Глава 8

Допирателно пространство на Зариски

Преди да въведем допирателното пространство на Зариски към афинно многообразие, да напомним комплексното допирателно пространство към комплексно многообразие M в точка $p \in M$. В съвкупността на наредените двойки (U, f), съставени от околност U на p върху M и холоморфна функция $f : U \to \mathbb{C}$ въвеждаме релация $\sim$. Обявяваме $(U, f) \sim (V, g)$ точно когато съществува околност $W \subseteq U \cap V$ на p върху M, така че ограниченията $f|_W \equiv g|_W$ съвпадат. Непосредствено се проверява, че $\sim$ е релация на еквивалентност. Преди всичко, $(U, f) \sim (U, f)$. Ако $(U, f) \sim (V, g)$, то $(V, g) \sim (U, f)$. Ако $(U, f) \sim (V, g)$ и $(V, g) \sim (W, h)$, то $(U, f) \sim (W, h)$, защото от $f|_{U'} \equiv g|_{U'}$ за околност $U' \subseteq U \cap V$ на p върху M и от $g|_{V'} \equiv h|_{V'}$ за околност $V' \subseteq V \cap W$ на p върху M следва, че $f|_{U' \cap V'} \equiv h|_{U' \cap V'}$ върху околността $(U' \cap V') \subseteq (U \cap V \cap W)$ на p върху M. Класовете на еквивалентност на (U, f) се наричат зародиши на холоморфните функции в $p \in M$. Множеството $\mathcal{O}_{p,M}$ на зародишите на холоморфните функции в p е локален пръстен относно поточковото определените събиране и умножение. Причина за това е, че необратимите елементи на $\mathcal{O}_{p,M}$ образуват множеството $\mathfrak{M}_{p,M}$ на анулиращите се в p зародиши, а те от своя страна са идеал в $\mathcal{O}_{p,M}$.
Избираме диференцируема крива $\rho : (-\delta, \delta) \to M$ с $\rho(0) = p$ и разглеждаме изображението

$$d_p\rho : \mathcal{O}_{p,M} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$d_p(\rho)(f) = \frac{d}{dt}\left[f\rho(t)\right]\Big|_{t=0}.$$

Непосредствено се проверява, че $d_p\rho$ е диференциране, т.е.

$$d_p\rho(fg) = f(p)d_p\rho(g) + g(p)d_p\rho(f).$$

Това ни кара да определим допирателното пространство T_pM като линейното пространство на диференциранията $\mathcal{O}_{p,M} \to \mathbb{C}$. Ситуацията се пренася и в алгебричната геометрия.

Определение 8.1. *Нека X е неприводимо афинно многообразие, $p \in X$, а $\mathcal{O}_{p,X}$ е локалният пръстен на p с максимален идеал $\mathfrak{M}_{p,X}$. Казваме, че изображението $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$ е k-диференциране, ако*
(i) D е k-линейно изображение;
(ii) $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f)$ за $\forall f, g \in \mathcal{O}_{p,X}$;
(iii) $D(a) = 0$ за $\forall a \in k$.
Линейното пространство T_pX на k-диференциранията $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$ се нарича допирателно пространство на Зариски.

Лема 8.2. *Нека X е неприводимо афинно многообразие и $p \in X$. Тогава допирателното пространство на Зариски*

$$T_pX \simeq \left(\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}_{p,X}^2\right)^*$$

може да се отъждестви с дуалното на k-линейното пространство $\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}_{p,X}^2$. По-точно,

(i) ако $\mathfrak{M}_{p,X} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, то всяко k-диференциране $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$ се определя еднозначно от $D(f_1), \ldots, D(f_m)$;
(ii) всяко k-диференциране $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$ индуцира еднозначно определен k-линеен функционал $\overline{D} : \mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X} \to k$, доколкото $\mathfrak{M}^2_{p,X} \subseteq Ker(D)$;
(iii) всеки линеен функционал $\overline{D} : \mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X} \to k$ определя еднозначно определено k-диференциране $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$.

