Глава 1

Холоморфни функции на няколко променливи. Формула на Коши. Аналитичност.

В настоящия въпрос определяме понятието холоморфна функция, доказваме формулата на Коши и от нея извеждаме аналитичността на холоморфните функции. Еквивалентността между диференцируемост и аналитичност е специфична черта на комплексния анализ, която не е изпълнена в реалния анализ. Например, функцията

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{за } x > 0, \\ 0 & \text{за } x \leq 0 \end{cases}$$

има непрекъснати частни производни $f^{(n)}(x)$ за $\forall n \in \mathbb{N}$, но не се развива в ред на Тейлър около $0 \in \mathbb{R}$, защото $f^{(n)}(0) = 0$ за $\forall n \geq 0$, а $f(x)$ не се анулира тъждествено около 0.

Нека $\mathbb{C}^n$ е $\mathbb{C}$-линейното пространство на наредените n-торки комплексни числа $z = (z_1, \dots, z_n)$ със стандартното скаларно произведение

$$(\ ,\ ) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$(z, t) = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{t_j}.$$

С други думи, $\mathbb{C}$-базисът $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $1 \leq j \leq n$, съставен от наредените n-торки e_j с единствена ненулева компонента 1 на j-то място е обявен за ортонормиран. Ако $i = \sqrt{-1}$ е имагинерната единица, то $e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n$ е $\mathbb{R}$-базис на $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. По-точно, $\forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ с

$$x_j = Re(z_j) = \frac{1}{2}(z_j + \overline{z_j}), \quad y_j = Im(z_j) = \frac{1}{2i}(z_j - \overline{z_j}) \quad \text{за } 1 \leq j \leq n$$

има единствено представяне

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_j e_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j + iy_j) e_j = \sum_{j=1}^{n} Re(z_j) e_j + \sum_{j=1}^{n} Im(z_j)(ie_j).$$

Да напомним, че $\mathbb{C}$-линейните функции $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ се определят еднозначно от образите $\alpha_j = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(e_j) \in \mathbb{C}$ на базисните вектори $e_1, \dots, e_n$ и $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j z_j$ за $\forall z \in \mathbb{C}^n$. Аналогично, всяка $\mathbb{R}$-линейна функция $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ се задава с образите $\beta_j = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(e_j)$, $\gamma_j = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(ie_j)$ на базиса $e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n$, така че

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(z) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j Re(z_j) + \gamma_j Im(z_j) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\beta_j - i\gamma_j}{2} \right] z_j + \left[\frac{\beta_j + i\gamma_j}{2} \right] \overline{z_j}.$$

За произволни $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{C}$ съществува $\mathbb{R}$-линейна функция

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j + \mu_j \overline{z_j} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \mu_j) Re(z_j) + i(\lambda_j - \mu_j) Im(z_j)$$

от $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$. В частност, всяка $\mathbb{C}$-линейна функция е $\mathbb{R}$-линейна. Една $\mathbb{R}$-линейна функция $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{C}$-линейна точно когато $i\beta_j = i\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(e_j) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(ie_j) = \gamma_j$ за $\forall 1 \leq j \leq n$.

Стандартното скаларно произведение в унитарното пространство $\mathbb{C}^n$ индуцира разстоянието

$$\rho : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$\rho(z,t) = ||z-t|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j - t_j|^2}.$$

Аксиомите за разстояние или метрика са

(i) $\rho(z,t) \geq 0$ за $\forall z, t \in \mathbb{C}^n$ с $\rho(z,t) = 0$ тогава и само тогава, когато $z = t$;

(ii) $\rho(t,z) = \rho(z,t)$ за $\forall z, t \in \mathbb{C}^n$;

(iii) (неравенство на триъгълника) $\rho(z,u) \leq \rho(z,t) + \rho(t,u)$ за $\forall z, t, u \in \mathbb{C}^n$. Първите две от тях се проверяват непосредствено, а третата следва от неравенството на Коши-Буняковски

$$|(z-t, t-u)| \leq ||z-t|| ||t-u||.$$

За извеждане на последното да приложим ортогонализация по метода на Грам-Шмид към $z-t$, $t-u$. Това означава замяна на $t-u$ с вектора

$$w = (t-u) - \frac{(t-u, z-t)}{||z-t||^2}(z-t),$$

ортогонален на $z-t$. Сега детерминантата на Грам

$$||z-t||^2||t-u||^2 - |(z-t,t-u)|^2 = \begin{vmatrix} ||z-t||^2 & (z-t,t-u) \\ (t-u,z-t) & ||t-u||^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} ||z-t||^2 & 0 \\ 0 & ||w||^2 \end{vmatrix} = ||z-t||^2||w||^2 \geq 0,$$

съгласно запазването на детерминантата при умножение на ред (стълб) с число и прибавянето му към друг ред (стълб).

Метричното пространство $(\mathbb{C}^n, \rho)$ може да се снабди с така наречената метрична топология. Отворените подмножества в тази топология са празното множество и всевъзможните обединения на отворени кълба

$$B(z,\varepsilon) = \{t \in \mathbb{C}^n \,|\, \rho(z,t) < \varepsilon\}$$

с центрове $z \in \mathbb{C}^n$ и радиуси $\varepsilon > 0$. Ясно е, че посочената фамилия е затворена относно произволни обединения. За да проверим, че тя задава топология, трябва да докажем затвореност относно крайни сечения. Равенството

$$\left(\cup_{(z_1,\varepsilon_1)} B(z_1,\varepsilon_1)\right) \cap \ldots \cap \left(\cup_{(z_k,\varepsilon_k)} B(z_k,\varepsilon_k)\right) = \cup_{(z_s,\varepsilon_s)} \left(B(z_1,\varepsilon_1) \cap \ldots \cap B(z_k,\varepsilon_k)\right)$$

