Глава 7

# Рационални функции и изображения

Да отбележим, че ако $R$ е комутативна област с единица, то множеството $S = R \setminus \{0_R\}$ на ненулевите елементи на $R$ е мултипликативно затворено и локализацията $S^{-1}R$ е поле, което се нарича поле от частни на $R$. Пръстенът $R$ се влага в $S^{-1}R$ като подпръстена $\left\{ \frac{r}{1_R} \,\middle|\, r \in R \right\} \subset S^{-1}R$.

Определение 7.1. *Ако $X \subseteq k^n$ е неприводимо афинно многообразие, то полето от частни $k(X)$ на афинния координатен пръстен $k[X]$ се нарича поле на рационалните функции върху $X$.*

Ако $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in k(X)$, то $\overline{g} \neq \overline{0}$, така че полиномът $g \not\in I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ не се анулира тъждествено върху $X$. Следователно главното Зариски отворено подмножество $U_g = \{p \in X \,|\, g(p) \neq \emptyset\}$ е непразно, а оттам и Зариски гъсто в неприводимото многообразие $X$. Рационалната функция $\frac{\overline{f}}{\overline{g}}$ задава коректно определено изображение $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} : U_g \to k$. Ще означаваме с пунктирана стрелка $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} : X \dashrightarrow k$, вземайки предвид, че $\frac{\overline{f}}{\overline{g}}$ не е дефинирано върху $X \setminus U_g = \overline{U_g} \setminus U_g$. Да напомним, че рационалните числа имат безброй много представяния като частни на цели. Например, $\frac{2}{3} = \frac{2z}{3z}$ за $\forall z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. По същия начин, рационалните функции $\varphi \in k(X)$ имат безбройно много представяния $\varphi = \frac{\overline{f}}{\overline{g}}$ като частни на регулярни функции $\overline{f}, \overline{g} \in k[X]$. Рационалната функция $\varphi \in k(X)$ е коректно определена в точка $p \in X$, ако съществуват $\overline{f_p}, \overline{g_p} \in k[X]$, така че $g_p(p) \neq 0$ и $\frac{\overline{f_p}}{\overline{g_p}} = \varphi$. За различни точки $p, q \in X$ можем да имаме различни представяния на $\varphi$ като частно на регулярни функции. Например, да разгледаме афинното многообразие

$$X = \{x = (x_1, \ldots, x_4) \in k^4 \,|\, f(x_1, \ldots, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3 = 0\}.$$

За да установим неприводимостта на $X$ ще използваме факта, че всеки полином $F(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k$ на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от поле $k$ има единствено с точност до мултипликативна константа от $k^*$ разлагане $F = F_1 \ldots F_r$ в произведение от неразложими над $k$ полиноми $F_i \in k[x_1, \ldots, x_4] \setminus k$. Доказателството на това твърдение е изложено в Приложение 1. Непосредствено се проверява, че полиномът $f_0(x_1, \ldots, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3 \in k[x_1, \ldots, x_4] \setminus k$ е неразложим над $k$. Преди всичко, ако $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ е полином от обща степен $d$ и $f = gh$ за $g, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$ от обща степен $s$, съответно, $t$, то $d = s + t$. В случая, ако $f_0(x_1, \ldots, x_4) = g(x_1, \ldots, x_4)h(x_1, \ldots, x_4)$ за $g, h \in k[x_1, \ldots, x_4] \setminus k$, то $g(x_1, \ldots, x_4)$ и $h(x_1, \ldots, x_4)$ са линейни полиноми. Разлагайки в сума от хомогенни компоненти получаваме

$$f_0 = f_0^{(2)} = (g^{(1)} + g(0^4))(h^{(1)} + h(0^4)) = g^{(1)}h^{(1)} + [g^{(1)}h(0^4) + h^{(1)}g(0^4)] + g(0^4)h(0^4).$$

След евентуална размяна на $g$ с $h$ можем да считаме, че $h(0^4) = 0$. Тогава $h^{(1)}g(0^4) \equiv 0$ води до $g(0^4) = 0$ поради $h^{(1)} \not\equiv 0$. По този начин, ако

$f_0(x_1,\ldots,x_4) = x_1x_4 - x_2x_3$ е разложим над $k$, то

$$x_1x_4 - x_2x_3 = \left(\sum_{i=1}^{4} a_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} b_ix_i\right)$$

е произведение на два хомогенни полинома от степен 1. Сравнявайки коефициентите на $x_1^2$ получаваме $a_1b_1 = 0$. След евентуална размяна на линейните множители имаме $b_1 = 0$. Сега сравнението на коефициентите на $x_1x_4$ дава $1 = a_1b_4 = a_1b_4 + a_4b_1$. В частност, $a_1 \neq 0$ и $b_4 \neq 0$. По-нататък, анулирането на коефициентите на $x_1x_2$ и $x_1x_3$ гласи, че $a_1b_2 + a_2b_1 = a_1b_2 = 0$ и $a_1b_3 + a_3b_1 = a_1b_3 = 0$. Следователно $b_2 = b_3 = 0$ и

$$f_0(x_1,\ldots,x_4) = x_1x_4 - x_2x_3 = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)b_4x_4.$$

Понеже мономът $-x_2x_3$ на $f_0(x_1,\ldots,x_4)$ не е кратен на $x_4$, допускането за разложимост на $f_0(x_1,\ldots,x_4)$ над $k$ води до противоречие.

Следователно идеалът $I(X) = \langle f\rangle \triangleleft k[x_1,\ldots,x_4]$ е прост и афинното многообразие $X \subseteq k^4$ е неприводимо. Твърдим, че рационалната функция $\varphi = \frac{\overline{x_1}}{\overline{x_2}} \in k(X)$ е коректно определена в Зариски отвореното подмножество

$$U_{2,4} = \{x \in X \mid x_2 \neq 0\} \cup \{x \in X \mid x_4 \neq 0\}.$$

За целта е достатъчно да отбележим, че $\overline{x_1x_4} - \overline{x_2x_3} = \overline{0}$ в $k[X]$, така че $\varphi = \frac{\overline{x_1}}{\overline{x_2}} = \frac{\overline{x_3}}{\overline{x_4}} \in k(X)$ и $\varphi = \frac{\overline{x_3}}{\overline{x_4}}$ е коректно определена в $\{x \in X \mid x_4 \neq 0\}$.

Нека $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} : X \dashrightarrow k$ е рационална функция върху неприводимото афинно многообразие $X \subseteq k^n$, $U_g = \{p \in X \mid g(p) \neq 0\}$, а $X_g \subseteq k^{n+1}$ е афинното многообразие, отговарящо на $U_g$. Тогава $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{g}}\right] = k[X_g]$ е регулярна функция върху $X_g$ и главното Зариски отворено подмножество $U_g \subseteq X$ се нарича област на регулярност на $\frac{\overline{f}}{\overline{g}}$.

Проективното многообразие $X \subseteq \mathbb{P}^n$ е неприводимо тогава и само тогава, когато хомогенният координатен пръстен $Gr(X) = k[x_0,\ldots,x_n]/I(X)$ е област на цялост. По-точно, $X$ е неприводимо точно когато всички непразни сечения $X \cap U(W)$ с $U(W) = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}(W)$ са неприводими афинни многообразия. Но неприводимостта на $X \cap U(W)$ е еквивалентна на простотата на дехомогенизирания идеал $I(X \cap U(W)) \triangleleft k[t_1^W,\ldots,t_n^W]$. Благодарение на взаимната обратност на хомогенизацията и дехомогенизацията, хомогенният идеал $I(X) \triangleleft k[x_0,\ldots,x_n]$ е прост тогава и само тогава, когато всички собствени дехомогенизирани идеали $I(X \cap U(W)) \triangleleft k[t_1^W,\ldots,t_n^W]$ са прости.

Градуировката на $Gr(X)$ чрез общата степен на полиномите се продължава до градуировка на полето от частни $k(Gr(X))$ на $Gr(X)$. Хомогенната компонента $k(Gr(X))_o$ от степен 0 е подполе на $k(Gr(X))$, доколкото за произволни елементи $\frac{\overline{f_1}}{\overline{g_1}}, \frac{\overline{f_2}}{\overline{g_2}} \in K(Gr(X))_o$ с $\overline{f_i}, \overline{g_i} \in Gr(X)_{d_i}$ е в сила

$$\frac{\overline{f_1}}{\overline{g_1}} - \frac{\overline{f_2}}{\overline{g_2}} = \frac{\overline{f_1g_2 - f_2g_1}}{\overline{g_1g_2}}$$

с $\overline{f_1g_2 - f_2g_1} \in Gr(X)_{d_1+d_2}$, $\overline{g_1g_2} \in Gr(X)_{d_1+d_2}$ и

$$\frac{\overline{f_1}}{\overline{g_1}} : \frac{\overline{f_2}}{\overline{g_2}} = \frac{\overline{f_1g_2}}{\overline{f_2g_1}}$$

с $\overline{f_1g_2}, \overline{g_1f_2} \in Gr(X)_{d_1+d_2}$.

