Глава 10

Теорема на Бохнер-Севери за аналитично продължение от границата

В този въпрос ще докажем, че една комплексно-значна функция върху гладката граница на ограничена област със свързано допълнение се продължава холоморфно в самата област, стига да изпълнява така наречените допирателни уравнения на Коши-Риман върху нейната граница. За да определим тези уравнения, да разгледаме реална хиперповърхнина $S \subset \mathbb{C}^n$, която в своя околност $U \supset S$ се задава във вида

$$S = \{z \in U \,|\, \varphi(z) = 0\},$$

чрез C^1-функция $\varphi : U \to \mathbb{R}$ с неанулиращ се градиент

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial z_n}, \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z_n}}\right) \neq 0 \quad \text{в } U.$$

Векторът $\nabla\varphi(\zeta) \in \mathbb{C}^n$ е нормален към S във всяка точка $\zeta \in S$. Анти-холоморфният диференциал $\overline{\partial}\varphi(\zeta) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z_j}}(\zeta)d\overline{z_j}$ на φ определя анти-холоморфната нормала към S в $\zeta \in S$, стига $\overline{\partial}\varphi(\zeta) \neq 0$.
За реалната функция $\varphi : U \to \mathbb{R}$ условията $\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z_j}} = 0$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z_j} = 0$ са еквивалентни, така че $\nabla\varphi(z) \neq 0$ за $\forall z \in U$ точно когато $\overline{\partial}\varphi(z) \neq 0$ за $\forall z \in U$. Унитарното скаларно произведение

$$(z, w) = \sum_{j=1}^{n} z_j\overline{w_j} \quad \text{за } \forall z, w \in \mathbb{C}^n$$

индуцира унитарно скаларно произведение

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j(\zeta)d\overline{z_j}, \sum_{k=1}^{n} b_k(\zeta)d\overline{z_k}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\zeta)\overline{b_j(\zeta)}$$

в пространството на анти-холоморфните диференциални форми $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j d\overline{z_j}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j d\overline{z_j}$ в точка $\zeta \in \mathbb{C}^n$. За произволна C^1-функция $f : U \to \mathbb{C}$ разлагаме анти-холоморфния диференциал $\overline{\partial}f(\zeta) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial\overline{z_j}}(\zeta)d\overline{z_j}$ в ортогонална сума

$$\overline{\partial}f(\zeta) = \overline{\partial}_N f(\zeta) + \overline{\partial}_T f(\zeta)$$

на нормалната компонента $\overline{\partial}_N f(\zeta) = \lambda\overline{\partial}\varphi(\zeta)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и допирателната компонента $\overline{\partial}_T f(\zeta)$. Операторът $\overline{\partial}_T$ се нарича допирателен оператор на Коши-Риман. Той е въведен от Дж. Кон през 1965г.
Функцията $f \in C^1(U)$ изпълнява допирателното уравнение на Коши-Риман, ако $\overline{\partial}_T f(\zeta) = 0$ за $\forall\zeta \in S$. В такъв случай се казва накратко, че f е CR-функция върху S.

Определение 10.1. *Функцията $f : S \to \mathbb{C}$ върху реална хиперповърхнина $S = \{z \in U \,|\, \varphi(z) = 0\}$ с $\varphi \in C^1(U)$ и $\nabla\varphi \neq 0$ в U изпълнява допирателните уравнения на Коши-Риман $\overline{\partial}_T f = 0$, ако някакво нейно C^1-продължение $F : V \to \mathbb{C}$ в околност V на S изпълнява $\overline{\partial}_T F(\zeta) = 0$ във всяка точка $\zeta \in S$.*

Лема 10.2. *Условието $\overline{\partial}_T f = 0$ за функция $f : S \to \mathbb{C}$ е коректно определено, т.е. не зависи от избора на C^1-продължение $F : U \to \mathbb{C}$ в околност U на S.*