свежда въпроса към представяне на $S := B(z_1,\varepsilon_1) \cap \ldots \cap B(z_k,\varepsilon_k)$ като обединение на кълба. За всяка точка $t \in S$ разглеждаме разстоянието $\varepsilon_s - \rho(z_s,t)$ от t до сферата $\partial B(z_s,\varepsilon_s)$ и полагаме

$$\delta(t) := \min_{1 \leq s \leq k} [\varepsilon_s - \rho(z_s,t)]$$

да е най-малкото разстояние от t до някаква гранична сфера. Твърдим, че кълбото $B(t,\delta(t))$ се съдържа изцяло в S. Наистина, за $\forall u \in B(t,\delta(t))$ и всеки индекс $\forall 1 \leq s \leq k$ е изпълнено

$$\rho(z_s,u) \leq \rho(z_s,t) + \rho(t,u) < \rho(z_s,t) + \delta(t) \leq \rho(z_s,t) + [\varepsilon_s - \rho(z_s,t)] = \varepsilon_s.$$

С това проверихме, че $B(t,\delta(t)) \subseteq S$, а оттам и $\cup_{t\in S} B(t,\delta(t)) \subseteq S$. Включването $S \subseteq \cup_{t\in S} B(t,\delta(t))$ е следствие от индексацията на обединението и дава $S = \cup_{t\in S} B(t,\delta(t))$. Следователно обединенията на отворени кълба образуват фамилия от отворени подмножества и задават топология върху $\mathbb{C}^n$.

Отворените относно метричната топология подмножества $D \subseteq \mathbb{C}^n$ са точно тези, които с всяка своя точка $z \in D$ съдържат кълбо $B(z, \varepsilon) \subset D$ с достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$.
Едно отворено подмножество $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е свързано, ако не може да се представи като непресичащо се обединение на непразни отворени подмножества.

Определение 1.1. *Област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е непразно, отворено и свързано подмножество на $\mathbb{C}^n$.*

Да напомним, че с $o(h)$ означаваме онези функции в околност на $0^n \in \mathbb{C}^n$, за които $\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{o(h)}{||h||} = 0$ при $||h|| = \rho(0^n, h) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} |h_j|^2}$.

Определение 1.2. *Функцията $f : D \to \mathbb{C}$ върху област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е $\mathbb{C}$-диференцируема ($\mathbb{R}$-диференцируема), ако съществува фамилия от $\mathbb{C}$-линейни ($\mathbb{R}$-линейни) функции*

$$\mathcal{L}_z : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

така че за $\forall z \in D$ и $\forall h \in \mathbb{C}^n$ с $z + h \in D$ е изпълнено

$$f(z+h) = f(z) + \mathcal{L}_z(h) + o(h).$$

Всяка $\mathbb{C}$-диференцируема функция $f : D \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{R}$-диференцируема, защото $\mathbb{C}$-линейните фамилии $\mathcal{L}_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ са $\mathbb{R}$-линейни.
Коефициентите на h_j в $\mathbb{C}$-линейните $\mathcal{L}_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ са частните производни на $f(z)$ относно z_j. Бележим ги с $\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)$ и изразяваме $\mathcal{L}_z(h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) h_j$.
Диференциалната форма

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) dz_j$$

се нарича холоморфен диференциал на $f(z)$.
Коефициентите на $\overline{h_j}$ в $\mathbb{R}$-линейните $\mathcal{L}_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ са частните производни $\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z)$, които образуват антихороморфния диференциал

$$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z) d\overline{z_j}.$$

Тогава $\mathcal{L}_z(h) = \sum\limits_{j=1}^{h} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) h_j + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z) \overline{h_j}$ и $df = \partial f + \overline{\partial} f$ е пълният диференциал на $f(z)$.

Лема 1.3. *Нека $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е област, а $f : D \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{R}$-диференцируема функция. В такъв случай, f е $\mathbb{C}$-диференцируема тогава и само тогава, когато*

$$\overline{\partial} f = 0.$$

Доказателство: Използваме, че $\mathbb{R}$-линейните функции $\mathcal{L}_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ от вида $\mathcal{L}_z(h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) h_j + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z) \overline{h_j}$ са $\mathbb{C}$-линейни тогава и само тогава, когато $\mathcal{L}_z(ih) = i\mathcal{L}_z(h)$. По-подробно, равенството

$$\mathcal{L}_z(ih) = \sum_{j=1}^{n} i \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) h_j - i \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z) \overline{h_j} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} i \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) h_j + i \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z) \overline{h_j} = i\mathcal{L}_z(h)$$

е еквивалентно на

$$2i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z)\overline{h_j}\right)=0 \quad \text{за} \quad \forall h\in\mathbb{C}^n.$$

Замествайки последователно с $h_j=1$, $h_i=0$ за $\forall i\neq j$ получаваме $\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z)=0$ за произволно $1\leq j\leq n$. В резултат, условието $\mathcal{L}_z(ih)=i\mathcal{L}(h)$ се оказва равносилно на $\overline{\partial}f=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z)d\overline{z_j}=0$, Q.E.D.

Определение 1.4. *Ако $D\subseteq\mathbb{C}^n$ е област, а $f:D\to\mathbb{C}$ е $\mathbb{R}$-диференцируема функция, то диференциалното уравнение*

$$\overline{\partial}f=0$$

се нарича уравнение на Коши-Риман.

След полагане на $u:=Re(f)$, $v:=Im(f)$ и изразяване на $\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y_j}$ записваме уравненията на Коши-Риман във вида

$$\overline{\partial}f=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}+\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)\right]d\overline{z_j}=0.$$

Последното равенство е равносилно на система

$$\left|\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v}{\partial y_j}=0\\ \\ \frac{\partial u}{\partial y_j}+\frac{\partial v}{\partial x_j}=0\end{array}\right. \quad \forall \text{ за } 1\leq j\leq n. \quad , \quad 1\leq j\leq n. \tag{1.1}$$

от $2n$ частни диференциални уравнения за $\mathbb{R}$-диференцируемите функции $u,v:\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$.
Локалната $\mathbb{C}$-диференцируемост се нарича холоморфност.

Определение 1.5. *Функцията f е холоморфна в точка $a\in\mathbb{C}^n$, ако съществува свързана околност U на a, върху която f е $\mathbb{C}$-диференцируема.*

Следващата лема показва, че $\mathbb{C}$-диференцируемостта в област е локално понятие.