Доказателство: (i) Произволна функция $f \in \mathcal{O}_{p,X}$ се представя във вида $f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)g_i(x) + f(p)$ с $g_i \in \mathcal{O}_{p,X}$, защото $f(x) - f(p) \in \mathfrak{M}_{p,X}$. Следователно

$$D(f) = \sum_{i=1}^{m} g_i(p)D(f_i) + f_i(p)D(g_i) + D(f(p)) = \sum_{i=1}^{m} g_i(p)D(f_i),$$

съгласно $f_i \in \mathfrak{M}_{p,X}$ и $f(p) \in k$.
(ii) Ако $f, g \in \mathfrak{M}_{p,X}$, то $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f) = 0$, така че D се анулира върху $\mathfrak{M}^2_{p,X}$. Следователно

$$\overline{D} : \mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X} \longrightarrow k,$$

$$\overline{D}(f + \mathfrak{M}^2_{p,X}) = D(f) \ \text{ за } \ \forall f \in \mathfrak{M}_{p,X}$$

е коректно оперделено k-линейно изображение.
(iii) Линейният функционал $\overline{D} : \mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X} \to k$ може да се разглежда като линеен функционал $D : \mathfrak{M}_{p,X} \to k$, анулиращ се върху $\mathfrak{M}^2_{p,X}$. Продължаваме D до изображение

$$D : \mathcal{O}_{p,X} \longrightarrow k,$$

$$D(f) = D\left([f - f(p)] + f(p)\right) = D(f - f(p)),$$

вземайки предвид, че $f - f(p) \in \mathfrak{M}_{p,X}$. Проверяваме k-линейността на D,

$$D(f+g) = D(f+g-(f+g)(p)) = D([f-f(p)]+[g-g(p)]) = D(f-f(p))+D(g-g(p)),$$

$$D(\lambda f) = D(\lambda f - (\lambda f)(p)) = D(\lambda(f - f(p))) = \lambda D(f - f(p)).$$

Ясно е, че $D(a) = 0$ за $\forall a \in k$. Остава да установим, че $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f)$ за произволни $f, g \in \mathcal{O}_{p,X}$. Разлагаме

$$fg = [(f - f(p)) + f(p)][(g - g(p)) + g(p)] =$$

$$[f - f(p)][g - g(p)] + f(p)[g - g(p)] + g(p)[f - f(p)] + f(p)g(p)$$

с $[f - f(p)][g - g(p)] \in \mathfrak{M}^2_{p,X}$ и $f(p)[g - g(p)], g(p)[f - f(p)] \in \mathfrak{M}_{p,X}$. Следователно $D([f - f(p)][g - g(p)]) = 0$ и

$$D(fg) = D(f(p)[g - g(p)]) + D(g(p)[f - f(p)]) =$$

$$f(p)D(g - g(p)) + g(p)D(f - f(p)) = f(p)D(g) + g(p)D(f),$$

Q.E.D.
Следващото твърдение описва някои зависимости между регулярни изображения на афинни многообразия и допирателните пространства на Зариски.

ТВЪРДЕНИЕ 8.3. *(i) Произволно регулярно изображение $\varphi : X \to Y$ на неприводими афинни многообразия определя k-линейно изображение*

$$d\varphi_p : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y,$$

наречено диференциал на φ в точка p.
(ii) Ако $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to Z$ са регулярни изображения, то

$$d(\psi\varphi)_p = d\psi_{\varphi(p)} d\varphi_p$$

във всяка точка $p \in X$.

(iii) Тъждественото изображение $\mathrm{Id} : X \to X$ *на афинно многообразие* X *индуцира тъждествените изображения* $d(\mathrm{Id})_p = \mathrm{Id} : T_pX \to T_pX$ *на всички допирателни пространства на Зариски* T_pX*.*
(iv) Ако $\varphi : X \to Y$ *е бирегулярно изображение, то във всяка точка* $p \in X$ *диференциалът* $d\varphi_p : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ *е* k*-линеен изоморфизъм.*

Доказателство: (i) Регулярното изображение $\varphi : X \to Y$ индуцира хомоморфизъм $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ на съответните афинни координатни пръстени. При това, максималният идеал $\mathfrak{M}_{\varphi(p)} \lhd k[Y]$ се изобразява в максималния идеал $\varphi^*(\mathfrak{M}_{\varphi(p)}) = \mathfrak{M}_p \lhd k[X]$, допълнението $k[Y] \setminus \mathfrak{M}_{\varphi(p)}$ се трансформира в допълнението $\varphi^*(k[Y] \setminus \mathfrak{M}_{\varphi(p)} = k[X] \setminus \mathfrak{M}_p$. Следователно φ^* се продължава до хомоморфизъм

$$\varphi^* : \mathcal{O}_{\varphi(p),Y} = (k[Y] \setminus \mathfrak{M}_{\varphi(p)})^{-1}k[Y] \longrightarrow (k[X] \setminus \mathfrak{M}_p)^{-1}k[X] = \mathcal{O}_{p,X}$$