За доказателството на тази лема ни е необходима следната

Лема 10.3. (Реален аналог на слабата теорема за нулите) *Нека $W \subset \mathbb{R}^n$ е област, $\Phi \in C^k(W)$ за $k \geq 1$, градиентът $\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right) \neq 0$ не се анулира в W и $\Psi \in C^k(W)$ е функция, която се анулира във всички точки, в които $\Phi(x) = 0$. Тогава съществува функция $H \in C^{k-1}(W)$, така че $\Psi(x) = H(x)\Phi(x)$ за $\forall x \in W$.*

Доказателство: Достатъчно е да установим, че всяка точка $r \in W$ има околност V_r, в която $\Psi(x) = H_r(x)\Phi(x)$ за подходяща реална C^{k-1}-функция $H_r : V_r \to \mathbb{R}$. Причина за това е, че в произволно непразно сечение $V_r \cap V_s$, множеството на точките, в които $\Phi(x) \neq 0$ е отворено и навсякъде гъсто, благодарение на $\nabla\Phi \neq 0$ в W. По-точно, всяка околност U_v на точка $v \in V_r \cap V_s$ съдържа $x \in U_v$ с $\Phi(x) \neq 0$. При допускане на противното съществува околност U_v на v, в която Φ се анулира тъждествено и градиентът $\nabla\Phi|_{U_v} \equiv 0$ се анулира тъждествено в тази околност. За $\forall x \in V_r \cap V_s$ с $\Phi(x) \neq 0$ е в сила $H_r(x) = \frac{\Psi(x)}{\Phi(x)} = H_s(x)$. По непрекъснатост, оттук следва $H_r|_{V_r \cap V_s} \equiv H_s|_{V_r \cap V_s}$. За конструкцията на H_r избираме достатъчно малка изпъкнала околност V_r на $r \in W$, в която $\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} \neq 0$ след евентуална пермутация на $x_1, \ldots, x_n$. (По определение, V_r е изпъкнала околност на r, ако заедно с произволни свои две точки съдържа цялата отсечка, определена от тях.) По теоремата за неявната функция съществува околност $V_{r'} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ на $r' \in \mathbb{R}^{n-1}$ и функция $\Phi_1 : V_{r'} \to \mathbb{R}$, така че $\Phi(x', x_n) = 0$ за $x = (x', x_n) \in V_r$ тогава и само тогава, когато $x_n = \Phi_1(x')$. След смяна на променливите $y' = x'$, $y_n = x_n - \Phi_1(x') = x_n - \Phi_1(y')$, равенството $\widetilde{\Phi}(y) = \Phi(y', y_n + \Phi_1(y')) = \Phi(x) = 0$ е еквивалентно на $y_n = 0$ и $\widetilde{\Phi}(y) = y_n f(y)$ за никъде неанулираща се C^k-функция f. От предположението за нулите на Φ и Ψ следва, че $\widetilde{\Psi}(y) = \Psi(y', y_n + \Phi_1(y')) = \Psi(x)$ изпълнява равенството $\widetilde{\Psi}(y', 0) = 0$ за $\forall y' \in V_{r'}$. Съгласно изпъкналостта на V_r можем да представим

$$\widetilde{\Psi}(y) = \widetilde{\Psi}(y', y_n) - \widetilde{\Psi}(y', 0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\widetilde{\Psi}(y', ty_n)dt = y_n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y_n}\widetilde{\Psi}(y', ty_n)dt.$$

Следователно

$$\widetilde{H_r}(y) := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y_n}\widetilde{\Psi}(y', ty_n)dt$$

е $C^{k-1}(V_r)$-функция, изпълняваща условието $\widetilde{\Psi}(x) = \widetilde{H_r}(y)y_n$. Полагайки $H_r(x) = \frac{\widetilde{H_r}(x', x_n - \Phi_1(x'))}{f(x', x_n - \Phi_1(x'))} = \frac{\widetilde{H_r}(y)}{f(y)}$ получаваме $\psi(x) = H_r(x)\Phi(x)$, Q.E.D.