Определение 7.2. *Нека $X \subset \mathbb{P}^n$ е неприводимо проективно многообразие с поле от частни $k(Gr(X))$ на хомогенния координатен пръстен $Gr(X)$. Елементите на градуираната компонента $k(Gr(X))_o$ от степен 0 се наричат рационални функции върху $X$.*

Определение 7.3. *Квази-проективно многообразие $X$ е сечение $X = U \cap Y$ на Зариски отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{P}^n$ със Зариски затворено подмножество $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ на проективно пространство $\mathbb{P}^n$.*

Всяко афинно многообразие $X \subseteq k^n$ е квази-проективно. По-точно, реализираме афинното пространство $k^n$ като стандартно афинно подмножество $k^n \simeq U_i \subset \mathbb{P}^n$. Тогава $X$ съвпада със сечението $\overline{X} \cap U_i$ на проективната си обвивка $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ с $U_i$ и представлява квази-проективно многообразие.

Всяко проективно многообразие $X \subseteq \mathbb{P}^n$ може да се разглежда като квази-проективно.

Съществуват квази-проективни многообразия, които не са нито афинни, нито проективни. Например, ако $n \geq 2$ и $p \in \mathbb{P}^n$, то $\mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ е квази-проективно многообразие, в качеството си на сечение на Зариски отвореното $\mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ със Зариски затвореното $\mathbb{P}^n$. Но $\mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ не е нито афинно, нито проективно многообразие.

Квази-проективните многообразия $X$ са локално афинни, т.е. всяка точка $p \in X$ има афинна околност $U_p$ върху $X$.

Нека $X$ е неприводимо квази-проективно многообразие над алгебрично затворено поле $k$, а $M$ е Зариски навсякъде гъсто подмножество на $X$. Тогава идеалите $I(M) = I(X)$ съвпадат, а оттам и полетата от рационални функции $k(M) = k(X)$ съвпадат. Наистина, ако допуснем, че $M \subseteq X$ индуцира строго влагане $I(M) \supsetneqq I(X)$ на съответните идеали, то $X = VI(M) \subsetneqq VI(X) = X$, съгласно алгебричната затвореност на полето $k$. Противоречието доказва, че $I(M) = I(X)$.

Ако $X$ е приводимо квази-проективно многообразие с несъкратимо разлагане $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ в неприводими компоненти $X_i$, то естествено е да определим рационална функция $f : X \dashrightarrow k$ по такъв начин, че всички ограничения $f : X_i \dashrightarrow k$ да са рационални функции върху $X_i$. Произволни рационални функции $f_i : X_i \dashrightarrow k$ върху $X_i$ определят рационална функция $f : X \dashrightarrow k$. Нека $U_i \subseteq X_i$ са Зариски отворени, Зариски навсякъде гъсти области на регулярност на $f_i : X_i \dashrightarrow k$. Тогава $W_i = U_i \setminus (\cup_{j \neq i} X_j)$ са две по две непресичащи се Зариски отворени, Зариски навсякъде гъсти в $X_i$ области на регулярност на $f_i$ и можем да определим $f : W = \cup_{i=1}^m W_i \rightarrow k$ като $f(w) = f_i(w)$ за $\forall w \in W$. Сега $W$ е Зарски отворено и Зариски навсякъде гъсто в $X$, защото $\mathrm{ZarCl}_X(W) = \cup_{i=1}^m \mathrm{ZarCl}_X(W_i) = \cup_{i=1}^m \mathrm{ZarCl}_{X_i}(W_i) = \cup_{i=1}^m X_i = X$ и можем да разглеждаме $f$ като рационална функция върху $X$.

Определение 7.4. *Рационално изображение на неприводимо многообразие $X$ в афинно многообразие $Y \subset k^n$ е $n$-торка от рационални функции*

$$\varphi(x) = \left( \frac{\overline{f_1}}{\overline{g_1}}, \ldots, \frac{\overline{f_n}}{\overline{g_n}} \right) : X \dashrightarrow Y \subset k^n.$$

*Изображението $\varphi$ е коректно зададено върху главното Зариски отворено подмножество $U_g = \{x \in X \mid g(x) = g_1(x) \ldots g_n(x) \neq 0\}$.*

Нека $X$, $Y$ и $Z$ са квази-проективни многообразия, $X$ и $Y$ са неприводими, $Y$ и $Z$ са афинни. За произволни рационални изображения

$$\varphi = \left( \frac{\overline{f_1}}{\overline{g_1}}, \ldots, \frac{\overline{f_m}}{\overline{g_m}} \right) : X \dashrightarrow Y \subseteq k^m$$

и

$$\psi = \left( \frac{\overline{h_1}}{\overline{t_1}}, \ldots, \frac{\overline{h_n}}{\overline{t_n}} \right) : Y \dashrightarrow Z \subseteq k^n$$

да разгледаме главните Зариски отворени подмножества

$$U_g := \{x \in X \mid g(x) = g_1(x) \ldots g_m(x) \neq 0\},$$

$$V_t := \{y \in Y \mid t(y) = t_1(y) \dots t_n(y) \neq 0\}.$$

Ако $\varphi(U_g) \cap V_t \neq \emptyset$, то композицията $\psi\varphi : X \dashrightarrow Z$ е рационално изображение, което е регулярно върху $U_g \cap \varphi^{-1}(V_t)$.

Определение 7.5. *Рационално изображение на неприводимо многообразие $X$ в проективно многообразие $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ е клас на пропорционалност на $(n+1)$ рационални функции*

$$\varphi = [\varphi_0 : \varphi_1 : \ldots : \varphi_n] : X \dashrightarrow Y \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Нека $X_o \subseteq X$ е афинно, Зариски отворено, Зариски навсякъде гъсто подмножество. Тогава полетата на рационалните функции $k(X) = k(X_o)$ съвпадат и $\forall \varphi_i = \frac{\overline{f_i}}{\overline{g_i}} \in k(X_o)$ може да се представи като частно на регулярни функции $\overline{f_i}, \overline{g_i} \in k[X_o]$ върху $X_o$. Ако $\overline{g} := \overline{g_0 g_1} \ldots \overline{g_n} \in k[X_o]$, то $\overline{h_i} = \varphi_i \overline{g} \in k[X_o]$ за $\forall 0 \leq i \leq n$ и рационалното изображение

$$\varphi = [\overline{h_0} : \overline{h_1} : \ldots : \overline{h_n}] : X_o \dashrightarrow Y$$

се представя като клас на пропорционалност на $n+1$ регулярни функции $\overline{h_0}, \ldots, \overline{h_n}$ върху $X_o \subseteq X$. В частност, $\varphi$ е регулярно върху $\cup_{i=0}^{\infty} U_{h_i}$ за $U_{h_i} = \{x \in X_o \,|\, h_i(x) \neq 0\}$.

В проективната равнина $\mathbb{P}^2$ над поле $k$ да разгледаме проекцията $\pi$ през безкрайната точка $\infty = [0:0:1]$ върху проективната права

$$H_2 := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_2 = 0\}.$$

Правата $l_x$ през $\infty$ и произволна точка $x = [x_0 : x_1 : x_2]$ се задава аналитично като множеството от точки $l_x = \{[tx_0 : tx_1 : t(x_2 - 1) + 1] \mid t \in k\}$. Определяме $\pi(x) := l_x \cap H_2 = \left[\frac{x_0}{1-x_2} : \frac{x_1}{1-x_2}\right] = [x_0 : x_1]$.

Пример 7.6. *Проекцията*

$$\pi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow H_2 \simeq \mathbb{P}^1,$$
$$\pi([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 : x_1]$$

*през безкрайната точка $\infty = [0 : 0 : 1]$ е рационално изображение, което е коректно определено върху $\mathbb{P}^2 \setminus \{\infty\}$.*

Определение 7.7. *Комутативният пръстен с единица $R$ е локален, ако има единствен моксимален идеал $\mathfrak{M}$.*
*В такъв случай, полето $R/\mathfrak{M}$ се нарича поле от остатъци на $R$.*

Лема 7.8. *Комутативният пръстен с единица $R$ е локален тогава и само тогава, когато необратимите елементи на $R$ образуват идеал.*

**Доказателство:** Нека $R$ е локален пръстен с единствен максимален идеал $\mathfrak{M}$. Тогава всеки елемент $x \in \mathfrak{M}$ е необратим, защото в противен случай главният идеал $Rx = \langle x \rangle = R$ съвпада с $R$ и $\mathfrak{M} = R$ противно на определението за максимален идеал. Обратно, ако $x \in R$ е необратим, то главният идеал $Rx = \langle x \rangle \subsetneqq R$ е собствен и съгласно Лема 4.3 се влага в максимален идеал на $R$. Докалкото $\mathfrak{M}$ е единственият максимален идеал на $R$, оттук получаваме $Rx \subseteq \mathfrak{M}$ и, в частност, $x \in \mathfrak{M}$. Следователно множеството на необратимите елементи на локалния пръстен $R$ съвпада с максималния идеал $\mathfrak{M}$ на $R$.

Нека множеството на необратимите елементи на $R$ е идеал $I \triangleleft R$. Понеже $1 \notin I$, идеалът $I$ е собствен. Още повече, $I$ е максимален идеал, защото $\forall x \in R \setminus I$ има обратен $x^{-1} \in R$ и $I + Rx = R$. Всеки друг максимален идеал $\mathfrak{M}_1$ на $R$ се състои от необратими елементи съгласно $\mathfrak{M}_1 \neq R$. Максималността на $\mathfrak{M}_1$ и включването $\mathfrak{M}_1 \subseteq I \neq R$ водят до съвпадание $\mathfrak{M}_1 = I$. Следователно $I$ е единственият максимален идеал на $R$ и $R$ е локален пръстен, Q.E.D.