на съответните локални пръстени. За произволно диференциране $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$ твърдим, че $D\varphi^* : \mathcal{O}_{\varphi(p),Y} \to k$ е диференциране. Преди всичко, композицията $D\varphi^*$ на k-линейните изображения φ^* и D е k-линейно изображение. Освен това, за $\forall f, g \in \mathcal{O}_{\varphi(p),Y}$ е в сила

$$D\varphi^*(fg) = D((f \circ \varphi)(g \circ \varphi)) =$$

$$(f \circ \varphi)(p)D(g \circ \varphi) + (g \circ \varphi)(p)D(f \circ \varphi) = f(\varphi(p))D\varphi^*(g) + g(\varphi(p))D\varphi^*(f).$$

Накрая, за всяка константа $a \in k$ имаме $D\varphi^*(a) = D(a) = 0$, така че $D\varphi^*$ е диференциране на $\mathcal{O}_{\varphi(p),Y}$. Изображението

$$d\varphi_p : T_pX \longrightarrow T_{\varphi(p)}Y$$

$$d\varphi_p(D) = D\varphi^*$$

е k-линейно, защото

$$d\varphi_p(D_1 + D_2) = (D_1 + D_2)\varphi^* = (D_1\varphi^*) + (D_2\varphi^*) = d\varphi_p(D_1) + d\varphi_p(D_2) \text{ и}$$

$$d\varphi_p(aD) = (aD)\varphi^* = a(D\varphi^*) = a[d\varphi_p(D)].$$

Алтернативен начин за построяване на диференциала $d\varphi_p : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ на $\varphi : X \to Y$ в $p \in X$ предоставя факта, че $\varphi^*\mathfrak{M}^n_{\varphi(p),Y} \subseteq \mathfrak{M}^n_{p,X}$ за всяко цяло $n \geq 0$. Следователно φ^* задава коректно избораржение

$$\varphi^* : \mathfrak{M}_{\varphi(p),Y}/\mathfrak{M}^2_{\varphi(p),Y} \longrightarrow \mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}. \tag{8.1}$$

Тук $\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}$ е $\mathcal{O}_{p,X}$-модул с анулатор, съдържащ $\mathfrak{M}_{p,X}$, така че $\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}$ може да се разглежда като модул или линейно пространство над полето $k = \mathcal{O}_{p,X}/\mathfrak{M}_{p,X}$. Аналогично, $\mathfrak{M}_{\varphi(p),Y}/\mathfrak{M}^2_{\varphi(p),Y}$ е линейно пространство над k и (8.1) е k-линейно изображение, защото $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е хомоморфизъм на k-алгебри. Дуалното изображение $(\varphi^*)^* = d\varphi_p : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ съвпада с диференциала на φ в p.
(ii) Нека $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to Z$ са регулярни изображения на неприводими афинни многообразия, индуциращи хомоморфизмите $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ и $\psi : k[Z] \to k[Y]$ на k-алгебри. За произволно диференциране $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$ пресмятаме, че $d(\psi\varphi)_p(D) = D(\psi\varphi)^* = D\varphi^*\psi^* = d\psi_{\varphi(p)}d\varphi_p$.
(iii) Тъждественото изображение $\mathrm{Id} : X \to X$ на афинно многообразие X индуцира тъждествения хомоморфизъм

$$\mathrm{Id}^* : k[X] \longrightarrow k[X],$$

$$\mathrm{Id}^*(f) = f\mathrm{Id} = f$$

на афинната координатна алгебра. Следователно за всяко диференциране $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$ е изпълнено $d(\mathrm{Id})_p(D) = D\mathrm{Id}^* = D$ и $D(\mathrm{Id})_p = \mathrm{Id} : T_pX \to T_pX$.

(iv) Ако $\varphi : X \to Y$ е бирегулярно изображение, то $\varphi^{-1} : Y \to X$ е регулярно и $\varphi^{-1}\varphi = \mathrm{Id}_X$, $\varphi\varphi^{-1} = \mathrm{Id}_Y$. Вземайки предвид (iii) и (ii) пресмятаме, че

$$\mathrm{Id}_{T_pX} = d(\mathrm{Id}_X)_p d(\varphi^{-1}\varphi)_p = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} d\varphi_p,$$

$$\mathrm{Id}_{T_{\varphi(p)}Y} = d(\mathrm{Id}_Y)_{\varphi(p)} = d(\varphi\varphi^{-1})_{\varphi(p)} = d\varphi_p d\varphi^{-1}\varphi(p)$$

и стигаме до извода, че $d\varphi_p : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ и $d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}Y \to T_pX$ са взаимно обратни линейни изоморфизми, Q.E.D.