Лема 1.6. *Функция $f:D\to\mathbb{C}$ върху област $D\subseteq\mathbb{C}^n$ е $\mathbb{C}$-диференцируема тогава и само тогава, когато тя е холомирфна във всяка точка $a\in D$.*

Proof. По определение, ако $f:D\to\mathbb{C}$ е $\mathbb{C}$-диференцируема в област $D\subseteq\mathbb{C}^n$, то D е свързана околност на всяка своя точка $a\in D$ и f е холоморфна във всяка точка $a\in D$.
Обратно, нека $f:D\to\mathbb{C}$ е холоморфна във всяка точка $a\in D$. Това означава, че съществуват свързани околности U_a на a върху D, така че ограниченията $f:U_a\to\mathbb{C}$ са $\mathbb{C}$-диференцируеми. По-точно, за $\forall z\in U_a\cap U_b$ и $\forall h\in\mathbb{C}^n$ с $z+h\in U_a\cap U_b$ са изпълнени равенствата

$$f(z+h)=f(z)+\partial_{U_a}f(h)+o(h),$$
$$f(z+h)=f(z)+\partial_{U_b}f(h)+o(h).$$

След почленно изваждане получаваме $(\partial_{U_a}f-\partial_{U_b}f)(h)=o(h)$. Разликата $(\partial_{U_a}f-\partial_{U_b}f)(h)$ на $\mathbb{C}$-линейни функции е $\mathbb{C}$-линейна функция $(\partial_{U_a}f-\partial_{U_b}f)(h)=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j h_j$ с подходящи $\alpha_j\in\mathbb{C}$. За всяко фиксирано $1\leq j\leq n$ заместванията $h_j\in\mathbb{R}$, $h_j>0$ и $h_i=0$ за $\forall i\neq j$ водят до $\alpha_j h_j=o(h)$. Следователно

$$\alpha_j=\lim_{h_j\to 0}\frac{\alpha_j h_j}{h_j}=\lim_{||h||=h_j\to 0}\frac{o(h)}{||h||}=0 \quad \text{за} \quad \forall 1\leq j\leq n$$

и $\partial_{U_a} f|_{U_a\cap U_b} = \partial_{U_b} f|_{U_a\cap U_b}$. Това дава възможност за коректно определяне на $\partial f : D \to \mathbb{C}$ чрез $\partial f|_{U_a} = \partial_{U_a} f$ за всяка свързана околност U_a на $a \in D$ върху D и установяване на $\mathbb{C}$-диференцируемостта на $f : D \to \mathbb{C}$, Q.E.D.

□

Сега ще напомним накратко теоремата на Коши за холоморфна функция на една променлива и ще изведем формулата на Коши за холоморфна функция на произволен брой променливи.

Определение 1.7. *Фамилията $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ от подмножества S_α на топологично пространство X се нарича центрирана, ако произволна крайна подфамилия $S_{\alpha_1},\dots,S_{\alpha_k}$ има непразно сечение $\cap_{s=1}^k S_{\alpha_s} \neq \emptyset$.*

Лема 1.8. *Върху компактно топологично пространство X всяка центрирана фамилия $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ от затворени подмножества $F_\alpha \subseteq X$ има непразно сечение $\cap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset$.*

Доказателство: Да допуснем противното. Тогава от $\cap_{\alpha\in A} F_\alpha = \emptyset$ следва, че $\cup_{\alpha\in A}(X \setminus F_\alpha) = X \setminus (\cap_{\alpha\in A} F_\alpha) = X$. По определението за компактност на X съществува крайно отворено подпокритие $V_1 \cup \ldots \cup V_p = X$ на $\{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Ако $V_j \subseteq X \setminus F_{\alpha_j}$ за $1 \leq j \leq p$, то $X = \cup_{j=1}^p (X \setminus F_{\alpha_j}) = X \setminus \left(\cap_{j=1}^p F_{\alpha_j}\right)$. Но по определението за центрирана фамилия $\cap_{j=1}^p F_{\alpha_j} \neq \emptyset$. Противоречието доказва, че $\cap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset$, Q.E.D.

Теорема 1. (Теорема на Коши) *Ако $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция в област $D \subseteq \mathbb{C}$ с частично C^1-гладка граница ∂D, то*

$$\int_{\partial D} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Доказателство: За произволно подмножество S на D ще казваме, че S е компактно вложено в D и ще записваме $S \subset\subset D$, ако затворената обвивка $\overline{S}$ на S се съдържа в D. Първо ще докажем, че за произволен компактно вложен триъгълник $\Delta \subset\subset D$ е в сила

$$\int_{\partial \Delta} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Допускаме, че $M := \left| \int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta \right| > 0$. Разделяме Δ на четири еднакви помежду си триъгълника $\Delta_1^{(j)}$, $1 \leq j \leq 4$ чрез прекарване на средните отсечки на Δ. Тогава

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = \sum_{j=1}^{4} \int_{\Delta_1^{(j)}} f(\zeta)d\zeta,$$

защото обиколката по контурите на всички $\Delta_1^{(j)}$, $1 \leq j \leq 4$, преминава през средните отсечки по два пъти и в противоположни посоки. Следователно

$$M = \left| \int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta \right| \leq \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\partial\Delta_1^{(j)}} f(\zeta)d\zeta \right|$$

и съществува $1 \leq j_1 \leq 4$ с

$$\left| \int_{\partial\Delta_1^{(j_1)}} f(\zeta)d\zeta \right| \geq \frac{M}{4}.$$

С индукция по $m \in \mathbb{N}$, да предположим, че триъгълниците

$$\Delta \supset \Delta_1^{(j_1)} \supset \ldots \supset \Delta_{m-2}^{(j_{m-2})} \supset \Delta_{m-1}^{(j_{m-1})}$$

изпълняват неравенствата

$$\left| \int\limits_{\partial \Delta_s^{(j_s)}} f(\zeta) d\zeta \right| \geq \frac{M}{4^s}$$

за $\forall 1 \leq s \leq m-1$. Разбиваме $\Delta_{m-1}^{(j_{m-1})}$ на четири еднакви триъгълника $\Delta_m^{(1)}, \ldots \Delta_m^{(4)}$ и избираме $\Delta_m^{(j_m)}$, $1 \leq j_m \leq 4$ с условието

$$\left| \int\limits_{\partial \Delta_m^{(j_m)}} f(\zeta) d\zeta \right| \geq \frac{M}{4^m}.$$