Доказателство на Лема 10.2: Ако $F : U \to \mathbb{C}$ и $G : U \to \mathbb{C}$ са две C^1-продължения на $f : S \to \mathbb{C}$ в околност U на S, то $F - G$ се анулира върху S. С други думи, ако $\varphi : U \to \mathbb{R}$ е дефиниционната функция на S, то $\varphi(z) = 0$ води до $F(z) = G(z)$. Съгласно Лема 10.3 съществува непрекъсната функция h с условието $F - G = h\varphi$. Следователно $\overline{\partial}F - \overline{\partial}G = h|_S\overline{\partial}\varphi$ съгласно анулирането на φ върху S. По определение, анти-холоморфният диференциал $\overline{\partial}\varphi$ е пропорционален на нормалните компоненти $\overline{\partial}_N F$ и $\overline{\partial}_N G$, така че $\overline{\partial}_T F = \overline{\partial}_T G$ не зависи от избора на C^1-продължение на $f|_S$ в околност U на S, Q.E.D.

Твърдение 10.4. *Нека $S = \{z \in U \mid \varphi(z) = 0\}$ е гладка реална хиперповърхнина в $\mathbb{C}^n$, а $f : U \to \mathbb{C}$ е комплексно-значна функция в околност U на S върху $\mathbb{C}^n$. Тогава следните условия са еквивалентни:*
(i) $\overline{\partial}_T f = 0$ във $\forall \zeta \in S$, т.е. f изпълнява допирателните уравнения на Коши-Риман върху S;
(ii) $\overline{\partial} f \wedge \overline{\partial}\varphi = 0$ във $\forall \zeta \in S$;
(iii) $\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} = 0$ за всеки комплексен допирателен вектор $u \in T^{\mathbb{C}}_{\zeta} S$ и $\forall \zeta \in S$;
(iv) $df \wedge dz = df \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = 0$ във всяка точка $\zeta \in S$.

Доказателство: $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ Разлагаме $\overline{\partial} f = \overline{\partial}_T f + \overline{\partial}_N f$ в допирателна и нормална компоненти. След това използваме, че формата $\overline{\partial}_N f$ е пропорционална на $\overline{\partial}\varphi$, за да получим, че $\overline{\partial} f \wedge \overline{\partial}\varphi = \overline{\partial}_T f \wedge \overline{\partial}\varphi$. Оттук е ясно, че ако $\overline{\partial}_T f = 0$, то $\overline{\partial} f \wedge \overline{\partial}\varphi = 0$. Обратно, ако $\overline{\partial} f \wedge \overline{\partial}\varphi = 0$, то съгласно $\overline{\partial}\varphi \neq 0$ и ортогоналността на $\overline{\partial}\varphi$ и $\overline{\partial}_T f$ оттук следва $\overline{\partial}_T f = 0$.
За доказване на еквивалентността на (iii) и (iv) с допирателните уравнения на Коши-Риман (i) е достатъчно да разгледаме точката $\zeta = 0^n \in S$ и да предполагаме, че

$$S = \{z \in U \mid Im(z_n) = 0\}$$

в околност на 0^n. Тогава $\varphi(z) = \frac{z_n - \overline{z_n}}{2i}$ е C^∞-функция с анти-холоморфен градиент $\overline{\partial}\varphi = \frac{i}{2} d\overline{z_n} \neq 0$ във всяка точка на U. Комплексното допирателно пространство

$$T^{\mathbb{C}}_{0^n} S = \left\{ u = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \;\middle|\; u(Im(z_n)) = 0 \right\} = \left\{ u = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \;\middle|\; a_j \in \mathbb{C} \right\}.$$