Нека $X$ е неприводимо афинно многообразие. За да въведем локалния пръстен $\mathcal{O}_{Y,X}$ на неприводимо подмногообразие $Y \subseteq X$ да отбележим, че идеалът на $Y$ в $k[x_1, \ldots, x_n]$ съдържа идеала на $X$, $I(X) \subseteq I(Y)$. При това, $I(Y) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е прост идеал тогава и само тогава, когато факторът $I(Y)/I(X) \triangleleft k[X]$ е прост идеал в афинния координатен пръстен $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$. За целта е достатъчно да напомним, че

$$k[x_1, \ldots, x_n]/I(Y) \simeq k[X]/[I(Y)/I(X).$$

По този начин, неприводимите подмногообразия $Y \subseteq X$ имат прости идеали $I_X(Y) = I(Y)/I(X) \triangleleft k[X]$. Допълнението $k[X] \setminus I_X(Y)$ е мултипликативно затворено подмножество. Локализацията на $k[X]$ по $k[X] \setminus I_X(Y)$ се бележи с $\mathcal{O}_{Y,X}$ и се нарича локален пръстен на $Y$. Пръстенът $\mathcal{O}_{Y,X}$ е локален, защото множеството на необратимите му елементи $(k[X] \setminus I_X(Y))^{-1} I_X(Y) = I_X(Y)\mathcal{O}_{Y,X}$ е идеал в $\mathcal{O}_{Y,X}$. От друга страна, $\mathcal{O}_{Y,X}$ е област в качеството си на подпръстен на полето на рационалните функции $k(X)$. Твърдим, че пръстенът $\mathcal{O}_{Y,X}$ е ньотеров. По-точно, всеки идеал $J \triangleleft \mathcal{O}_{Y,X}$ пресича афинния координатен пръстен на $X$ в идеал $I = J \cap k[X] \triangleleft k[X]$. Твърдим, че $J = I\mathcal{O}_{Y,X}$. Включването $I\mathcal{O}_{Y,X} \subseteq J$ е ясно. Обратно, ако $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in J$ с $\overline{f} \in k[X]$, $\overline{g} \in k[X] \setminus I_X(Y)$, то $\overline{f} = \left(\frac{\overline{f}}{\overline{g}}\right) \overline{g} \in J \cap k[X] = I$ и $\frac{1}{\overline{g}} \in \mathcal{O}_{Y,X}$. Следователно $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} = \overline{f}\left(\frac{1}{\overline{g}}\right) \in I\mathcal{O}_{Y,X}$ и $I\mathcal{O}_{Y,X} = J$. Сега за всеки идеал $J \triangleleft \mathcal{O}_{Y,X}$, идеалът $I = J \cap k[X] \triangleleft k[X]$ е породен от краен брой свои елементи $\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_m} \in k[X]$, защото крайнопородената $k$-алгебра $k[X]$ е ньотеров пръстен. В резултат, идеалът

$$J = I\mathcal{O}_{Y,X} = \langle \overline{h_1}, \ldots, \overline{h_m} \rangle_{k[X]} \mathcal{O}_{Y,X} = \langle \overline{h_1}, \ldots, \overline{h_m} \rangle_{\mathcal{O}_{Y,X}}$$

е крайнопороден и областта $\mathcal{O}_{Y,X}$ е ньотерова. С това установихме, че локалният пръстен $\mathcal{O}_{Y,X}$ на неприводимо подмногообразие $Y \subseteq X$ е локална ньотерова област с максимален идеал $I_X(Y)\mathcal{O}_{Y,X}$.

В частност, нека $p \in X$ е точка от неприводимо афинно многообразие $X \subseteq k^n$, която отговаря на максималния идеал $\mathfrak{M}_p \triangleleft k[X]$ в афинния координатен пръстен $k[X]$ на $X$. Тогава локализацията на $k[X]$ по мултипликативно затвореното подмножество $k[X] \setminus \mathfrak{M}_p$ е локалният пръстен $\mathcal{O}_{p,X}$ на точката $p \in X$. Максималният идеал $\mathfrak{M}_{p,X} = \mathfrak{M}_p \mathcal{O}_{p,X}$ на $\mathcal{O}_{p,X}$ се състои от рационалните функции върху $X$, които са коректно определени и се анулират в $p$.

Твърдение 7.9. *Ако $X$ е неприводимо афинно многообразие над алгебрично затворено поле $k$, то сечението*

$$\cap_{p \in X} \mathcal{O}_{p,X} = k[X]$$

*на локалните пръстени $\mathcal{O}_{p,X}$ на всички точки $p \in X$ съвпада с афинния координатен пръстен $k[X]$ на $X$.*

**Доказателство:** По построение, $k[X] \subseteq \mathcal{O}_{p,X}$ за $\forall p \in X$. Обратното включване $\cap_{p \in X} \mathcal{O}_{p,X} \subseteq k[X]$ е еквивалентно на

$$k(X) \setminus k[X] \subseteq k(X) \setminus (\cap_{p \in X} \mathcal{O}_{p,X}) = \cup_{p \in X} \left(k(X) \setminus \mathcal{O}_{p,X}\right),$$

където $k(X)$ е полето на рационалните функции върху $X$. Нека $h \in k(X) \setminus k[X]$ и

$$\mathfrak{a} = \{\overline{g} \in k[X] \,|\, \overline{g}h \in k[X]\}.$$

Тогава $\mathfrak{a} \triangleleft k[X]$ е собствен идеал в $k[X]$, доколкото $h \notin k[X]$. Затова съществува максимален идеал $\mathfrak{M} \triangleleft k[X]$, съдържащ $\mathfrak{a}$. Съгласно Твърдение 6.3, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$ съвпада с максималния идеал $\mathfrak{M}_p$ на точка $p \in X$. Твърдим, че рационалната функция $h$ не е регулярна в точката $p$. При допускане на противното имаме $h = \frac{\overline{f}}{\overline{g}}$ за $\overline{f}, \overline{g} \in k[X]$ с $g(p) \neq 0$. Но от $\overline{f} = \overline{g}h \in k[X]$ следва $\overline{g} \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{M}_p$, така че $g(p) = 0$. Противоречието доказва, че $h \in k(X) \setminus \mathcal{O}_{p,X}$, а оттам и $\cap_{p\in X}\mathcal{O}_{p,X} = k[X]$, Q.E.D.

Определение 7.10. *Нека $\varphi : X \dashrightarrow Y$ е рационално изображение, което е регулярно върху Зариски отвореното подмножество $\emptyset \neq U \subset X$. Ако $\varphi(U)$ е Зариски навсякъде гъсто в $Y$, то $\varphi$ се нарича доминантно рационално изображение.*

Твърдение 7.11. *Нека $X$ и $Y$ са неприводими многообразия над алгебрично затворено поле $k$. Тогава доминантните рационални изображения $f : X \dashrightarrow Y$ са във взаимно еднозначно съответствие с влаганията $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ на съответните полета от рационални функции.*

**Доказателство:** Нека $f : X \dashrightarrow Y$ е доминантно рационално изображение. Твърдим, че съществуват афинни, Зариски отворени, Зариски навсякъде гъсти $X_o \subseteq X$ и $Y_o \subseteq Y$, така че $f$ се ограничава до регулярно доминантно изображение $f : X_o \to Y_o$. Наистина, нека $U \subseteq X_o$ е Зариски отворената, Зариски навсякъде гъста област на регулярност на $f$ със Зариски навсякъде гъст образ $f(U) \subseteq Y$. Избираме афинно, Зариски отворено, Зариски навсякъде гъсто в $Y$ подмножество $Y_o \subseteq f(U)$ и афинно, Зариски отворено, Зариски навсякъде гъсто подмножество $X_o \subseteq f^{-1}(Y_o) \subseteq U$. Тогава $f : X_o \to Y_o \subseteq k^m$ е регулярно изображение. За доминантността на това изображение е достатъчно да проверим включването на радикални идеали $I(f(X_o)) \subseteq I(Y_o)$ в $k[y_1, \ldots, y_m]$. Наистина, $\forall g \in I(f(X_o))$ определя $gf \in I(X_o)$ в подходящ афинен координатен пръстен. Зариски гъстотата на $X_o$ и $U$ в $X$ осигурява $I(X_o) = I(X) = I(U)$ над алгебрично затворено поле $k$. В резултат, $g \in I(f(U)) = r(I(f(U)) = IVI(f(U)) = I(Y) \subseteq I(Y_o$ и регулярното изображение $f : X_o \to Y_o$ е доминантно. Прилагайки Твърдение 6.12 (ii) получаваме, че $f^* : k[Y_o] \hookrightarrow k[X_o]$ е влагане на афинните координатни пръстени. Следователно $f^* : k(Y_o) \hookrightarrow k(X_o)$ е влагане на полетата от рационални функции. Остава да вземем прдевид, че $k(Y_o) = k(Y)$ и $k(X_o) = k(X)$, поради Зариски гъстотата на $Y_o$ в $Y$ и на $X_o$ в $X$.
Нека $\Phi : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ е влагане на полетата от рационални функции. Избираме афинно, Зариски отворено, Зариски навсякъде гъсто подмножество $Y_o \subseteq Y$ и афинни координати $y_1, \ldots, y_n$ върху $Y_o \subseteq k^n$. Нека $\Phi(\overline{y_i}) \in k(X)$ имат области на регулярност $W_i \subseteq X$, които са Зарски отворени и Зариски навсякъде гъсти в $X$. Тяхното сечение $W = \cap_{i=1}^n W_i$ е Зариски отворено и Зариски навсякъде гъсто в $X$. Избираме афинно, Зариски отворено в $X$, Зариски навсякъде гъсто подмножество $X_o \subseteq W$. Тогава $\overline{x_1} = \Phi(\overline{y_1}), \ldots, \overline{x_n} = \Phi(\overline{y_n}) \in k(X) = k(X_o)$ са регулярни функции върху $X_o$ и могат да се допълнят до система пораждащи $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{x_{n+1}}, \ldots, \overline{x_m}$ на афинния координатен пръстен $k[X_o]$ над $k$. С други думи, $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m$ са афинни координати върху $X_o$ при подходящо влагане $X_o \subseteq k^m$. Проекцията

$$\pi : X_o \longrightarrow Y_o,$$

$$\pi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$

взема стойности върху $Y_o$, защото за всеки полином $g(y_1, \ldots, y_n) \in I(Y_o) \subset k[y_1, \ldots, y_n]$ е в сила

$$g(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = g(\Phi(\overline{y_1}), \ldots, \Phi(\overline{y_n})) = \Phi(g(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n})) = \Phi(\overline{0}) = \overline{0}.$$