Вземайки предвид, че затвореният триъгълник $\overline{\Delta}$ е компакт относно метричната топология в $\mathbb{C}$, по Лема 1.8 получаваме съществуването на точка $a \in \cap_{m \in \mathbb{N}} \overline{\Delta_m^{(j_m)}}$. Функцията f е холоморфна в a, така че съществува околност $U_a \subset \Delta$, в която

$$f(\zeta) = f(a) + \partial f(\zeta - a) + o(\zeta - a)$$

за $\forall \zeta \in U_a$. Избираме достатъчно голямо $m \in \mathbb{N}$, така че $\partial \Delta_m^{(j_m)} \subset U_a$. Фиксираме частично диференцируема параметризация $\gamma : [0,1] \to \partial \Delta_m^{(j_m)}$ с $\gamma(0) = \gamma(1)$. Тогава

$$\int\limits_{\partial \Delta_m^{(j_m)}} f(a) d\zeta = f(a) \int\limits_0^1 d\gamma(t) = f(a)\gamma(t) \Big|_0^1 = 0,$$

и

$$\int\limits_{\partial \Delta_m^{(j_m)}} \partial f(\zeta - a) d\zeta = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(a)(\gamma(t) - a) d\gamma(t) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) \int\limits_0^1 \frac{d(\gamma(t) - a)^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z}(a) \left[\gamma(t) - a\right]^2 \Big|_0^1 = 0,$$

откъдето

$$\int\limits_{\partial \Delta_m^{(j_m)}} f(\zeta) d\zeta = \int\limits_{\partial \Delta_m^{(j_m)}} o(\zeta - a) d\zeta.$$

Сега за произволно $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че $\frac{|o(\zeta - a)|}{||\zeta - a||} < \varepsilon$ за всички $\zeta \in \Delta_m^{(j_m)}$ с $||\zeta - a|| < \delta$. Ако $|\partial \Delta_m^{(j_m)}|$ е периметърът на $\Delta_m^{(j_m)}$, то $||\zeta - a|| \leq |\partial \Delta_m^{(j_m)}|$ за $\forall \zeta \in \partial \Delta_m^{(j_m)}$. По този начин оценяваме

$$\left| \int\limits_{\partial \Delta_m^{(j_m)}} o(\zeta - a) d\zeta \right| \leq \varepsilon |\partial \Delta_m^{(j_m)}|^2.$$

Но $|\partial \Delta_m^{(j_m)}| = \frac{|\partial \Delta|}{2^m}$, така че получаваме

$$\frac{M}{4^m} \leq \left| \int\limits_{\partial \Delta_m^{(j_m)}} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \varepsilon \frac{|\partial \Delta|^2}{4^m}.$$

За $\varepsilon < \frac{M}{|\partial\Delta|^2}$ горните две неравенства си противоречат и доказват, че

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Триангулираме областта D. Това означава приближаване чрез триъгълници с произволно малки страни или периметри, пресичащи се най-много по границите си. Това дава приближение на частично непрекъснатата граница ∂D с достатъчно малки отсечки и

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

Q.E.D.

Твърдение 1.9. (Формула на Коши) *Нека*

$$\mathcal{P}(a,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_j - a_j| < \varepsilon_j, \forall 1 \leq j \leq n\} = D(a_1,\varepsilon_1) \times \ldots \times D(a_n,\varepsilon_n)$$

е полидиск с център $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ *и поли-радиус* $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \left(\mathbb{R}^{>0}\right)^n$, *а*

$$T^n(a,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_j - a_j| = \varepsilon_j, \forall 1 \leq j \leq n\}$$

е Декартовото произведение на граничните окръжности

$$\partial D(a_j,\varepsilon_j) = \{z_j \in \mathbb{C} \,|\, |z_j - a_j| = \varepsilon_j\}$$

на дисковете

$$D(a_j,\varepsilon_j) = \{z_j \in \mathbb{C} \,|\, |z_j - a_j| < \varepsilon_j\}.$$

Да предположим, че функцията $f : \overline{\mathcal{P}(a,\varepsilon)} \to \mathbb{C}$ *е непрекъсната и за всяка точка* $z_{\widehat{j}} = (z_1,\ldots,z_{j-1},z_{j+1},\ldots,z_n) \in \prod\limits_{s=1}^{j-1} D(a_s,\varepsilon_s) \times \prod\limits_{s=j+1}^{n} D(a_s,\varepsilon_s)$ *ограничението* $f : z_1 \times \ldots \times z_{j-1} \times D(a_j,\varepsilon_j) \times z_{j+1} \times \ldots \times z_n \to \mathbb{C}$ *е холоморфна функция на* z_j. *Тогава в произволна точка* $z \in \mathcal{P}(a,\varepsilon)$ *е изпълнено*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

където $\zeta - z := (\zeta_1 - z_1)\ldots(\zeta_n - z_n)$, $d\zeta := d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$.

Доказателство: Ще работим с индукция по n. За $n = 1$ избираме достатъчно малко $\delta > 0$, така че $\overline{D(z_1,\delta)} \subset D(a_1,\varepsilon_1)$ и разглеждаме отворения венец $D_{z_1} := D(a_1,\varepsilon_1) \setminus \overline{D(z_1,\delta)}$. Функцията $\frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1}$ е холоморфна в D_{z_1}, така че изпълнява Теоремата на Коши

$$0 = \int\limits_{\partial D_{z_1}} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 = \int\limits_{\partial D(a_1,\varepsilon_1)} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 - \int\limits_{\partial D(z_1,\delta)} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1.$$

Остава да докажем, че

$$I_1(\delta) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(z_1,\delta)} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 = f(z_1),$$

за да получим формулата на Коши в случая $n = 1$. Полагаме $\zeta_1 = z_1 + \delta e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi,\pi]$ и изразяваме

$$I_1(\delta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_1 + \delta e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}} \delta i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z_1 + \delta e^{i\theta}) d\theta.$$

По предположение, f е непрекъсната в $\overline{D(z_1,\delta)}$. Следователно, за всяко $\rho > 0$ съществува $\tau > 0$, така че при $\delta < \tau$ е изпълнено $|f(z_1 + \delta e^{i\theta}) - f(z_1)| < \rho$. Оттук, $|I_1(\delta) - f(z_1)| < \rho$. Това означава, че $\lim\limits_{\delta\to 0} I_1(\delta) = f(z_1)$. Но

$$I_1(\delta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(a_1,\varepsilon_1)} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1$$

не зависи от δ, така че $I_1(\delta) = f(z_1)$ и това доказва формулата на Коши за $n = 1$.