За да докажем, че $\mathfrak{M}^n_{p,X}/\mathfrak{M}^{n+1}_{p,X}$ са крайномерни линейни пространства над k, ни трябва следната

Лема 8.4. *Нека R е локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}$ и поле от остатъци $k = R/\mathfrak{M}$. Тогава:*
(i) за всяко цяло $n \geq 0$ факторът $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ е линейно пространство над k;
(ii) ако $(\mathfrak{a}, +)$ е подгрупа на $(\mathfrak{M}^n, +)$, съдържаща $\mathfrak{M}^{n+1}$ и $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}^{n+1}$ е k-линейно подпространство на $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$, то $\mathfrak{a}$ е идеал в R.

Доказателство: (i) Понеже R-модулът $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ се анулира от $\mathfrak{M}$, можем да разглеждаме $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ като модул над $R/\mathfrak{M} = k$.
(ii) Фактор-групата $\left(\mathfrak{a}/\mathfrak{M}^{n+1}, +\right)$ е линейно пространство над полето $R/\mathfrak{M}$ тогава и само тогава, когато $\mathfrak{a}/\mathfrak{M}^{n+1}$ е R-модул, съдържащ $\mathfrak{M}$ в анулатора си. Понеже $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{M}^{n+1}$, последното е еквивалентно на $R\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$, т.е. на това $\mathfrak{a}$ да е идеал в R, Q.E.D.

Следствие 8.5. *Нека R е ньотеров локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}$ и поле от остатъци $k = R/\mathfrak{M}$. Тогава k-линейните пространства $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ са крайномерни за всички цели $n \geq 0$.*

Доказателство: Ако допуснем, че линейното пространство $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ над k е безкрайномерно, то съществува безкрайна строго растяща редица

$$\mathfrak{a}_1/\mathfrak{M}^{n+1} \subsetneqq \mathfrak{a}_2/\mathfrak{M}^{n+1} \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{a}_l/\mathfrak{M}^{n+1} \subsetneqq \mathfrak{a}_{l+1}/\mathfrak{M}^{n+1} \subsetneqq \ldots$$

от k-линейни подпространства на $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$. Прилагайки Лема 8.4 (ii) получаваме безкрайна строго растяща редица

$$\mathfrak{a}_1 \subsetneqq \mathfrak{a}_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{a}_l \subsetneqq \mathfrak{a}_{l+1} \subsetneqq \ldots$$

от идеали в R. Това противоречи на ньотеровостта на R и доказва, че $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ е крайномерно пространство на д k, Q.E.D.

Прилагайки Лема 8.4 и Следствие 8.5 към ньотеровата локална област $\mathcal{O}_{p,X}$ с поле от остатъци $\mathcal{O}_{p,X}/\mathfrak{M}_{p,X} = k$, получаваме следното

Следствие 8.6. *Нека X е неприводимо афинно многообразие, $p \in X$ е точка и $\mathfrak{M}_{p,X}$ е максималният идеал на локалния пръстен $\mathcal{O}_{p,X}$. Тогава за всяко цяло $n \geq 0$ факторите $\mathfrak{M}^n_{p,X}/\mathfrak{M}^{n+1}_{p,X}$ са крайномерни линейни пространства над k и всяко k-линейно подпространство на $\mathfrak{M}^n_{p,X}$, съдържащо $\mathfrak{M}^{n+1}_{p,X}$ е идеал в $\mathcal{O}_{p,X}$. В частност, допирателното пространство на Зариски $T_pX \simeq \left(\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}\right)$ е крайномерно.*