Индуцираният хомоморфизъм

$$\pi^* : k[Y_o] \longrightarrow k[X_o],$$

$$\pi^*(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}) = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = (\Phi(\overline{y_1}), \ldots, \Phi(\overline{y_n}))$$

действа като $\Phi$ върху пораждащите $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}$ на $k[Y_o] = k[\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}]$. Следователно $\pi^* \equiv \Phi : k[Y_o] \to k[X_o]$ съвпада с $\Phi$ и, в частност, $\pi^*$ е влагане на афинните координатни пръстени. Съгласно Твърдение 6.12 (ii), проекцията $\pi : X_o \to Y_o$ е доминантно регулярно изображение. Твърдим, че индуцираното рационално изображение $\pi : X \dashrightarrow Y$ е доминантно. Нека $Z = \mathrm{ZarCl}_Y(\pi(X_o))$ е Зариски затворената обвивка на образа $\pi(X_o)$ на $X_o$ в $Y$. Тогава $Y_o = \mathrm{ZarCl}_{Y_o}\pi(X_o) = Z \cap Y_o$ показва, че $Y_o \subseteq Z$, така че $Y = \mathrm{ZarCl}_Y(Y_o) \subseteq \mathrm{Zar_{Cl}}Y(Z) = Z$ и $Y = Z$. Следователно $\pi : X \dashrightarrow Y$ е доминантно рационално изображение.
За взаимната еднозначност на съответствието между доминантните рационални изображения $f : X \dashrightarrow Y$ и влаганията $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ на полетата от рационални функции, да отбележим, че доминантните рационални изображения $f : X \dashrightarrow Y$ са във взаимно еднозначно съответствие с доминантните регулярни изображение $f : X_o \to Y_o$ на афинни, Зарски отворени, Зариски навсякъде гъсти $X_o \subseteq X$ и $Y_o \subseteq Y$. Доминантните регулярни изображение $f : X_o \to Y_o$ на афинни многообразия отговарят на влаганията $f^* : k[Y_o] \hookrightarrow k[X_o]$ на афинните координатни пръстени, а те от своя страна съответстват на влаганията $f^* : k(Y) = k(Y_o) \hookrightarrow k(X_o) = k(X)$ на полетата от рационални функции, Q.E.D.

Определение 7.12. *Изображението $\varphi : X \dashrightarrow Y$ се нарича бирационално, ако $\varphi$ е рационално и съществува рационално изображение $\psi : Y \dashrightarrow X$, така че $\psi\varphi : X \dashrightarrow X$ и $\varphi\psi : Y \dashrightarrow Y$ са коректно определени рационални изображения и съвпадат с $\mathrm{Id}_X$, съответно с $\mathrm{Id}_Y$.*
*Многообразията $X$ и $Y$ са бирационални, ако съществува бирационално изображение $X \dashrightarrow Y$.*

Твърдение 7.13. *Следните условия са еквивалентни за неприводимите многообразия $X$ и $Y$ над алгебрично затворено поле $k$:*
*(i) $X$ и $Y$ са бирационални;*
*(ii) полетата от рационални функции $k(Y) \simeq k(X)$ са изоморфни;*
*(iii) съществуват непразни Зариски отворени подмножества $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$, които са бирегулярни.*

**Доказателство:** $(i) \Rightarrow (iii)$ Нека $f : X \dashrightarrow Y$ е бирационално изображение, т.е., съществува рационално изображение $g : Y \dashrightarrow X$ с $gf = \mathrm{Id}_X$ и $fg = \mathrm{Id}_Y$. Нека $U \subseteq X$ е Зариски отворената, Зарски навсякъде гъста област на регулярност на $f$, а $V \subseteq Y$ е Зариски отворената, Зариски навсякъде гъстата област на регулярност на $g$. Тогава $g(V) = f^{-1}(V)$ и $f(U) = g^{-1}(U)$, така че $U \cap g(V) = U \cap f^{-1}(V) \subseteq X$ и $V \cap f(U) = V \cap g^{-1}(U) \subseteq Y$ са Зариски отворени, Зариски навсякъде гъсти и регулярните изображения

$$f : U \cap g(V) \longrightarrow f(U) \cap V,$$

$$g : V \cap f(U) \longrightarrow g(V) \cap U$$

са взаимно обратни. Следователно $U \cap g(V)$ и $V \cap f(U)$ са бирегулярни.
$(iii) \Rightarrow (i)$ е ясно по определението за рационално изображение.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Всяко бирационално изображение $f : X \dashrightarrow Y$ е доминантно, защото във въведените означения, Зариски отвореното, Зариски навсякъде гъстото подмножество $U \cap f^{-1}(V)$ се изобразява в Зариски отвореното, Зариски навсякъде гъстото подмножество $f(U \cap f^{-1}(V)) = g^{-1}(U) \cap V \subseteq Y$. Съгласно Твърдение 7.11, $f$ и $g$ индуцират влагания $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ и $g^* : k(X) \hookrightarrow k(Y)$ на съответните полета от рационални функции. В резултат получаваме $g^*f^* = (fg)^* = \mathrm{Id}_Y^* = \mathrm{Id}_{k(Y)}$, $f^*g^* = (gf)^* = \mathrm{Id}_X^* = \mathrm{Id}_{k(X)}$ и стигаме до извода, че полетата от рационални функции $k(Y) \simeq k(X)$ са изоморфни.

За $(ii) \Rightarrow (i)$ да предположим, че $\Phi : k(Y) \to k(X)$ е изоморфизъм на полета. Прилагайки Твърдение 7.11 получаваме доминантни рационални изображения $f : X \dashrightarrow Y$ и $g : Y \dashrightarrow X$ с $f^* = \Phi$, $g^* = \Phi^{-1}$. Сега от $(fg)^* = g^* f^* = \Phi^{-1}\Phi = \mathrm{Id}_{k(Y)} = \mathrm{Id}_Y^*$, $(gf)^* = f^* g^* = \Phi\Phi^{-1} = \mathrm{Id}_{k(X)} = \mathrm{Id}_X^*$ следва $fg = \mathrm{Id}_Y$, $gf = \mathrm{Id}_X$ и $f : X \dashrightarrow Y$, $g : Y \dashrightarrow X$ са бирационални изображения, Q.E.D.
Локалният пръстен на точка носи не само локална, но и глобална информация, както се вижда от следното

Лема 7.14. *Нека $k$ е алгебрично затворено поле, $X$ и $Y$ са неприводими афинни многообразия над $k$ и $p \in X$, $q \in Y$ са точки. Тогава следните условия са еквивалентни:*
*(i) локалните пръстени $\mathcal{O}_{q,Y} \simeq \mathcal{O}_{p,X}$ са изоморфни;*
*(ii) съществуват околност $U$ на $p$, околност $V$ на $q$ и бирегулярно изображение $\varphi : U \to V$ с $\varphi(p) = q$.*
*В частност, ако $\mathcal{O}_{p,X}$ и $\mathcal{O}_{q,Y}$ са изоморфни, то афинните многообразия $X$ и $Y$ са бирационални.*

**Доказателство:** $(i) \Rightarrow (ii)$ Нека $\Phi : \mathcal{O}_{q,Y} \to \mathcal{O}_{p,X}$ е изоморфизъм на локалните пръстени. Съответните полета от рационални функции $k(X)$ и $k(Y)$ могат да се разглеждат като полета от частни на $\mathcal{O}_{p,X}$, съответно на $\mathcal{O}_{q,Y}$, така че изоморфизмът на локалните пръстени индуцира изоморфизъм на полета $\Phi : k(Y) \to k(X)$. Както в доказателството на Твърдение 7.11, да изберем афинни координате $y_1, \dots, y_n$ върху $Y$. Тогава $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n} \in k[Y] \subset \mathcal{O}_{q,Y}$ се изобразяват във $\Phi(\overline{y_1}), \dots, \Phi(\overline{y_n}) \in \mathcal{O}_{p,X}$. С други думи, рационалните функции $\Phi(\overline{y_i})$ върху $X$ са регулярни в $p$. Ако $W_i \subseteq X$ е областта на регулярност на $\Phi(\overline{y_i})$ и $X_o = \cap_{i=1}^n W_i$, то $p \in X_o$. Допълваме регулярните функции $\overline{x_1} = \Phi(\overline{y_1}), \dots, \overline{x_n} = \Phi(\overline{y_n}) \in k[X_o]$ върху $X_o$ до афинни координати $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m$ и разглеждаме проекцията

$$\pi : X_o \longrightarrow Y,$$

$$\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots x_m) = (x_1, \dots, x_n).$$