Частната производна $\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j}$ за произволен комплексен допирателен вектор $u = \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in T^{\mathbb{C}}_{0^n} S$. Условието $\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} = 0$ за $\forall u \in T^{\mathbb{C}}_{0^n} S$ е еквивалентно на $\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(0^n) = 0$ за $\forall 1 \leq j \leq n-1$. От друга страна, $\overline{\partial}_N f(0^n) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z_n}}(0^n) d\overline{z_n}$, така че

$$\overline{\partial}_T f(0^n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(0^n) d\overline{z_j}.$$

По този начин, допирателните уравнения на Коши-Риман $\overline{\partial}_T f(0^n) = 0$ са равносилни на анулирането на частните производни $\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(0^n) = 0$ за $1 \leq j \leq n-1$ в $0^n \in S$. Това доказва еквивалентността на (i) и (iii) в точката $0^n \in S$. Непосредствено пресмятаме, че

$$df \wedge dz = (\partial f + \overline{\partial} f) \wedge dz =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j} \right) \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j} \right) \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n.$$

Вземайки предвид $d\overline{z_n} = dz_n$ върху S, получаваме

$$df \wedge dz = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j} \right) \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = \left(\overline{\partial}_T f \right) \wedge dz.$$

Оттук става ясно, че $df \wedge dz = 0$, ако са изпълнени допирателните уравнения на Коши-Риман $\overline{\partial}_T f = 0$. Обратно, ако $df \wedge dz = 0$, то съгласно независимостта на диференциалите $d\overline{z_1}, \ldots, d\overline{z_{n-1}}, dz_1, \ldots, dz_n$ следва $\overline{\partial}_T f = 0$, Q.E.D.
Сега ще опишем допирателните уравнения на Коши-Риман върху единичната сфера $S = \partial B(0^n, 1)$, използвайки условието $\frac{\partial f}{\partial \overline{u}}(\zeta) = 0$ за произволен комплексен допирателен вектор $u \in T^{\mathbb{C}}_{\zeta} S$ в произволна точка $\zeta \in S$. По-точно, ако $S = \{z \in U \mid \varphi(z) = 0\}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \neq 0$ в околност на $\zeta \in S$, то

$$T^{\mathbb{C}}_{\zeta} S = \left\{ u = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \,\middle|\, u(\varphi) = 0 \right\} = \left\{ u = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} = 0 \right\}$$

е $(n-1)$-мерно комплексно линейно пространство с базис

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_n} \quad \text{за } \forall 1 \leq j \leq n-1.$$

По този начин, $f : U \to \mathbb{C}$ изпълнява допирателните уравнения на Коши-Риман точно когато

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{u_j}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z_n}} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z_j}} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_n}} \quad \text{за } \forall 1 \leq j \leq n-1.$$

Сферата

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, ||z||^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 1 \right\},$$

е определена като множеството на нулите на функцията $\varphi(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j} - 1$.
Допирателните уравнения на Коши-Риман върху S са еквивалентни на

$$z_n \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = z_j \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} \quad \text{за } \forall 1 \leq j \leq n-1$$

във всички точки $z \in S$ с $\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z_n}} = z_n \neq 0$.
За да продължим тази функция до холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ с непрекъснато продължение $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, са ни необходими още сведения за формата на Мартинели-Бохнер $\omega_{MB}(\zeta - z)$.

Лема 10.5. *За произволни естествени $n \geq 2$ и $1 \leq k \leq n$, нека*

$$\Omega_k(\zeta - z) =$$

$$\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \left[\sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^{k-j}}{||\zeta - z||^{2n-2}} \frac{(\overline{\zeta_j} - \overline{z_j})}{(\zeta_k - z_k)} d\overline{\zeta}_{\widehat{j},\widehat{k}} \wedge d\zeta + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{(-1)^{j-k-1}}{||\zeta - z||^{2n-2}} \frac{(\overline{\zeta_j} - \overline{z_j})}{(\zeta_k - z_k)} d\overline{\zeta}_{\widehat{k},\widehat{j}} \wedge d\zeta \right],$$