От една страна, идеалът $\mathfrak{M}_{p,X}$ в ньотеровата област $\mathcal{O}_{p,X}$ е крайнопороден. От друга страна, $\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}$ е крайномерно линейно пространство над $k = \mathcal{O}_{p,X}/\mathfrak{M}_{p,X}$. Ако $\mathfrak{M}_{p,X} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$, то $f_1 + \mathfrak{M}^2_{p,X}, \ldots, f_s + \mathfrak{M}^2_{p,X}$ пораждат линейното пространство $\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}$ над k. По-точно, всеки елемент на фактора $\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}$ е от вида

$$\sum_{i=1}^{s} f_i g_i + \mathfrak{M}^2_{p,X} = \sum_{i=1}^{s} (f_i + \mathfrak{M}^2_{p,X})(g_i + \mathfrak{M}^2_{p,X}) =$$

$$\sum_{i=1}^{s}(f_i + \mathfrak{M}_{p,X}^2)(g_i - g_i(p) + \mathfrak{M}_{p,X}^2) + \sum_{i=1}^{s}(f_i + \mathfrak{M}_{p,X}^2)(g_i(p) + \mathfrak{M}_{p,X}^2 =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{s} f_i g_i(p)\right) + \mathfrak{M}_{p,X}^2 \in \mathrm{Span}_k(f_1, \ldots, f_s) + \mathfrak{M}_{p,X}^2,$$

защото $g_i - g_i(p) \in \mathfrak{M}_{p,X}$. С помощта на следващата Лема на Накаяма ще установим, че произволен базис на $\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}_{p,X}^2$ над k се повдига до система от пораждащи на максималния идеал $\mathfrak{M}_{p,X}$.

Лема 8.7. (Лема на Накаяма) *Нека R е локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}$ и поле от остатъци $k = R/\mathfrak{M}$.*
(i) Ако M е крайнопороден R-модул и N е подмодул на M, изпълняващ равенството $\mathfrak{M}M + N = M$, то $M = N$.
(ii) Ако M е крайнопороден R-модул и $x_1, \ldots, x_n \in M$ са такива, че класовете $x_1 + \mathfrak{M}M, \ldots, x_n + \mathfrak{M}M$ пораждат линейното пространство $M/\mathfrak{M}M$ над $k = R/\mathfrak{M}$, то $x_1, \ldots, x_n$ пораждат M като R-модул.

Доказателство: (i) Нека $N = 0$ и $\mathfrak{M}M = M$. За да установим, че $M = 0$, допускаме противното, $M \neq 0$ и избираме минимално множество от пораждащи $u_1, \ldots, u_r$ на M като R-модул. Съгласно $u_r \in M = \mathfrak{M}M$ съществуват $m_i \in \mathfrak{M}$, така че $u_r = \sum\limits_{i=1}^{r} m_i u_i$. Следователно $(1 - m_r)u_r = \sum\limits_{i=1}^{r-1} m_i u_i$, където $1 - m_r \in R \backslash \mathfrak{M}$ е обратим елемент на R. Умножавайки почленно с $(1-m_r)^{-1} \in R$ получаваме $u_r \in Ru_1 + \ldots + Ru_{r-1}$, което противоречи на минималността на системата пораждащи $u_1, \ldots, u_r$ на R-модула M. Това доказва, че $M = N = 0$ в случая $N = 0$.
В общия случай, от $\mathfrak{M}(M/N) = (\mathfrak{M}M + N)/N = M/N$ следва $M/N = 0$, което е равносилно на $M = N$.
(ii) Подмодулът $N = Rx_1 + \ldots + Rx_n$ изпълнява равенството $\mathfrak{M}M + N = M$, защото всеки елемент $x \in M$ индуцира клас $x + \mathfrak{M}M$ от линейното пространство $M/\mathfrak{M}M = \mathrm{Span}_k(x_1 + \mathfrak{M}M, \ldots, x_n + \mathfrak{M}M)$. Следователно можем да представим $x + \mathfrak{M}M = \sum\limits_{i=1}^{n}(r_i + \mathfrak{M})(x_i + \mathfrak{M}M)$ чрез някакви $r_i + \mathfrak{M} \in R/\mathfrak{M} = k$. В резултат, $x - \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i = x_o \in \mathfrak{M}M$ или $x \in \mathfrak{M}M + \sum\limits_{i=1}^{n} Rx_i$. Съгласно (i), равенството $\mathfrak{M}M + N = M$ е достатъчно за $M = N$, Q.E.D.
Оттук получаваме следното

Следствие 8.8. *Нека X е неприводимо афинно многообразие над поле k, $p \in X$ е точка, $\mathcal{O}_{p,X}$ е локалният прастен на p и $\mathfrak{M}_{p,X}$ е максималният идеал на $\mathcal{O}_{p,X}$. В такъв случай, $f_1, \ldots, f_s \in \mathfrak{M}_{p,X}$ пораждат идеала*

$$\mathfrak{M}_{p,X} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \triangleleft \mathcal{O}_{p,X}$$

тогава и само тогава, когато $f_1 + \mathfrak{M}_{p,X}^2, \ldots, f_s + \mathfrak{M}_{p,X}^2$ пораждат линейното пространство

$$\mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}_{p,X}^2 = \mathrm{Span}_k(f_1 + \mathfrak{M}_{p,X}^2, \ldots, f_s + \mathfrak{M}_{p,X}^2).$$

Следващите разглеждания дават координатно описание на допирателното пространство на Зариски T_pX към афинно многообразие $X \subseteq k^n$.