Тогава $\pi$ е регулярно доминантно изборажение, което индуцира хомоморфизма $\pi^* \equiv \Phi : k[Y] \to k[X_o]$ и хомоморфизма $\pi^* \equiv \Phi : k(Y) \to k(X_o)$. Зариски гъстотата на $X_o$ в $X$ дава $k[X_o] = k[X]$ и $k(X_o) = k(X)$. Влагането $\pi^* \equiv \Phi : k[Y] \to k[X]$ е изоморфизъм, защото в противен случай $\emptyset \neq k[X] \setminus \Phi(k[Y]) \subseteq k(X) \setminus \Phi(k(Y)) = \emptyset$. За бирегулярността на $\pi : X_o \to \pi(X_o)$ е достатъчно да отбележим, че съответните хомоморфизми на афинните координатни пръстени $\pi^* \equiv \Phi : k[\pi(X_o)] \to k[X_o]$ е изоморфизъм. Причина за това е Зариски гъстотата на $\pi(X_o)$ в $Y$, която води до $k[Y] = k[\pi(X_o)]$. Остава да проверим, че $\pi(p) = q$. За целта използваме, че изоморфизмът $\Phi : \mathcal{O}_{q,Y} \to \mathcal{O}_{p,X}$ на локалните пръстени се ограничава до изоморфизъм на мултипликативните групи

$$\Phi : \mathcal{O}_{q,Y}^* = \mathcal{O}_{q,Y} \setminus \mathfrak{M}_{q,Y} \longrightarrow \mathcal{O}_{p,X} \setminus \mathfrak{M}_{p,X} = \mathcal{O}_{p,X}^*.$$

Оттук получаваме изоморфизъм на максималните идеали $\Phi : \mathfrak{M}_{q,Y} \to \mathfrak{M}_{p,X}$. Ако $\mathfrak{M}_p \triangleleft k[X]$ и $\mathfrak{M}_q \triangleleft k[Y]$ са максималните идеали на $p$ и $q$ в съответните афинни координатни пръстени, то ограничението

$$\pi^* = \Phi : \mathfrak{M}_q = \mathfrak{M}_{q,Y} \cap k[Y] \longrightarrow \mathfrak{M}_{p,X} \cap k[X] = \mathfrak{M}_p$$

е изоморфизъм. Това доказва $\pi(p) = q$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Всяко бирегулярно изображение $f : U \to V$ на околност $U$ на $p$ върху $X$ и околност $V$ на $q$ върху $Y$ индуцира изоморфизъм $f^* : k[V] \to k[U]$ на афинните координатни пръстени. Той се ограничава до изоморфизъм $f^*$ :

$\mathfrak{M}'_q \to \mathfrak{M}'_p$ на максималния идеал $\mathfrak{M}'_q$ на $q$ в $k[V]$ с максималния идеал $\mathfrak{M}'_p$ на $p$ в $k[U]$ и индуцира изоморфизъм

$$f^* : \mathcal{O}_{q,V} = (k[V] \setminus \mathfrak{M}'_q)^{-1} k[V] \longrightarrow (k[U] \setminus \mathfrak{M}'_p)^{-1} k[U] = \mathcal{O}_{p,U}$$

на локални пръстени. От друга страна, Зариски гъстотата на $U$ в $X$ и на $V$ в $Y$ води до съвпадение на идеалите $I(U) = I(X)$ и $I(V) = I(Y)$. Следователно афинните координатни пръстени $k[U] = k[X]$ и $k[V] = k[Y]$ съвпадат, както и максималните идеали $\mathfrak{M}'_p = \mathfrak{M}_p \triangleleft k[X]$ и $\mathfrak{M}'_Q = \mathfrak{M}_q \triangleleft k[Y]$. В резултат, локалните пръстени $\mathcal{O}_{p,X} = (k[X] \setminus \mathfrak{M}_p)^{-1} k[X] = \mathcal{O}_{p,U}$ и $\mathcal{O}_{q,Y} = (k[Y] \setminus \mathfrak{M}_Q)^{-1} k[Y] = \mathcal{O}_{q,V}$ съвпадат и изоморфизма $f^* : \mathcal{O}_{q,Y} \to \mathcal{O}_{p,X}$, Q.E.D.

Определение 7.15. *Нека $f : X \dashrightarrow Y$ е рационално изображение на афинни неприводими многообразия $X \subseteq k^n$, $Y \subseteq k^m$, $U \subseteq X$ е областта на регулярност на $f$, а*

$$\Gamma_f^U = \{(x, f(x)) \,|\, x \in U\}.$$

*Тогава Зариски затворената обвивка*

$$\Gamma_f = \mathrm{ZarCl}_{X \times Y}(\Gamma_f^U)$$

*се нарича график на $f$.*

Първата канонична проекция $\pi_1 : \Gamma_f \to X$ е затворено изображение относно топологията на Зариски. По-точно, всяко Зариски затворено подмножество $V(I) \subseteq \Gamma_f$, определено от идеал $I \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ се изобразява в Зариски затвореното подмножество $\pi_1(V(I)) = V(I \cap k[x_1, \ldots, x_n]) \subseteq X$. В частност, $\Gamma_f$ се трансформира върху единственото Зариски затворено подмножество $X$ на $X$, съдържащо $U$.
Освен това, $\pi_1 : \Gamma_f \to X$ е бирационално, защото $\pi_1 : \Gamma_f^U \to U$ е бирегулярно и $\Gamma_f^U$ е Зариски гъсто в $\Gamma_f$, $U$ е Зариски гъсто в $X$.
По този начин, всяко рационално изображение $f : X \dashrightarrow Y$ на неприводими афинни многообразия може да се изучава с точност до бирационалност чрез регулярната проекция $\pi_2 : \Gamma_f \to Y$, която има едни и същи слоеве с $f$ над $f(U)$.

$$\begin{tikzcd} \Gamma_f \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "Id_Y"'] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} .$$

Твърдим, че $\Gamma_f$ е неприводимо. Наистина, ако $\Gamma_f = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ е обединение на Зариски затворени $\Gamma_i \subseteq \Gamma_f$, то $X = \pi_1(\Gamma_f) = \pi_1(\Gamma_1) \cup \pi_1(\Gamma_2)$ за Зариски затворени $\pi_1(\Gamma_i) \subseteq X$. Съгласно неприводимостта на $X$ получаваме $X = \pi_1(\Gamma_i)$ за $i = 1$ или 2. Но тогава всеки слой $\pi_1^{-1}(p)$ над $p \in U$ пресича $\Gamma_i$. Понеже $\pi_1^{-1}(p)$ се състои от единствена точка, $\pi_1^{-1}(p)$ се съдържа в $\Gamma_i$ или $\pi_1^{-1}(U) = \Gamma_f^U \subseteq \Gamma_1$. Оттук получаваме $\Gamma_f = \mathrm{ZarCl}_{X \times Y}(\Gamma_f^U) \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_f$, т.е. $\Gamma_f = \Gamma_1$.
За изучаване на крайните доминантни изображения са необходими някои сведения за алгебрични разширения на полета. Те са изложени в Приложение 2.
Ще казваме, че свойство $P$ е изпълнено в обща точка на квази-проективно многообразие $X$, ако съществува собствено, Зариски зотворено подмножество $Y \subset X$, така че $P$ е изпълнено за $\forall x \in X \setminus Y$.

Твърдение 7.16. *Нека $X$ и $Y$ са неприводими квази-проективни многообразия над алгебрично затворено поле $k$, а $f : X \dashrightarrow Y$ е доминантно рационално изображение с област на регулярност $U \subseteq X$. В такъв случай :*

*(i) слоят на $f : X \dashrightarrow Y$ над обща точка на $f(U)$ е краен тогава и само тогава, когато при влагането $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ на полетата от рационални функции, $k(X)$ е крайно разширение на $f^*k(Y)$;*
*(ii) ако $\mathrm{char}(k) = 0$, то броят на точките в общ слай на $f : X \dashrightarrow Y$ съвпада със степента $[kX) : f^*k(Y)] := \dim_{f^*k(Y)}(k(X))$.*

**Доказателство:** Както в доказателството на Твърдение 7.11, без ограничение на общността можем да предполагаме, че $f : X_o \to Y_o$ е регулярно доминантно изображение на афинни, Зариски отворени, Зариски навсякъде гъсти подмножества $X_o \subseteq X$ и $Y_o \subseteq Y$. С точност до бирационалност можем да заменим $f : X_o \to Y_o$ с втората канонична проекция

$$\pi_2 : \Gamma_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X_o\} \longrightarrow Y_o$$

на графика $\Gamma_f$.
Ако $Y_o \subseteq k^n$ и $X_o \subseteq k^{m-n}$, то $\Gamma_f \subseteq k^m$. За $\forall 1 \leq i \leq m-n$ полагаме

$$\Pi_i : k^{m-i+1} \longrightarrow k^{m-i},$$

$$\Pi_i(x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = (x_{i+1}, \dots, x_m)$$