При произволно $n \in \mathbb{N}$, прилагаме индукционното предположение

$$f(z_1, z') = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{T^{n-1}(a',\varepsilon')} \frac{f(z_1,\zeta')}{\zeta' - z'} d\zeta'$$

към непрекъснатите функции $f(z_1,\ ) : \overline{\mathcal{P}(a',\varepsilon')} \to \mathbb{C}$ с холоморфни ограничения $f(z_2,\ ) : z_1 \times \dots z_{j-1} \times D(a_j,\varepsilon_j) \times z_{j+1} \times \dots \times z_n \to \mathbb{C}$ за $\forall 2 \leq j \leq n$, $z_s \in D(a_s,\varepsilon_s)$. Сега използваме формулата на Коши за холоморфните функции $f(\ ,\zeta') : D(a_1,\varepsilon_1) \to \mathbb{C}$ на една комплексна променлива, с непрекъснати продължения $f(\ ,\zeta') : \overline{D(a_1,\varepsilon_1)} \to \mathbb{C}$ и получаваме

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

Q.E.D.

Следствие 1.10. (Интегрални формули за производните) *Ако $f : \overline{\mathcal{P}(a,\varepsilon)} \to \mathbb{C}$ е непрекъсната, а $f : \mathcal{P}(a,\varepsilon) \to \mathbb{C}$ е холоморфна относно всяка от променливите $z_1,\dots,z_n$, то за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ е в сила*

$$\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) = \frac{k!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^k(\zeta - a)} d\zeta.$$

Доказателство: Прилагаме $\frac{\partial^{|k|}}{\partial z^k} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}$ към формулата на Коши

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{за} \quad \forall z \in \mathcal{P}(a,\varepsilon).$$

С индукция по $k_j \geq 0$, за произволни $z_j \neq \zeta_j$ е в сила

$$\frac{\partial^{k_j}}{\partial z_j}(\zeta_j - z_j)^{-1} = k_j!(\zeta_j - z_j)^{-k_j - 1},$$

така че

$$\frac{\partial^{|k|}(\zeta - z)^{-1}}{\partial z^k} = \frac{k!}{(\zeta - z)^k(\zeta - z)}.$$

Следователно

$$\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} \frac{\partial^{|k|}(\zeta - z)^{-1}}{\partial z^k} f(\zeta) d\zeta = \frac{k!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z)} d\zeta,$$

Q.E.D.

За да докажем аналитичността на холоморфните функции ни е нужна следната

Лема 1.11. (Лема на Абел) *Нека c_k е редица от комплексни числа, номерирана с наредени n-торки $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ неотрицателни цели k_j, $a \in \mathbb{C}^n$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \left(\mathbb{R}^{\geq 0}\right)^n$, а M е такава положителна константа, че*

$$|c_k|\rho^k = |c_k|\rho_1^{k_1} \ldots \rho_n^{k_n} \leq M$$

за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$. Тогава във всеки компакт

$$K \subset \mathcal{P}(a, \rho) = D(a_1, \rho_1) \times \ldots \times D(a_n, \rho_n)$$

степенният ред $\sum\limits_k c_k(z-a)^k$ е абсолютно и равномерно сходящ към безкрайно $\mathbb{C}$-диференцируема функция $f(z)$ с

$$\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) = \frac{1}{k_1! \ldots k_n!}\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}(a) = c_k.$$

В частност, $f(z)$ е холоморфна в $\mathcal{P}(a, \rho)$.

Доказателство: Първо ще установим, че за всеки компакт $K \subset \mathcal{P}(a, \rho)$ съществува $q \in [0, 1)^n$, така че $K \subseteq \overline{\mathcal{P}(a, q\rho)}$. Наистина, за всяко $1 \leq j \leq n$ съществува

$$r_j := \max_{z \in K} |z_j - a_j| \in [0, \rho_j].$$

Ако допуснем, че някое $r_j = \rho_j$, то $K \cap \partial\mathcal{P}(a, \rho) \neq \emptyset$, доколкото $|z_j - a_j|$ достига максимума си ρ_j върху компакта K. Следователно $r_j < \rho_j$ и за $q_j := \frac{r_j}{\rho_j}$, $1 \leq j \leq n$ е изпълнено $K \subseteq \overline{\mathcal{P}(a, q\rho)}$.
По този начин, за $\forall z \in K$ е в сила

$$|c_k(z-a)^k| \leq |c_k| q^k \rho^k \leq q^k M$$

и редът

$$\left|\sum_k c_k(z-a)^k\right| \leq \sum_k \left|c_k(z-a)^k\right| \leq \sum_k \left(q^k M\right) = M \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-q_j} < \infty$$

е абсолютно и равномерно сходящ в K.
Нека $f(z) := \sum\limits_k c_k(z-a)^k$, а $S_m(z) := \sum\limits_{|k| \leq m} c_k(z-a)^k$ е редица от частични суми. Полиномите $S_m(z)$ на $z_1, \ldots, z_n$ от степен $\leq m$ са $\mathbb{C}$-диференцируеми и техните холоморфни диференциали

$$\partial S_m = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{|k| \leq m, k_j \geq 1} k_j c_k \frac{(z-a)^k}{z_j - a_j}\right) dz_j$$

са полиноми на $z_1, \ldots, z_n$ от степен $\leq m-1$. Достатъчно е да докажем, че редовете

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\partial S_m}{\partial z_j} = \sum_{k, k_j \geq 1} k_j c_k \frac{(z-a)^k}{z_j - a_j}$$

са абсолютно и равномерно сходящи в $K \subset \overline{\mathcal{P}(a, q\rho)}$ за $\forall 1 \leq j \leq n$. По-точно, $\mathbb{C}$-диференцируемостта на S_m дава

$$S_m(z+h) = S_m(z) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S_m}{\partial z_j} h_j + o(h)$$

за $\forall z, z+h \in K \subset \overline{\mathcal{P}(a, q\rho)}$. След граничен преход при $m \to \infty$ получаваме

$$f(z+h) = f(z) + \sum_{j=1}^n \left(\lim_{m \to \infty} \frac{\partial S_m}{\partial z_j}\right) h_j + o(h).$$