Лема 8.9. *Нека p е точка на афинното пространство k^n с локален пръстен $\mathcal{O}_{p,k^n}$. Тогава максималният идеал $\mathfrak{M}_{p,k^n}$ на $\mathcal{O}_{p,k^n}$ се поражда от линейните полиноми $x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n$ и k-диференциранията*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathcal{O}_{p,k^n} \longrightarrow k, \quad 1 \leq i \leq n,$$

които са еднозначно определени от

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (x_j - p_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}$$

образуват базис на допирателното пространство на Зариски $T_p k^n$.

Доказателство: Максималният идеал $\mathfrak{M}_p$ на точка $p = (p_1, \ldots, p_n) \in k^n$ в афинния координатен пръстен $k[k^n] = k[x_1, \ldots, x_n]$ се поражда от линейните полиноми $x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n$, т.е.

$$\mathfrak{M}_p = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle_{k[x_1, \ldots, x_n]}.$$

Твърдим, че

$$\mathfrak{M}_{p,k^n} = \mathfrak{M}_p \mathcal{O}_{p,k^n}.$$

Включването $\mathfrak{M}_p \mathcal{O}_{p,k^n} \subseteq \mathfrak{M}_{p,k^n}$ е ясно. Обратно, всеки елемент $\mu \in \mathfrak{M}_{p,k^n}$ е от вида $\mu = \frac{f}{g}$ за подходящи $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ и $g \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathfrak{M}_p$. Следователно полиномът $f = g\mu \in k[x_1, \ldots, x_n]$ се анулира в p и принадлежи на $\mathfrak{M}_p$. В резултат, $\mu = f\left(\frac{1}{g}\right) \in \mathfrak{M}_p \mathcal{O}_{p,k^n}$ и $\mathfrak{M}_{p,k^n} \subseteq \mathfrak{M}_p \mathcal{O}_{p,k^n}$. С това проверихме, че $\mathfrak{M}_{p,k^n} = \mathfrak{M}_p \mathcal{O}_{p,k^n}$, така че

$$\mathfrak{M}_{p,k^n} = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle_{\mathcal{O}_{p,k^n}}.$$

Съгласно Следствие 8.8, елементите $x_1 - p_1 + \mathfrak{M}^2_{p,k^n}, \ldots, x_n - p_n + \mathfrak{M}^2_{p,k^n} \in \mathfrak{M}_{p,k^n} / \mathfrak{M}^2_{p,k^n}$ пораждат линейното пространство $\mathfrak{M}_{p,k^n} / \mathfrak{M}^2_{p,k^n}$ над k. За установяване на линейната независимост на $x_i - p_i + \mathfrak{M}^2_{p,k^n}$ за $1 \leq i \leq n$ извършваме смяна на афинните координати $y_i = x_i - p_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$, така че p преминава в началото $0^n \in k^n$. Допускането

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (y_i + \mathfrak{M}^2_{0^n,k^n}) = \mathfrak{M}^2_{0^n,k^n}$$

за някакви $a_i \in k$ води до $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i \in \mathfrak{M}^2_{0^n,k^n}$. От $\mathfrak{M}_{0^n,k^n} = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle_{\mathcal{O}_{0^n,k^n}}$ следва

$$\mathfrak{M}^2_{0^n,k^n} = \langle y_i y_j \mid 1 \leq i \leq j \leq n \rangle_{\mathcal{O}_{0^n,k^n}},$$

така че

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} y_i y_j \frac{f_{ij}}{g_{ij}}$$

за подходящи $f_{ij} \in k[y_1, \ldots, y_n]$, $g_{ij} \in k[y_1, \ldots, y_n] \setminus \mathfrak{M}_{0^n}$. Привеждайки под общ знаменател $G \in k[y_1, \ldots, y_n] \setminus \mathfrak{M}_{0^n}$ получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \frac{\sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n} y_i y_j F_{ij}(y_1, \ldots, y_n)}{G(y_1, \ldots, y_n)}$$