да е проекцията върху последните $m-i$ координати. Да разгледаме също тъждественото влагане $\varepsilon_o : \pi_2(\Gamma_f) \hookrightarrow Y_o$. Тогава $\pi_2 = \varepsilon_o \Pi_{m-n} \dots \Pi_2 \Pi_1$. Твърдим, че многообразията $\Pi_i \dots \Pi_2 \Pi_1(\Gamma_f)$ за $\forall 1 \leq i \leq m-n$ и $\pi_2(\Gamma_f)$ са неприводими. По-общо, образът на неприводимо многоборазие $Z$ под действие на регулярно изображение $g : Z \to g(Z)$ е неприводим. Причина за това е непрекъснатостта на регулярните изображения относно топологията на Зариски. По-точно, ако $g(Z) = Z_1 \cup Z_2$ е разлагане в обединение на Зарски затворени подмножества $Z_i \subseteq g(Z)$, то $g^{-1}(Z_i) = Z$ за някое $1 \leq i \leq 2$. В резултат, $g(Z) = Z_i$ е неприводимо.
Понеже броят на точките в общ слой и степента на разширение са мултипликативни относно композиция, достатъчно е да докажем твърдението за $\Pi_i$ и за $\varepsilon_o$.
Доминантността на $f : X_o \to Y_o$ влече доминантността на $\pi_2 : \Gamma_f \to Y_o$, така че образът $\pi_2(\Gamma_f)$ е Зариски навсякъде гъст в $Y_o$. Следователно $\varepsilon_o : \pi_2(\Gamma_f) \hookrightarrow Y_o$ е бирационално изображение и индуцира изоморфизъм $\varepsilon_o^* : k(Y_o) \to k(\pi_2(\Gamma_f))$ на полетата от рационални функции. Общият слой на $\varepsilon_o$ се състои от единствена точка.
Да означим накратко $Z := \Pi_{i-1} \dots \Pi_2 \Pi_1(\Gamma_f)$,$S = \Pi_i(Z)$ и да разгледаме проектирането $\Pi_i : Z \to S$ върху последните $m-i$ координати, $\Pi_i(x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = (x_{i+1}, \dots, x_m)$. Влагането $\Pi_i^* : k(S) \hookrightarrow k(Z)$ на полетата от рационални функции действа тъждествено върху $k(S)$ и представя $k(Z)$ като просто разширение $k(Z) = k(S)(\overline{x_i})$. Слоят

$$\Pi_i^{-1}(s) \simeq \{x_i \in k \,|\, f(s, x_i) = 0 \ \text{ за } \ \forall f \in I(Z) \triangleleft k[x_{i+1}, \dots, x_m][t]\}$$

над $s = (s_{i+1}, \dots, s_m) \in S$ е Зариски затворено подмножество на афинната права $k$. Можем да представим

$$\Pi_i^{-1}(s) \simeq \{x_i \in k \,|\, g(s, x_i) = 0 \ \text{ за } \ \forall g \in (I(Z)/I(S)) \subset k[S][t] \subset k(S)[t]\}.$$

Всеки идеал в $k(S)[t]$ е главен, така че $I(Z)/I(S) = \langle G \rangle \triangleleft k(S)[t]$ и

$$\Pi_i^{-1}(s) \simeq x_i \in k \,|\, G(s, x_i) = 0\}.$$

Ако $G \not\equiv 0 \in k(S)[t]$, то $\overline{x_i}$ е алгебрично над $k(S)$ и $G$ е минималният полином на $\overline{x_i}$ над $k(S)$. Слоевете $\Pi_i^{-1}(s)$ над обща точка $s \in S$ имат най-много $d = \deg(G)$ елемента. Степента $[k(Z) = k(S)(\overline{x_i}) = k(S)[\overline{x_i}] : k(S)] = d$. В частност, за $\mathrm{char}(k) = 0$, полиномът $G$ няма кратни корени върху слоя $\pi_i^{-1}(s)$ над обща

точка $s \in S$. Следователно общите слоеве $\Pi_i^{-1}(s)$ се състоят от $d = \deg(G)$ точки.
Ако $G \equiv 0 \in k(S)[t]$, то $\overline{x_i}$ е трансцендентно над $k(S)$ и всички слоеве $\Pi_i^{-1}(s) \simeq k$ са афинни прави. Алгебрично затвореното поле $k$ е безкрайно, така че всички $\Pi_i^{-1}(s)$ са безкрайни множества. Твърдим, че $[k(Z) = k(S)(\overline{x_i}) : k(S)] = \infty$. В противен случай, ако $[k(S)(\overline{x_i}) : k(S)] = l < \infty$, то $\overline{1}, \overline{x_i}, \ldots, \overline{x_i}^l$ са линейно зависими над $k(S)$ и $\overline{x_i}$ е алгебрично над $k(S)$. По този начин установихме, че слоят $\Pi_i^{-1}(s)$ над обща точка $s \in S$ е краен тогава и само тогава, когато $\overline{x_i}$ е алгебрично над $k(S)$, а последното е еквивалентно на крайност на степента $[k(Z) : k(S)]$, Q.E.D.

## Приложение 1:
## еднозначно разлагане на полиноми на няколко променливи.

Определение 7.17. *Ненулевият елемент $r$ на комутативен пръстен с единица $R$ се нарича неразложим, ако $r \notin R^*$ не е обратим и във всяко разлагане $r = st$ в произведение на $s, t \in R$ поне единият от множителите $s$ или $t$ е обратим в $R$.*

Определение 7.18. *Комутативният пръстен с единица $R$ се нарича факториален, ако $\forall r \in R \setminus R^*$ има единствено (с точност до множител от $R^*$) разлагане $r = r_1 \dots r_k$ в крайно произведение на неразложими $r_i \in R \setminus R^*$.*

Лема 7.19. (Достатъчни условия за факториалност)
*(i) В ньотерова област $R$ всеки елемент $r$ има (необезателно единствено с точност до множител от $R^*$) разлагане в крайно произведение $x = x_1 \dots x_k$ на неразложими $r_i \in R$.*
*(ii) Ньотеровата област $R$ е факториална тогава и само тогава, когато всеки неразложим $s \in R$ поражда прост идеал $sR \triangleleft R$.*

**Доказателство:** (i) Да допуснем противното. Ако $r \in R$ е необратим елемент без крайно разлагане в произведение от неразложими, то $r = r_1$ не е неразложим и съществува разлагане $r_1 = r_2 r_2'$ в произведение на $r_2, r_2' \in R \setminus R^*$. Поне единият от множителите, например $r_2$, не се разлага в крайно произведение от неразложими. Продължавайки по същия начин получаваме безкрайна редица $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ от необратими елементи, които не се разлагат в крайно произведение от неразложими и $r_{n+1}$ дели $r_n$ за $\forall n \in \mathbb{N}$. Съответните главни идеали $r_n R$ образуват безкрайна ненамаляваща редица

$$r_1 R \subseteq r_2 R \subseteq \dots \subseteq r_n R \subseteq r_{n+1} R \subseteq \dots .$$

Твърдим, че тази редица е строго растяща. Наистина, от равенството $r_n R = r_{n+1} R$ следва $r_{n+1} = r_n s$ за някое $s \in R$. Замествайки в $r_n = r_{n+1} r_{n+1}'$ получаваме, че $r_n - r_n s r_{n+1}' = r_n(1 - s r_{n+1}') = 0$. Доколкото $R$ е област и $r_n \neq 0$, последното е равносилно на $1 = s r_{n+1}'$. Това означава, че $r_{n+1}' \in R^*$, противно на избора на $r_{n+1}' \in R \setminus R^*$. Наличието на безкрайна строго растяща редица от идеали

$$r_1 R \subset r_2 R \subset \dots \subset r_n R \subset r_{n+1} R \subset \dots$$

противоречи на ньотеровостта на $R$ и доказва съществуването на крайно разлагане на всяко $r \in R$ в произведение от неразложими.
(ii) Нека ньотеровата област $R$ е факториална, $s \in R$ е неразложим елемент, а $uv \in sR$. Тогава съществува $r \in R$, така че $uv = sr$ и $s$ (с точност до множител от $R^*$) участва в разлагането на $u$ или $v$. Ако $u = st$, то $u \in sR$ и идеалът $sR$ е прост.
Нека всеки неразложим в $R$ елемент поражда прост идеал и

$$r = r_1 r_2 \dots r_m = s_1 s_2 \dots s_n \quad \text{за } m \geq n$$

са две крайни разлагания на $r \in R \setminus R^*$ в произведение на неразложими $r_i, s_j$. От $r_1 \dots r_m \in s_1 R$ и простотата на $s_1 R \triangleleft R$ следва, че след евентуално преномериране $r_1 \in s_1 R$. Ако $r_1 = s_1 t_1$ за $t_1 \in R$, неразложимостта на $r_1$ изисква $t_1 \in R^*$. Следователно

$$r_1 r_2 \dots r_m - s_1 s_2 \dots s_n = s_1(t_1 r_2 \dots r_m - s_2 \dots s_n) = 0,$$

където неразложимият елемент $s_1 \neq 0$. Следователно $(t_1 r_2) \dots r_m = s_2 \dots s_n$. Продължаваме по същия начин докато получим съвпадение на $r_i$ и $s_i$ с точност до обратим елемент на $R$ и $m = n$, Q.E.D.