Следователно абсолютно и равномерно сходящите редове

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) := \lim_{m\to\infty} \frac{\partial S_m}{\partial z_j}(z)$$

задават холоморфния диференциал

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$$

на $f(z)$.
За проверка на абсолютната и равномерната сходимост на

$$\sum_{k,k_j\geq 1} k_j c_k \frac{(z-a)^k}{z_j - a_j}$$

в $K \subseteq \overline{\mathcal{P}(a, q\rho)}$ при $\forall 1 \leq j \leq n$ да означим $(q')^{k'} := \prod\limits_{s\neq j} q_s^{k_s}$, $q_{\max} := \max(q_1, \ldots, q_n)$.
Тогава

$$\lim_{|k|\to\infty} \sqrt[|k|]{\left| k_j c_k \frac{(z-a)^k}{z_j - a_j}\right|} \leq \lim_{|k|\to\infty} \sqrt[|k|]{k_j[|c_k|\rho^k](q')^{k'} q_j^{k_j - 1} \rho_j^{-1}} \leq$$

$$\lim_{|k|\to\infty} \sqrt[|k|]{|k| M q_{\max}^{|k|} q_j^{-1} \rho_j^{-1}} = q_{\max} < 1$$

съгласно $\lim\limits_{N\to\infty} \sqrt[N]{N} = 1$ и $\lim\limits_{N\to\infty} \sqrt[N]{C} = 1$ за произволна константа $C > 0$. Следователно

$$\left| \sum_{k,k_j\geq 1} k_j c_k \frac{(z-a)^k}{z_j - a_j} \right| \leq \sum_{k,k_j\geq 1} q_{\max}^{|k|} < \infty$$

и редът $\frac{\partial S_m}{\partial z_j} = \sum\limits_{k,k_j} k_j c_k \frac{(z-a)^k}{z_j - a_j}$ абсолютно и равномерно сходящ към

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial S_m}{\partial z_j}(z).$$

С индукция по $|k|$ установяваме съществуването на $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}$ с $k_j \geq 1$ като граница

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial S_m^{(k_1 \ldots, k_{j-1}, k_j - 1, k_{j+1}, \ldots, k_n)}}{\partial z_j}$$

на частичните суми $S_m^{(k, \ldots, k_{j-1}, k_j - 1, k_{j+1}, \ldots, k_n)}$ на $\frac{\partial^{|k|-1} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_{j-1}^{k_{j-1}} \partial z_j^{k_j - 1} \partial z_{j-1}^{k_{j-1}} \ldots \partial z_n^{k_n}}$.
Почленното диференциране на абсолютно и равномерно сходящия ред $f(z) = \sum\limits_k c_k (z-a)^k$, последвано от заместване в a дава $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) = k! c_k$, Q.E.D.

Теорема 2. *Нека $f : \overline{\mathcal{P}(a, \varepsilon)} \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функция върху затворения полидиск $\overline{\mathcal{P}(a, \varepsilon)} = \overline{D(a_1, \varepsilon_1)} \times \ldots \times \overline{D(a_n, \varepsilon_n)}$ и холоморфна в $\mathcal{P}(a, \varepsilon)$ относно всяка от променливите си $z_1, \ldots, z_n$. Следователно Тейлъровият ред*

$$f(z) = \sum_k \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}$$

е абсолютно и равномерно сходящ върху всеки компакт $K \subset \mathcal{P}(a, \varepsilon)$ и $f(z)$ е комплексно аналитична в $\mathcal{P}(a, \varepsilon)$.
В частност, $f(z)$ и всички частни производни $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(z)$ са холоморфни в $\mathcal{P}(a, \varepsilon)$.

Доказателство: Съгласно формулата на Коши (Твърдение 1.9),

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{за} \quad \forall z \in \mathcal{P}(a,\varepsilon).$$

Ако $z \in \mathcal{P}(a,\varepsilon)$ и $\zeta \in T^n(a,\varepsilon)$, то $|z_j - a_j| < \varepsilon_j = |\zeta_j - a_j|$ за $\forall 1 \leq j \leq n$. По този начин се получават сходящи геометрични прогресии $\left\{ \left(\frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j} \right)^{k_j} \right\}_{k_j=0}^{\infty}$, чиито частни са с модул $\left| \frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j} \right| < 1$. Сумираме

$$\sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{(z_j - a_j)^{k_j}}{(\zeta_j - a_j)^{k_j}} = \frac{1}{1 - \frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j}}.$$

Това позволява да представим

$$\frac{1}{\zeta_j - z_j} = \frac{1}{\zeta_j - a_j} \frac{1}{\left(1 - \frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j}\right)} = \frac{1}{\zeta_j - a_j} \sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{(z_j - a_j)^{k_j}}{(\zeta_j - a_j)^{k_j}} = \sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{(z_j - a_j)^{k_j}}{(\zeta_j - a_j)^{k_j}(\zeta_j - a_j)}.$$

Накратко записваме

$$\frac{1}{\zeta - z} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\zeta_j - z_j} = \prod_{j=1}^{n} \left[\sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{(z_j - a_j)^{k_j}}{(\zeta_j - a_j)^{k_j}(\zeta_j - a_j)} \right] = \sum_{k} \frac{(z-a)^k}{(\zeta - a)^k(\zeta - a)}.$$

Замествайки във формулата на Коши получаваме

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} f(\zeta) \left[\sum_{k} \frac{(z-a)^k}{(\zeta - a)^k(\zeta - a)} \right] d\zeta.$$

Редът $\sum\limits_{k} \frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^k(\zeta-a)}$ е абсолютно и равномерно сходящ, така че неговият Риманов интеграл е сума на интегралите на членовете му и

$$f(z) = \sum_{k} \left[\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^k(\zeta - a)} d\zeta \right] (z-a)^k.$$

Ще оценим отгоре модула на коефициента

$$c_k := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^k(\zeta - a)} d\zeta$$