където $d\overline{\zeta}_{\widehat{j},\widehat{k}} = d\overline{\zeta_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta_{j-1}} \wedge d\overline{\zeta_{j+1}} \wedge \ldots \wedge \overline{\zeta_{k-1}} \wedge d\overline{\zeta_{k+1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta_n}$ *за* $1 \leq j < k \leq n$ *и* $\zeta_k \neq z_k$. *Тогава диференциалът*

$$d\Omega_k(\zeta - z) = \omega_{MB}(\zeta - z)$$

относно $\zeta \in \mathbb{C}^n$ *е формата на Мартинели-Бохнер*

$$\omega_{MB}(\zeta - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}(\overline{\zeta_j} - \overline{z_j})}{||\zeta - z||^{2n}} d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta,$$

а частната производна

$$\frac{\partial \Omega_k(\zeta - z)}{\partial \overline{z_k}} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n ||\zeta - z||^{2n}}\left[\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}(\overline{\zeta_j}-\overline{z_j})d\overline{\zeta}_{\widehat{j},\widehat{k}}\wedge d\zeta + \sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{j-k-1}(\overline{\zeta_j}-\overline{z_j})d\overline{\zeta}_{\widehat{k},\widehat{k}}\wedge d\zeta\right]$$

има особеност само за $\zeta = z$.

Доказателство: Вземайки предвид, че

$$\overline{\partial}\left(||\zeta - z||^{-2n+2}\right) = \overline{\partial}\left[\sum_{s=1}^{n}(\zeta_s - z_s)(\overline{\zeta_s}-\overline{z_s})\right]^{-n+1} = -\frac{(n-1)}{||\zeta - z||^{2n}}\left(\sum_{s=1}^{n}(\zeta_s - z_s)d\overline{\zeta_s}\right).$$

пресмятаме, че

$$d\Omega_k(\zeta - z) =$$

$$\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\left[\frac{(n-1)(-1)^{k-1}}{||\zeta - z||^{2n-2}(\zeta_k - z_k)}d\overline{\zeta}_{\widehat{k}}\wedge d\zeta - \frac{(n-1)}{||\zeta - z||^{2n}(\zeta_k - z_k)}\left(\sum_{s=1}^{n}(\zeta_s - z_s)d\overline{\zeta_s}\right)\wedge\right.$$

$$\left.\left(\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}(\overline{\zeta_j}-\overline{z_j})d\overline{\zeta}_{\widehat{j},\widehat{k}}\wedge d\zeta + \sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{k-j-1}(\overline{\zeta_j}-\overline{z_j})d\overline{\zeta}_{\widehat{k},\widehat{j}}\wedge d\zeta\right)\right] =$$

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{||\zeta - z||^{2n-2}(\zeta_k - z_k)}d\overline{\zeta}_{\widehat{k}}\wedge d\zeta + \sum_{j\neq k}\frac{(-1)^{j-1}(\overline{\zeta_j}-\overline{z_j})}{||\zeta - z||^{2n}}d\overline{\zeta}_{\widehat{j}}\wedge d\zeta +\right.$$

$$\left.\frac{(-1)^k\left(\sum\limits_{j\neq k}|\zeta_j - z_j|^2\right)}{||\zeta - z||^{2n}(\zeta - z_k)}d\overline{\zeta}_{\widehat{k}}\wedge d\zeta\right] = \omega_{MB}(\zeta - z).$$

Непосредствено пресмятаме, че

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\left(||\zeta - z||^{-2n+2}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\left[\sum_{s=1}^{n}(\zeta_s - z_s)(\overline{\zeta_s}-\overline{z_s})\right]^{-n+1} = \frac{(n-1)(\zeta_k - z_k)}{||\zeta - z||^{2n}},$$

откъдето

$$\frac{\partial \Omega_k(\zeta - z)}{\partial \overline{z_k}} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left[\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-j}(\overline{\zeta_j}-\overline{z_j})}{||\zeta - z||^{2n}}d\overline{\zeta}_{\widehat{j},\widehat{k}}\wedge d\zeta + \sum_{j=k+1}^{n}\frac{(-1)^{k-j-1}(\overline{\zeta_j}-\overline{z_j})}{||\zeta - z||^{2n}}d\overline{\zeta}_{\widehat{k},\widehat{j}}\wedge d\zeta\right],$$

Q.E.D.