Определение 7.20. *Нека $R$ е факториална ньотерова област, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са елементи на $R$, а $\{p_1, \ldots, p_k\}$ е обединението на неразложимите делители на $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Тогава $\forall a_i = u_i \prod_{j=1}^{k} p_j^{m_{ij}}$ за $u_i \in R^*$, $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и определяме най-големия общ делител*

$$d(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\min(m_{0j}, m_{1j}, \ldots m_{nj})}$$

*с точност до обратим в $R$ множител.*
*Ако $d(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^*$, ще казваме, че $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са взаимно прости.*

Определение 7.21. *Нека $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ е полином с коефициенти от факториална ньотерова област $R$. Бележим с*

$$d(f) = d(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

*най-големия общ делител на коефициентите на $f(x)$.*
*Ако $d(f) \in R^*$, то полиномът $f(x)$ се нарича примитивен.*

Лема 7.22. (Гаус) *Ако $R$ е факториална ньотерова област и $f(x), g(x) \in R[x]$, то*

$$d(fg) = d(f)d(g).$$

*В частност, произведението на примитивни полиноми е примитивен полином.*

**Доказателство:** Достатъчно е да докажем твърдението за примитивни полиноми. Наистина, произволни полиноми $f(x), g(x) \in R[x]$ се представят във вида $f(x) = d(f) f_1(x)$, $g(x) = d(g) g_1(x)$ чрез примитивни $f_1(x), g_1(x) \in R[x]$. Ако сме установили, че $f_1(x) g_1(x)$ е примитивен, то най-големият общ делител $d(fg)$ на коефициентите на $f(x)g(x) = d(f)d(g) f_1(x) g_1(x)$ е точно $d(fg) = d(f)d(g)$.
За примитивни полиноми $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ и $g(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0 \in R[x]$ да допуснем, че $f(x)g(x) \in R[x]$ не е примитивен. За произволен неразложим общ делител $p$ на коефициентите на $f(x)g(x)$ да означим с $i$ минималното неотрицателно цяло число, за което $p$ не дели $a_i$. Аналогично, нека $j$ е минималното неотрицателно цяло число, за което $p$ не дели $b_j$. Съществуването на $i$ и $j$ се осигурява от примитивността на $f(x)$, съответно, $g(x)$. Коефициентът $c_{i+j}$ на $x^{i+j}$ в $f(x)g(x)$ е равен на

$$c_{i+j} = a_i b_j + \sum_{s=1}^{\min(i, n-j)} a_{i-s} b_{j+s} + \sum_{s=1}^{\min(j, m-i)} a_{i+s} b_{j-s}$$

и се дели на $p$. Съгласно избора на $i$, коефициентите $a_{i-s}$ с $s \geq 1$ се делят на $p$. Аналогично, $b_{j-s}$ с $s \geq 1$ се делят на $p$, откъдето $p$ дели и $a_i b_j$. С други думи, $a_i b_j$ попада в простия идеал $pR$ на факториалната област $R$, породен от неразложимия елемент $p \in R$. Оттук следва, че $a_i \in pR$ или $b_j \in pR$, което противоречи на избора на $a_i$ и $b_j$. По този начин получаваме, че произведението на примитивни полиноми $f(x), g(x) \in R[x]$ е примитивен полином $f(x)g(x) \in R[x]$, Q.E.D.

Следствие 7.23. *Нека $R$ е факториална ньотерова област, $f(x)$ и $g(x) \not\equiv 0$ са полиноми с коефициенти от $R$, а $0 \neq r \in R$. Ако $f(x)$ е примитивен полином, делящ $rg(x)$, то $f(x)$ дели $g(x)$.*

**Доказателство:** Ако $rg(x) = f(x)h(x)$ за някакъв полином $h(x)$, то по Лема 18 (Гаус)

$$rd(g) = d(rg) = d(fh) = d(f)d(h) = d(h)$$

с точност до обратим елемент на $R$. След представяне на $g(x) = d(g)g_1(x)$ и $h(x) = d(h)h_1(x)$ чрез примитивни полиноми $g_1(x), h_1(x) \in R[x]$ получаваме, че $rd(g)[g_1(x) - f(x)h_1(x)] = 0$. Но $R$, а оттам и $R[x]$ са области, така че $g_1(x) = f(x)h_1(x)$. В резултат, $g(x) = f(x)d(g)h_1(x)$ и $f(x)$ дели $g(x)$, Q.E.D.

Теорема 8. *Ако $R$ е факториална ньотерова област, то пръстенът на полиномите $R[x]$ е също факториална ньотерова област.*

**Доказателство:** Съгласно критерия за факториалност на ньотерова област (Лема 15 (ii)), достатъчно е да докажем, че всеки неразложим елемент $p(x) \in R[x]$ поражда прост идеал $\langle p(x)\rangle_{R[x]}$ в $R[x]$.
Ако $\deg p(x) = 0$, то $p \in R$ е неразложим и в $R$. Предположението $f(x)g(x) \in \langle p\rangle_{R[x]}$ е еквивалентно на $f(x)g(x) = ph(x)$ за някакъв полином $h(x) \in R[x]$. Най-големите общи делители на коефициентите

$$d(f)d(g) = d(fg) = d(ph) = pd(h),$$

така че $d(f)d(g) \in \langle p\rangle_R$ е от простия идеал в $R$, породен от $p$. Следователно $d(f) \in \langle p\rangle_R$ или $d(g) \in \langle p\rangle_R$, откъдето $f(x) = d(f)f_1(x) \in \langle p\rangle_{R[x]}$ или, съответно, $g(x) = d(g)g_1(x) \in \langle p\rangle_{R[x]}$.
Ако $\deg p(x) \geq 1$, то неразложимият полином $p(x)$ е обезателно примитивен. Наистина, разлагайки $p(x) = d(p)p_1(x)$ в произведение на най-големия общ делител $d(p)$ на коефициентите и примитивен полином $p_1(x)$, $\deg p_1(x) = \deg p(x) \geq 1$, забелязваме, че неразложимостта на $p(x)$ изисква обратимост на $d(p)$ в $R$.
Нека $f(x)g(x) \in \langle p(x)\rangle_{R[x]}$ и $f(x) \notin \langle p(x)\rangle_{R[x]}$. Избираме ненулев полином

$$h(x) \in \langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]}$$

от минимална степен. Разширяваме коефициентите на полиномите до полето от частни $Q$ на $R$ и делим $p(x)$ на $h(x)$ с частно $\widetilde{q}(x) \in Q[x]$ и остатък $\widetilde{r}(x) \in Q[x]$, $p(x) = h(x)\widetilde{q}(x) + \widetilde{r}(x)$, $\deg \widetilde{r}(x) < \deg h(x)$. Ако $h(x) = ax^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in R[x]$, $a \neq 0$ и $m := \deg p(x) - \deg h(x)$, то съгласно алгоритъма за деление на полиноми на една променлива ,

$$\widetilde{q}(x) \in a^{-1}Rx^m + a^{-2}Rx^{m-1} + \ldots + a^{-m}Rx + a^{-(m+1)}R.$$

Затова $q(x) := a^{m+1}\widetilde{q}(x) \in R[x]$ и от равенството

$$a^{m+1}p(x) = h(x)q(x) + a^{m+1}\widetilde{r}(x)$$

следва, че $r(x) := a^{m+1}\widetilde{r}(x) = a^{m+1}p(x) - h(x)q(x) \in R[x]$. Още повече, $h(x) \in \langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]}$, така че $r(x) \in \langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]}$ от степен $\deg r(x) = \deg \widetilde{r}(x) < \deg h(x)$. Изборът на $h(x)$ като ненулев полином от $\langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]}$ с минимална степен налага анулирането на $r(x) \equiv 0$. Следователно полиномът $a^{m+1}p(x) = h(x)q(x)$. Отделяме $d(h)$ като множител и разлагаме $h(x) = d(h)h_1(x)$ чрез примитивен полином $h_1(x) \in R[x]$. Тогава равенството $a^{m+1}p(x) = d(h)h_1(x)q(x)$ показва, че $h_1(x)$ дели $a^{m+1}p(x)$. От Следствие 7.23 получаваме, че $h_1(x)$ дели $p(x)$ или $p(x) \in \langle h_1(x)\rangle_{R[x]}$. След деление на $f(x)$ с $h(x)$ и аналогични разсъждения стигаме до извода, че $f(x) \in \langle h_1(x)\rangle_{R[x]}$. Следователно $\langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]} \subseteq \langle h_1(x)\rangle_{R[x]}$. Сега от

$$\langle h(x)\rangle_{R[x]} \subseteq \langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]} \subseteq \langle h_1(x)\rangle_{R[x]}$$

имаме

$$h(x) = d(h)h_1(x) = a(x)p(x) + b(x)f(x)$$

за подходящи полиноми $a(x), b(x), \in R[x]$, както и

$$p(x) = c(x)h_1(x)$$

за $c(x) \in R[x]$. От примитивността на $p(x)$ следва примитивността на $c(x)$. Неразложимостта на $p(x)$ налага обратимост на $c(x)$ или $h_1(x)$. Ако $c(x)$ е обратим, то $\deg p(x) = \deg h_1(x) = \deg h(x)$ позволява избора на $h(x) := p(x)$. Тогава $h_1(x) = p(x)$, откъдето $\langle p(x), f(x) \rangle_{R[x]} = \langle p(x) \rangle_{R[x]}$. В резултат, $f(x) \in \langle p(x) \rangle_{R[x]}$, противно на допускането. Ако $h_1(x)$ е обратим, то равенството

$$g(x)h(x) = g(x)d(h)h_1(x) = a(x)p(x)g(x) + b(x)f(x)g(x)$$

показва, че примитивният полином $p(x)$ дели $d(h)g(x)h_1(x)$ или, все едно, $p(x)$ дели $d(h)g(x)$. Съгласно Следствие 7.23 това е достатъчно за да твърдим, че $p(x)$ дели $g(x)$, т.е., $g(x) \in \langle p(x) \rangle_{R[x]}$. С това установихме, че идеалът $\langle p(x) \rangle_{R[x]}$, породен от неразложим полином $p(x) \in R[x]$ е прост, Q.E.D.