за някакви полиноми $F_{ij} \in k[y_1, \ldots, y_n]$. Оттук,

$$G(y_1, \ldots, y_n) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} y_i y_j F_{ij}(y_1, \ldots, y_n)$$

като полиноми на $y_1, \ldots, y_n$. Сравнявайки хомогенните компоненти на двете страни от степен 1 извеждаме

$$G(0, \ldots, 0) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right) = 0.$$

Съгласно $G \notin \mathfrak{M}_{0^n}$ оттук получаваме $a_i = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и елементите $y_1 + \mathfrak{M}^2_{0^n,k^n}, \ldots, y_n + \mathfrak{M}^2_{0^n,k^n}$ се оказват линейно независими над k. С това установихме, че $x_1 - p_1 + \mathfrak{M}^2_{p,k^n}, \ldots, x_n - p_n + \mathfrak{M}^2_{p,k^n}$ е базис на $\mathfrak{M}_{p,k^n}/\mathfrak{M}^2_{p,k^n}$. Възоснова на $T_p k^n = \left(\mathfrak{M}_{p,k^n}/\mathfrak{M}^2_{p,k^n}\right)^*$, дуалния базис $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ на $x_1 - p_1 + \mathfrak{M}^2_{p,k^n}, \ldots, x_n - p_n + \mathfrak{M}^2_{p,k^n}$ е базис на допирателното пространство на Зариски $T_p k^n$, Q.E.D.
Преди да формулираме и докажем следващата лема от линейната алгебра да напомним, че ко-ядрото на линейно изображение $\varphi : A \to B$ е фактор-пространството $CoKer(\varphi) = B/Im(\varphi) = B/\varphi(A)$.

Лема 8.10. (Дуалност на ядрото на линейно изображение с ко-ядрото на спрегнатото му) *Нека $L : U \to V$ е линейно изображение на крайномерни пространства U и V над поле k, а $L^* : V^* \to U^*$, $L^*(v^*)(u) = v^*(L(u))$ за $\forall v^* \in V^*$, $\forall u \in U$ е спрегнатото му изображение. Тогава*

$$U^* = Ker(L)^* \oplus Im(L^*).$$

В частност, $CoKer(L^*) \simeq Ker(L)^*$ и L е влагане тогава и само тогава, когато L^* е епиморфизъм.

Доказателство: По Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение на крайномерно пространство, $\dim U = \dim Im(L) + \dim Ker(L)$. Нека $\dim U = m$, $\dim Im(L) = r$, а $u_{r+1}, \ldots, u_m$ е базис на $Ker(L)$. Можем да допълним до базис $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_m$ на U. Тогава $v_1 = L(u_1), \ldots, v_r = L(u_r)$ е базис на $Im(L)$, който се допълва до базис $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ на V. Ако $u_1^*, \ldots, u_m^*$ е дуалният базис на $u_1, \ldots, u_m$, а $v_1^*, \ldots, v_n^*$ е дуалният базис на $v_1, \ldots, v_n$, то $L^*(v_i^*) = u_i^*$ за $1 \leq i \leq r$ и $L^*(v_i^*) = 0$ за $r+1 \leq i \leq n$. По-точно, за $\forall r+1 \leq j \leq m$ е в сила

$$L^*(v_i^*)(u_j) = v_i^*(L(u_j)) = v_i^*(0) = 0,$$

а за $\forall 1 \leq j \leq r$ е изпълнено

$$L^*(v_i^*)(u_j) = v_i^*(L(u_j)) v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } i = j, \\ 0 & \text{за } i \neq j. \end{cases}$$

Следователно $(Ker(L))^* = \mathrm{Span}(u_{r+1}, \ldots, u_m)^* = \mathrm{Span}(u_{r+1}^*, \ldots, u_m^*)$, $Im(L^*) = \mathrm{Span}(u_1^*, \ldots, u_r^*)$ и $(Ker(L))^* \oplus Im(L^*) = U^*$, Q.E.D.
Координатното описание на допирателното пространство на Зариски на афинно пространство k^n предоставя следното координатно описание на допирателното пространство на Зариски към афинно многообразие $X \subseteq k^n$.