на този степенен ред. За целта означаваме

$$M := \max_{\zeta \in T^n(a,\varepsilon)} |f(\zeta)|$$

и пресмятаме, че $|(\zeta - a)^k(\zeta - a)| = \varepsilon^k \varepsilon$, където $\varepsilon^k \varepsilon = \prod\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j^{k_j+1}$. От друга страна,

$$\mathrm{Vol}(T^n(a,\varepsilon)) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{Vol}(\partial D(a_j, \varepsilon_j)) = \prod_{j=1}^{n} (2\pi\varepsilon_j) = (2\pi)^n \varepsilon,$$

така че

$$|c_k| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n(a,\varepsilon)} \frac{|f(\zeta)|}{|(\zeta - a)^k(\zeta - a)|} d\mathrm{Vol}(T^n(a,\varepsilon)) \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{M}{\varepsilon^k \varepsilon} (2\pi)^n \varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^k}.$$

Сега $|c_k|\varepsilon^k \leq M$ дава възможност да приложим Лемата на Абел (Лема 1.11) и да получим равномерната сходимост на $\sum\limits_k c_k(z-a)^k$ върху всеки компакт $K \subset \mathcal{P}(a,\varepsilon)$ и холоморфността на сумата $f(z)$ на този ред. Още повече,

$$c_k = \frac{1}{k!}\frac{{}^{|k|}f}{\partial z^k}(a)$$

с локално холоморфни $\frac{\partial^{|k|}f}{\partial z^k}$, съгласно безкрайната $\mathbb{C}$-диференцируемост на f, Q.E.D.

Следствие 1.12. (Неравенства на Коши) *Ако $f : \overline{\mathcal{P}(a,\varepsilon)} \to \mathbb{C}$ е непрекъсната, а $f : \mathcal{P}(a,\varepsilon) \to \mathbb{C}$ е холоморфна относно всяка от променливите $z_1,\dots,z_n$, то за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ е в сила*

$$\left|\frac{\partial^{|k|}f}{\partial z^k}(a)\right| \leq \frac{k!}{\varepsilon^k}M,$$

където $M := \max\limits_{\zeta\in T^n(a,\varepsilon)} |f(\zeta)|$.

Да фиксираме точка $a \in \mathbb{C}^n$ и да разгледаме множеството $\mathcal{F}_a$ на комплексно-значните функции от свързана околност на a. Ако $f : U_a \to \mathbb{C}$ и $g : V_a \to \mathbb{C}$ са такива функции, то определяме поточкова сума $f+g : U_a \cap V_a \to \mathbb{C}$, $(f+g)(z) = f(z)+g(z)$ за $\forall z \in U_a \cap V_a$ и произведение $fg : U_a \cap V_a \to \mathbb{C}$, $(fg)(z) = f(z)g(z)$ за $\forall z \in U_a \cap V_a$. Непосредствено се проверява, че $\mathcal{F}_a$ е комутативен пръстен с единица относно така въведените операции. Занапред няма да споменаваме, че всички тъждества на функции се считат за изпълнени върху отворено подмножество на сечението на дефиниционните им области. Подмножеството $\mathcal{O}_a \subset \mathcal{F}_a$ на холоморфните в околност на $a \in \mathbb{C}^n$ функции е комутативен пръстен с единица, както и подмножеството $\mathcal{D}_a \subset \mathcal{F}_a$ на $\mathbb{R}$-диференцируемите функции. Ще използваме аналитичността на холоморфните функции, за да докажем следното

Твърдение 1.13. *Множеството $\mathcal{O}_a$ на холоморфните в точка $a \in \mathbb{C}^n$ функции е комутативна област с единица.*

Доказателство: Първо ще проверим, че подмножеството $\mathcal{O}_a \subset \mathcal{F}_a$ е затворено относно изваждане и умножение, така че $\mathcal{O}_a$ е подпръстен на $\mathcal{F}_a$, а оттам и комутативен пръстен.
Ако $f : U_a \to \mathbb{C}$ и $g : V_a \to \mathbb{C}$ са $\mathbb{C}$-диференцируеми, то тези функции са $\mathbb{C}$-диференцируеми върху свързаната компонента W_a на $U_a \cap V_a$, съдържаща a. В резултат,

$$f(z+h) = f(z) + \partial f(h) + o(h),$$
$$g(z+h) = g(z) + \partial g(h) + o(h)$$

за $\forall z \in W_a$ и $\forall h \in \mathbb{C}^n$ с $z+h \in W_a$. Почленното изваждане на горните равенства дава

$$(f-g)(z+h) = (f-g)(z) + (\partial f - \partial g)(h) + o(h)$$

с $\mathbb{C}$-линейна фамилия от функции $(\partial f - \partial g)(h)$ на h. По определение, това означава $\mathbb{C}$-диференцируемост на $f-g : W_a \to \mathbb{C}$, фиксира холоморфния диференциал

$$\partial(f-g) = \partial f - \partial g = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) - \frac{\partial g}{\partial z_j}(z)\right]dz_j$$

и частните производни

$$\frac{\partial(f-g)}{\partial z_j}(z) = \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) - \frac{\partial g}{\partial z_j}(z).$$

Аналогично, ако $f : U_a \to \mathbb{C}$ и $g : V_a \to \mathbb{C}$ са $\mathbb{C}$-диференцируеми в свързани околности U_a, V_a на $a \in \mathbb{C}^n$, то произведението $fg : W_a \to \mathbb{C}$ е определено в свързаната компонента W_a на $U_a \cap V_a$, съдържаща a. За всички $z \in W_a$ и $h \in \mathbb{C}^n$ с $z + h \in W_a$ е изпълнено

$$(fg)(z+h) = f(z+h)g(z+h) = [f(z) + \partial f(h) + o(h)][g(z) + \partial g(h) + o(h)],$$

$$(fg)(z+h) = (fg)(z) + [f(z)\partial g(h) + g(z)\partial f(z)] + \partial f(h)\partial g(h) + o(h),$$

съгласно $[f(z) + \partial f(h)]o(h) = o(h)$, $o(h)[g(z) + \partial g(h)] = o(h)$ и $o(h)o(h) = o(h)$. Твърдим, че

$$\partial f(h)\partial g(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\frac{\partial g}{\partial z_i}(z) h_j h_i = o(h).$$

За целта, оценяваме $|h_j||h_i| \leq \frac{1}{2}(|h_j|^2 + |h_i|^2) \leq \frac{1}{2}||h||^2$ и получаваме, че

$$\left| \frac{\partial f(h)\partial g(h)}{||h||} \right| \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\right| \left|\frac{\partial g}{\partial z_i}(z)\right| \frac{|h_j||h_i|}{||h||} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\right| \left|\frac{\partial g}{\partial z_i}(z)\right| \frac{1}{2}||h||$$

клони към 0 при $||h|| \to 0$. Функцията $f(z)\partial g(h) + g(z)\partial f(h)$ е $\mathbb{C}$-линейна относно h и

$$\partial(fg) = f\partial g + g\partial f.$$

Единицата на $\mathcal{F}_a$ е константата 1 и се съдържа в $\mathcal{O}_a$, така че $\mathcal{O}_a$ е комутативен пръстен с единица.