Следствие 7.24. *Пръстенът от полиноми $k[x_1, \ldots, x_n]$ с коефициенти от поле $k$ е факториална ньотерова област.*

## Приложение 2: Алгебрични разширения на полета

Да напомним, че елементът $a$ на разширение $F \supset E$ е алгебричен над $E$, ако съществува $0 \not\equiv g_a(x) \in E[x]$ с $g_a(a) = 0$. Ако $a \in E$ не е алгебрично над $E$, то казваме, че $a$ е трансцендентно над $E$.

Лема-Определение 9. *Нека $F \supset E$ е разширение на полета и $a \in F$ е алгебрично над $E$. Тогава съществува единствен полином $0 \not\equiv g_a(t) \in E[t]$ от минимална степен, със старши коефициент 1 и корен $a$. Този полином $g_a(t)$ е неразложим над $E$ и се нарича минимален полином на $a$ над $E$. Степента на алгебричност на $a$ над $E$ се определя като степента $\deg(g_a(t))$ и тя съвпада със степента на разширението $E(a) = E[a] \supset E$.*
*В частност, ако $\mathrm{char}(E) = \mathrm{char}(F) = 0$, то минималният полином $g_a(t) \in E[t]$ на $a$ над $E$ няма кратни корени.*

**Доказателство:** Нека $g_a(t)$ и $h_a(t)$ са два полинома на $t$ от минимална степен, със старши коефициент 1 и корен $a$. Тогава $\varphi_a(t) := g_a(t) - h_a(t)$ е полином на $t$ от степен $\deg(\varphi_a) < \deg(g_a)$ с корен $a$ и се анулира тъждествено, съгласно минималността на $\deg(g_a) = \deg(h_a)$ измежду полиномите с корен $a$. Това доказва единствеността на полинома $g_a(t) \in E[t]$ от минимална степен, със старши коефициент 1 и корен $a$.
Да допуснем, че $g_a(t) = g_1(t)g_2(t)$ е разложим над $E$ в произведение на полиноми $g_i(t) \in E[t]$ от степен $\deg(g_i) < \deg(g_a)$. Тогава $a$ е корен на поне един от полиномите $g_i(t)$ и това противоречи на минималността на $\deg(g_a)$. Следователно полиномът $g_a(t)$ е неразложим над полето $E$.
Ако минималният полином $g_a(t) \in E[t]$ на $a$ над $E$ е от степен $d$, то мономите $1, t, \ldots, t^{d-1}$ образуват $E$-базис на $E[a]$. При това, $E[a]$ е поле поради алгебричността на $a$ над $E$ и $E(a) = E[a]$. Това показва, че $E(a)$ е $d$-мерно линейно пространство над $E$.
Да напомним, че $g_a(t) = \sum_{i=0}^{d} e_i t^i \in E[t]$ има кратни корени тогава и само тогава, когато има общи корени с формалната си производна $g_a'(t) = \sum_{i=0}^{d} i e_i t^{i-1} \in E[t]$.
Последното е в сила точно тогава, когато най-големият общ делител $(g_a, g_a')$ има поне един корен. Но съгласно неразложимостта на $g_a$ над $E$, най-големият общ делител $(g_a, g_a')$ съвпада с 1 или $g_a$, с точност до мултипликативна константа от $E^*$. Следователно $(g_a, g_a')$ има поне един корен тогава и само тогава, когато $g_a$ дели $g_a'$. Вземайки предвид, че $\deg(g_a') = \deg(g_a) - 1 < \deg(g_a)$, стигаме до извода, че неразложимият над $E$ полином $g_a(t)$ има кратни корени точно когато формалната му производна $g_a'(t) \equiv 0$ се анулира тъждествено. В случая на $\mathrm{char}(E) = 0$, всеки полином $g_a(t) \in E[t] \setminus E$ има ненулева формална производна $g_a'(t) \not\equiv 0$ и не може да има кратни корени, Q.E.D.

Следствие 7.25. *Нека $f : X \dashrightarrow Y$ е доминантно рационално изображение на неприводими афинни многообразия над алгебрично затворено поле $k$ с характеристика $\mathrm{char}(k) = 0$ и $a \in k(X)$ е алгебричен над $E = f^*(k(Y))$. Тогава минималният полином $g_a(t) \in E[t]$ на $a$ над $E$ няма кратни корени върху общия слой на $f$.*

**Доказателство:** Нека $g_a(t) = \sum_{i=0}^{d} f^*(\varphi_i)t^i \in E[t] \setminus E = f^*(k(Y))[t] \setminus f^*(k(Y))$ с $\varphi_i \in k(Y)$ е минималният полином на $a$ над $f^*(k(Y))$. Ако $V_i$ е областта на регулярност на $\varphi_i$ върху $Y$, то $V = \cap_{i=1}^{d} V_i \neq \emptyset$ е Зариски отворено, Зариски навсякъде гъсто в $Y$. Сечението $U$ на $f^{-1}(V)$ с областта на регулярност $W$ на $f$

е непразно, Зариски отворено и навсякъде гъсто в неприводимото многообразие $X$.
Нека $Z_a \subset U$ е множеството на точките от $U$, в които $g_a(t)$ има кратен корен. Тогава
$$Z_a = \{p \in U \mid g_a(p)(t)' \equiv 0 \in k[t]\}$$
се характеризира с тъждественото анулиране на фармалната производна
$$g_a(t)' = \sum_{i=1}^{d} i f^*(\varphi_i) t^{i-1}$$
като полином на $t$. Последното е еквивалентно на $\varphi_i f = f^*(\varphi_i) = 0 \in f^* k(Y)$ за $\forall 1 \leq i \leq d$. Освобождавайки се от знаменателите на $\varphi_i \in k(Y)$ получаваме регулярни функции $\overline{\psi_i} \in k[Y]$ със същите множества от нули като $\varphi_i$. Това дава възможност да представим
$$Z_a = \{p \in U \mid \psi_i f(p) = 0 \ \text{за} \ \forall 1 \leq i \leq d\}.$$
Ако допуснем, че $Z_a \equiv U$, то $\psi_i f \in I(U) = I(X) = I(W)$, съгласно Зариски гъстотата на $U$ и $W$ в $X$. Оттук $\psi_i \in I(f(W)) = I(Y)$, възоснова на доминантността на $f : X \dashrightarrow Y$ и $\overline{\psi_i} = \overline{0} \in k[Y]$. В резултат, $\varphi_i \equiv 0 \in k(Y)$ за $\forall 1 \leq i \leq d$ и минималният полином $g_a(t) = f^*(\varphi_0) \in f^* k(Y)$. Противоречието доказва, че $Z_a$ е собствено, Зариски затворено подмножество и $g_a(t)$ няма кратни корени върху слоя на $f$ в обща точка на $f(U)$, Q.E.D.
Ако полето $F$ е разширение на полето $E$ или $E$ е подполе на $F$, то размерността на $F$ като линейно пространство над $E$ се нарича степен на разширението $F \supset E$ и се бележи с $[F : E]$.
Ако $F \supset E$ е разширение на полета и $a \in F$ е алгебрично над $E$, то степента $d$ на минималния полином на $a$ над $E$ съвпада със степента на разширението $E(a) = E[a] \supset E$ и се нарича степен на алгебричност на $a$ над $E$.

Лема 7.26. *Нека $F_3 \supset F_2$ и $F_2 \supset F_1$ са крайни разширения на полета. Тогава $F_3 \supset F_1$ е крайно разширение от степен*
$$[F_3 : F_1] = [F_3 : F_2][F_2 : F_1].$$

**Доказателство:** Нека $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ е базис на $F_2$ над $F_1$, а $\beta_1, \ldots, \beta_n$ е базис на $F_3$ над $F_2$. Достатъчно е да докажем, че $\{\alpha_i \beta_j\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ е базис на $F_3$ над $F_1$. За всяко $x \in F_3$ съществуват $y_1, \ldots, y_n \in F_2$, така че $x = \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_j$. От своя страна, за всяко $y_j \in F_2$ съществуват $z_{j,1}, \ldots, z_{j,m} \in F_1$, така че $y_j = \sum_{i=1}^{m} z_{j,i} \alpha_i$. След заместване получаваме
$$x = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} z_{j,i} \alpha_i \right) \beta_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} z_{j,i} (\alpha_i \beta_j),$$
с което установяваме, че всеки елемент на $F_3$ е от $F_1$-линейната обвивка на $\alpha_i \beta_j$.
Ако $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} z_{j,i} (\alpha_i \beta_j) = 0$ за $z_{j,i} \in F_1$, то $y_j := \sum_{i=1}^{m} z_{j,i} \alpha_i \in F_2$ изпълняват равенството $\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_j = 0$. Понеже $\beta_1, \ldots, \beta_n$ е базис на $F_3$ над $F_2$, оттук получаваме $y_j = 0$ за $\forall 1 \leq j \leq n$. Но $\sum_{i=1}^{m} z_{j,i} \alpha_i = 0$ за базиса $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ на $F_2$ над $F_1$ и $z_{j,i} \in F_1$ е изпълнено само при $\forall z_{j,i} = 0$. Това доказва линейната независимост на $\{\alpha_i \beta_j \mid 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n\}$ над $F_1$, Q.E.D.