Теорема 12. (Бохнер-Севери (1943г.)) *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ е ограничена област с гладка граница ∂D и свързано допълнение $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, а $f : \partial D \to \mathbb{C}$ е C^1-функция, която изпълнява допирателните уравнения на Коши-Риман във всяка точка на ∂D. Тогава f може да се продължи до холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ с непрекъснато продължение $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$.*

Доказателство: Ако функцията f изпълнява допирателните уравнения на Коши-Риман върху ∂D, то $df \wedge d\zeta = 0$ съгласно Твърдение 10.4(iv). Следователно $df(\zeta) \wedge \Omega_k(\zeta - z) = 0$, откъдето и

$$d(f(\zeta)\Omega_k(\zeta - z)) = f(\zeta)d\Omega_k(\zeta - z) = f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta - z) \tag{10.1}$$

за $\forall \zeta \in \partial D$ и $\zeta_k \neq z_k$. Аналогично, $df(\zeta) \wedge \frac{\partial \Omega_k(\zeta - z)}{\partial \overline{z_k}} = 0$ води до

$$d\left(f(\zeta)\frac{\partial \Omega_k(\zeta - z)}{\partial \overline{z_k}}\right) = f(\zeta)\frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}d\Omega_k(\zeta - z) = f(\zeta)\frac{\partial \omega_{MB}(\zeta - z)}{\partial \overline{z_k}} \tag{10.2}$$

за произволни различни $\zeta \in \partial D$ и $z \in \mathbb{C}^n$. Непосредствено се проверява, че функцията

$$F(z) := \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta - z)$$

е холоморфна за $\forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \partial D$. По-точно, от (10.2) и формулата на Стокс следва, че

$$\frac{\partial F(z)}{\partial \overline{z_k}} = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\frac{\partial \omega_{MB}(\zeta - z)}{\partial \overline{z_k}} = \int\limits_{\partial D} d\left(f(\zeta)\frac{\partial \Omega_k(\zeta - z)}{\partial \overline{z_k}}\right) = 0,$$

защото границата ∂D на D е цикъл, т.е. $\partial(\partial D) = \emptyset$. Твърдим, че $F(z) = 0$ за $\forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Наистина, съгласно компактността на ∂D, за произволно фиксирано $1 \leq k \leq n$ е определено реалното неотрицателно число

$$M_k = \max_{\zeta \in \partial D} |\zeta_k|.$$

Тогава

$$D_k = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_k| > M_k\} = \mathbb{C}^{k-1} \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, M_k)}] \times \mathbb{C}^{n-k}$$

е отворено подмножество на $\mathbb{C}^n \setminus D$. За $\forall z \in D_k$ и $\forall \zeta \in \partial D$ е в сила $\zeta_k \neq z_k$, така че формата $\Omega_k(\zeta - z)$ е коректно определена и

$$F(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta - z) = \int\limits_{\partial D} d(f(\zeta)\Omega_k(\zeta - z)) = 0$$

съгласно (10.1), формулата на Стокс и $\partial(\partial D) = \emptyset$. От предположението за свързаност на $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и Принципа за аналитично продължение следва анулирането на F в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.