Остава да докажем, че ако f и g са холоморфни в околност на $a \in \mathbb{C}^n$ и не се анулират тъждествено върху нито една околност на a, то fg не се анулира в нито една околност на a. Допускаме противното и избираме достатъчно малък полидиск $\mathcal{P}(a, \varepsilon)$, така че

$$f(z) = \sum_k \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a)\frac{(z-a)^k}{k!} \quad \text{и} \quad g(z) = \sum_k \frac{\partial^{|k|} g}{\partial z^k}(a)\frac{(z-a)^k}{k!}$$

се развиват в ред на Тейлър и $fg|_{\mathcal{P}(a,\varepsilon)} \equiv 0$. По предположение, съществуват полииндекси $m, l \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ с $\frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(a) \neq a$ и $\frac{\partial^{|l|} g}{\partial z^l}(a) \neq 0$. Без ограничение ще считаме, че m и l с това свойство имат минимална сума $|m| = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, $|l| = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i$. За достатъчно малки $\varepsilon_o > 0$ и произволни $\theta_j \in [0, 2\pi)$ полагаме $z_j = a_j + \varepsilon^{i\theta_j}$, $\left(e^{i\theta}\right)^k = \left(e^{i\theta_1}\right)^{k_1} \dots \left(e^{i\theta_n}\right)^{k_n}$ и получаваме

$$\left(\sum_{|k| \geq |m|} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) \frac{\left(e^{i\theta}\right)^k}{k!} \varepsilon_o^k \right) \left(\sum_{|k| \geq |l|} \frac{\partial^{|k|} g}{\partial z^k}(a) \frac{\left(e^{i\theta}\right)^k}{k!} \varepsilon_o^k \right) \equiv 0$$

върху $\mathcal{P}(a, \varepsilon)$. Делим горното равенство на $\varepsilon_o^{|m|+|l|}$ и пускаме $\varepsilon_o \to 0$, за да изведем равенството

$$\left(\sum_{|k| = |m|} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) \left(e^{i\theta}\right)^k \right) \left(\sum_{|k| = |l|} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} g}{\partial z^k}(a) \left(e^{i\theta}\right)^k \right) \equiv 0$$

на хомогенни полиноми на $e^{i\theta_1}, \dots e^{i\theta_n}$ от степен $|m| + |l|$. С други думи, полиномът

$$P(z_1, \dots, z_n) = \left(\sum_{|k| = |m|} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) z^k \right) \left(\sum_{|k| = |l|} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} g}{\partial z^k}(a) z^k \right)$$

се анулира за всички $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \partial D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. С индукция по броя на променливите n ще докажем, че ако полином $P(z_1, \dots, z_n)$ се анулира върху Декартовото произведение на n единични окръжности, то $P(z_1, \dots, z_n) \equiv 0$. Поради липсата на делители на нулата в пръстена на полиномите на $z_1, \dots, z_n$ с комплексни коефициенти, оттук следва $\sum\limits_{|k|=|m|} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) z^k \equiv 0$ или $\sum\limits_{|k|=|l|} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} g}{\partial z^k}(a) z^l \equiv 0$, което противоречи на $\frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(a) \neq 0$, съответно, на $\frac{\partial^{|l|} g}{\partial z^l}(a) \neq 0$. При $n = 1$ всеки ненулев полином $P(z_1)$ има най-много краен брой корени и не може да се анулира във всички точки на единичната окръжност $\partial D(0,1)$. В общия случай, представяме

$$P(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) = \sum_{j=0}^{d} a_j(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^j$$

като полином на z_n, чиито коефициенти $a_j(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{n-1}]$ са полиноми на $z_1, \dots, z_{n-1}$ с коефициенти от $\mathbb{C}$. За произволни фиксирани точки $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1} \in \partial D(0,1)$, полиномът $P(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, z_n) \in \mathbb{C}[z_n]$ се анулира в безбройно много $\zeta_n \in \partial D(0,1)$, само ако е тъждествено нулев, т.е. $a_j(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) = 0$ за $\forall 0 \leq j \leq d$. По индукционно предположение, от $a_j(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) = 0$ за $\forall \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1} \in \partial D(0,1)$ следва $a_j(z_1, \dots, z_{n-1}) \equiv 0 \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{n-1}]$, а оттам и $P(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \equiv 0$. Следователно комутативният пръстен с единица $\mathcal{O}_a$ няма делители на нулата и е комутативна област, Q.E.D.

От безкрайната $\mathbb{C}$-диференцируемост на холоморфните функции се получава следната Теорема на Морера, обратна на Теоремата на Коши (Теорема 1).

Твърдение 1.14. (Теорема на Морера) *Ако функцията $f : D \to \mathbb{C}$ е непрекъсната в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и*

$$\int\limits_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

за всеки компактно вложен триъгълник $\Delta \subset\subset D$, то f е холоморфна в D.

Доказателство: Фиксираме точка $z_o \in D$. Тогава за произволни $z \in D$ функцията

$$F(z) := \int\limits_{z_o}^{z} f(\zeta) d\zeta$$

е коректно определена, доколкото условието $\int\limits_{\partial \Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$ за произволен триъгълник $\overline{\Delta} \subseteq D$ дава $\int\limits_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$ за произволна затворена крива $\gamma \subset D$, чрез триангулация на областта, заградена от γ. Така построената функция $F : D \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{C}$-диференцируема, а оттам и холоморфна в D. Съгласно Теорема 2 производната и $\frac{\partial F}{\partial z}(z) = f(z)$ е също холоморфна в D, Q.E.D.