Твърдение 8.11. *Нека $X \subseteq k^n$ е неприводимо афинно многообразие, $p \in X$ е точка от него. Тогава допирателното пространство на Зариски $T_p X$ към X в p се влага в допирателното пространство на Зариски*

$$T_p k^n = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \,\Big|\, a_i \in k \right\} \simeq k^n$$

към k^n в p. По-точно, ако идеалът $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_l \rangle_{k[x_1,\ldots,x_n]}$ се поражда от полиномите $f_1, \ldots, f_l \in k[x_1, \ldots, x_n]$, то

$$T_p X = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \,\Big|\, \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f_j) = 0 \ \text{ за } \ \forall 1 \leq j \leq l \right\}.$$

С други думи, T_pX е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_l)}{\partial x_1,\dots,x_n)}(p)\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p(f_1) & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p(f_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p(f_j) & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p(f_j) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p(f_l) & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p(f_l) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = 0_{l\times 1}$$

Доказателство: Тъждественото влагане $\mathrm{Id} : X \to k^n$ индуцира епиморфизъм $\mathrm{Id}^* : k[k^n] = k[x_1,\dots,x_n] \to k[X]$ на афинните координатни пръстени с ядро $I(X)$. За всяка точка $p \in X$, максималният идеал $\mathfrak{M}_p \triangleleft k[x_1,\dots,x_n]$ на p в афинния координатен пръстен на k^n се изобразява върху максималния идеал $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}_p/I(X) \triangleleft k[X]$ на p в афинния координатен пръстен на X. Допълненията на тези максимални идеали се изобразяват по съответния начин, $\mathrm{Id}^* : k[x_1,\dots,x_n] \setminus \mathfrak{M}_p \to k[X] \setminus \mathfrak{N}_p$, така че Id^* индуцира епиморфизъм $\mathrm{Id}^* : \mathcal{O}_{p,k^n} \to \mathcal{O}_{p,X}$ на локалните пръстени с ядро $I(X)\mathcal{O}_{p,k^n}$. Този епиморфизъм се ограничава до епиморфизъм на k-линейни пространства $\mathrm{Id}^* : \mathfrak{M}_{p,k^n} \to \mathfrak{M}_{p,X}$ с ядро $I(X)\mathcal{O}_{p,k^n}$. Оттук получаваме епиморфизъм

$$L = \mathrm{Id}^* : \mathfrak{M}_{p,k^n}/\mathfrak{M}^2_{p,k^n} \longrightarrow \mathfrak{M}_{p,X}/\mathfrak{M}^2_{p,X}$$

на k-линейни пространства с ядро $Ker(L) = I(X)\mathcal{O}_{p,k^n}/\mathfrak{M}^2_{p,k^n}$. Вземайки предвид, че диференциалът $d(\mathrm{Id})_p : T_pX \to T_pk^n$ е дуалното изображение L^* на L, стигаме до извода, че $d(\mathrm{Id})_p$ е влагане. Още повече, съгласно Лема 8.10, ко-ядрото

$$T_pk^n/T_pX = CoKer(L^*) \simeq (Ker(L))^* = \left(I(X)\mathcal{O}_{p,k^n}/\mathfrak{M}^2_{p,k^n}\right)^*.$$

Естественият епиморфизъм

$$\pi : T_pk^n \longrightarrow T_pk^n/T_pX$$

действа по правилото

$$\pi\left(\sum_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)\left(\frac{f}{g} + \mathfrak{M}^2_{p,k^n}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g(p)}\sum_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(f)$$

за произволни $f \in I(X)$, $g \in k[x_1,\dots,x_n]\setminus I(X)$. Следователно ядрото му $T_pX = Ker(\pi)$ се състои от онези $\sum\limits_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, които изпълняват $\sum\limits_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(f) = 0$ за $\forall f \in I(X)$. Произволен полином $f \in I(X) = \langle f_1,\dots,f_l\rangle_{k[x_1,\dots,x_n]}$ може да се представи във вида $f = \sum\limits_{j=1}^l f_jh_j$ чрез подходящи $h_j \in k[x_1,\dots,x_n]$ и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(f) = \sum_{j=1}^l h_j(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(f_j).$$

Всеки допирателен вектор $v = \sum\limits_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ към k^n в p има стойност

$$v(f) = \sum_{i=1}^n a_i\left(\sum_{j=1}^l h_j(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(f_j)\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{l} h_j(p) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (f_j) \right) = \sum_{j=1}^{l} h_j(p) v(f_j).$$

По този начин $v(f) = 0$ за $\forall f \in I(X)$ тогава и само тогава, когато $v(f_j) = 0$ за $\forall 1 \leq j \leq l$, Q.E.D.