/I \simeq R_i/(R_i \cap I)$. Наистина, всеки елемент на R/I е от вида $r + I$ с $r = \sum_{i=0}^{k} r_i$, $r_i \in R_i$. Следователно $r + I = (r_0 + I) + \ldots + (r_k + I)$ се представя като крайна сума от елементи на $(R_i + I)/I$. Ако $\sum_{i=0}^{k} (r_i + I) = r + I = \sum_{j=0}^{l} (r'_j + I)$, то $\left[\sum_{i=0}^{\max(k,l)} (r_i - r'_i)\right] + I = \overline{0} = I$. Следователно $\sum_{i=0}^{\max(k,l)} (r_i - r'_i) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j$ за подходящи $\alpha_j \in I \cap R_j$. По този начин получаваме $\sum_{i=0}^{\max(k,l,m)} (r_i - r'_i - \alpha_i) = 0$. Доколкото сумата $(R, +) = \oplus_{i=0}^{\infty} (R_i, +)$ е

директна, оттук следва $r_i - r_i' - \alpha_i = 0$ или $r_i' = r_i - \alpha_i$. В резултат, $r_i' + I = r_i + I$, представянето $r + I = \sum\limits_{i=0}^{k}(r_i + I)$ е единствено и $(R/I, +) = \oplus_{i=0}^{\infty}([(R_i + I)/I], +)$.
Ако $r_i + I \in (R_i + I)/I$ и $r_j + I \in (R_j + I)/I$, то $(r_i + I)(r_j + I) = r_i r_j + I \in (R_{i+j} + I)/I$, така че фактор-пръстенът R/I е градуиран.
Собственият идеал $I \subsetneqq R$ пресича полето k в $I \cap k = \{0\}$, защото наличието на $\lambda \in I \cap k^*$ води до $R = I$. Следователно нулевата хомогенна компонента на R/I е $(R_0 + I)/I(k + I)/I \simeq k/(k \cap I) = k$, Q.E.D

Определение 6.18. *Ако $X \subseteq \mathbb{P}^n$ е проективно многообразие със собствен хомогенен идеал $I(X) \triangleleft k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, то градуираната k-алгебра*

$$Gr(X) = k[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I(X)$$

се нарича хомогенен координатен пръстен на X.

За разлика от афинния координатен пръстен, който се състои от коректно определени функции върху съответното афинно многообразие, елементите на хомогенния координатен пръстен $Gr(X)$ нямат еднозначно определени стойности в точките $x \in X$. Причина за това е, че хомогенните координати x_i на точка $[x] = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ са определени с точност до мултипликативна константа $\lambda \in k^*$ и хомогенните елементи $f(x_0, \ldots, x_n) + I(X) \in \left(k[x_0, \ldots, x_n]^{(d)} + I(X)\right)/I(X)$ на $Gr(X)$ вземат стойности $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)$, които зависят от λ.
Нека

$$\Pi : k^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{P}^n,$$
$$\Pi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$$

е проекцията, съпоставяща на ненулев вектор $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in k^{n+1}$ неговият клас на колинеарност $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n$. Тогава проективните многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$ отговарят на k^*-инвариантни афинни многообразия $\widehat{X} = \Pi^{-1}(X) \cup \{0^{n+1}\} \subseteq k^{n+1}$ със същия идеал $I(\widehat{X}) = I(X)$. Оттук, хомогенният координатен пръстен $Gr(X) = k[\widehat{X}]$ съвпада с афинния координатен пръстен $k[\widehat{X}]$ на $\widehat{X}$, ако се разглежда като k-алгебра без градуировка. Затова $Gr(X) = k[x_0 + I(X), \ldots, x_n + I(X)]$ е крайнопородена k-алгебра без ненулеви нилпотентни елементи. Благодарение на хомогенността на идеала $I(X) \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$, градуировката на k-алгебрата $k[x_0, \ldots, x_n]$ се о наследява от $Gr(X)$ и $Gr(X)$ се оказва градуираната k-алгебра, породена от хомогенните си елементи $x_0 + I(X), \ldots, x_n + I(X)$ от степен 1.
Затова $Gr(X) = k[x_0 + I(X), \ldots, x_n + I(X)]$ е градуирана k-алгебра без ненулеви нилпотентни елементи и с краен брой хомогенни пораждащи $x_i + I(X)$, $0 \leq i \leq n$ от степен 1.
Обратно, нека $R = k[r_0, r_1, \ldots, r_n]$ е градуирана k-алгебра без ненулеви нилпотентни елементи и с краен брой пораждащи $r_i \in R_1$, $0 \leq i \leq n$ от степен 1, а

$$\pi_R : k[x_0, x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow R = k[r_0, r_1, \ldots, r_n],$$
$$\pi_R(f(x_0, x_1, \ldots, x_n)) = f(r_0, r_1, \ldots, r_n)$$

е естественият хомоморфизъм с образ $Im(\pi_R) = R$. Тогава ядрото $Ker(\pi_R)$ е радикален идеал в $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Твърдим, че $Ker(\pi_R)$ е хомогенен идеал в $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Наистина, ако $f = \sum\limits_{i=0}^{k} f^{(i)} \in Ker(\pi_R)$ има хомогенни компоненти $f^{(i)} \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]^{(i)}$, то $0_R = \pi_R(f) = \sum\limits_{i=0}^{k} f^{(i)}(r_0, r_1, \ldots, r_n) \in \oplus_{i=0}^{\infty} R_i = R$ има нулеви хомогенгенни компоненти $f^{(i)}(r_0, r_1, \ldots, r_n) = 0$, защото сумата

$\oplus_{i=0}^{\infty} R_i$ е директна. Следователно $f \in Ker(\pi_R)$ точно когато $f^{(i)} \in Ker(\pi_R)$ за $\forall 0 \leq i \leq k$. Оттук $Y = V(Ker(\pi_R)) \subseteq k^{n+1}$ е афинно многообразие, което е инвариантно относно действието на k^* и съдържа началото 0^{n+1}. С други думи, $X = \Pi\left(Y \setminus \{0^{n+1}\}\right) \subseteq \mathbb{P}^n$ е проективно многообразие с идеал $Ker(\pi_R)$. Съгласно Твърдение 6.5, ако полето k е алгебрично затворено, то $R = k[Y]$ съвпада с афинния координатен пръстен $k[Y]$ на Y. Вземайки предвид, че $k[Y] = Gr(X)$, получаваме следното

Следствие 6.19. *Ако k е алгебрично затворено поле, а R е градуирана k-алгебра, то R е хомогенен координатен пръстен на проективно многообразие тогава и само тогава, когато R няма ненулеви нилпотентни елементи и се поражда като k-алгебра от краен брой свои хомогенни елементи от степен 1.*