Остава да докажем, че $\lim\limits_{z \to a, z \in D} F(z) = f(a)$ за $\forall a \in \partial D$, за да получим, че

$$f(z) := \begin{cases} F(z) & \text{за } z \in D, \\ f(\zeta) & \text{за } \zeta \in \partial D. \end{cases}$$

е непрекъснато продължение $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ на $f : \partial D \to \mathbb{C}$ с холоморфно ограничение $f : D \to \mathbb{C}$ във вътрешността. Достатъчно е да установим, че функцията

$$g(z) := \int\limits_{\partial D} [f(\zeta) - f(a)]\omega_{MB}(\zeta - z)$$

е коректно определена и непрекъсната в околност на $a \in \partial D$. Тогава от

$$g(z) = F(z) - f(a)\int\limits_{\partial D} \omega_{MB}(\zeta - z)$$

получаваме $\lim\limits_{z \to a, z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}} g(z) = 0$ съгласно $F(z) = 0$ и $\int\limits_{\partial D} \omega_{MB}(\zeta - z) = 0$ за $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Следователно $\lim\limits_{z \to a, z \in D} g(z) = \lim\limits_{z \to a, z \in D} F(z) - f(a) = 0$, благодарение на $\int\limits_{\partial D} \omega_{MB}(\zeta - z) = 1$ за $\forall z \in D$. За коректността на

$$g(a) = \int\limits_{\partial D} [f(\zeta) - f(a)]\omega_{MB}(\zeta - a) =$$

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\int\limits_{\partial D} \frac{[f(\zeta) - f(a)](\overline{\zeta_j} - \overline{a_j})}{||\zeta - a||^{2n}} d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta$$

е достатъчно да установим, че за всяко $1 \leq j \leq n$ функцията

$$h_j(\zeta) := \frac{[f(\zeta) - f(a)](\overline{\zeta_j} - \overline{a_j})}{||\zeta - a||^{2n}}$$

има сходящ интеграл

$$I_j = \int\limits_{\partial D \cap U_a} h_j(\zeta) d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta < \infty$$

в някаква околност U_a на $a \in \partial D$. Наистина, в сферични координати с център a имаме

$$Re(\zeta_1) = Re(a_1) + \rho \cos \varphi_1,$$
$$Re(\zeta_k) = Re(a_k) + \rho \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-1} \cos \varphi_k \quad \text{за } 2 \leq k \leq n,$$
$$Im(\zeta_m) = Im(a_m) + \rho \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n+m-1} \cos \varphi_{n+m} \quad \text{за } 1 \leq m \leq n-1,$$
$$Im(\zeta_n) = Im(a_n) + \rho \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{2n-2} \sin \varphi_{2n-1}.$$

Тогава $h_j(\zeta) = O(\rho^{-2n+2})$ всички събираеми на формата $d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta$ от степен $2n-1$ са кратни поне на ρ^{2n-2}. Следователно при пресмятане на I_j, интегрирането относно $d\rho$ е върху неотрицателни степени на $\rho \to 0$ и $I_j < \infty$ са сходящи. След като установихме коректната определеност на g в околност на $a \in \partial D$, да изберем досаттъчно малко околност Σ_a на a в D и да представим

$$g(z) - g(a) = J_1 + J_2 \quad \text{за } z \in D$$

чрез

$$J_1 := \int\limits_{\Sigma_a \cap \partial D} [f(\zeta) - f(a)][\omega_{MB}(\zeta - z) - \omega_{MB}(\zeta - a)],$$
$$J_2 := \int\limits_{\partial D \setminus \Sigma_a} [f(\zeta) - f(a)][\omega_{MB}(\zeta - z) - \omega_{MB}(\zeta - a)].$$

Твърдим, че J_1 клони към нула, когато диаметърът на Σ_a приближава 0. Поточно, за всяко фиксирано $z \in D$, преминаваме към сферични координати с център $a \in \partial D$ спрямо ζ. Тогава формата

$$\theta(z, a) = [f(\zeta) - f(a)][\omega_{MB}(\zeta - z) - \omega_{MB}(\zeta - a)]$$

е ограничена, така че интегралът и клони към нула, когато лицето на Σ_a клони към нула. От друга страна, ако $z \to a$, то можем да считаме, че $z \in \Sigma_a$, така че диференциалната форма $\theta(z, a)$ е неособена, а оттам и непрекъсната за $\zeta \in \partial D \setminus \Sigma_a$. Оттук $J_2 = \int\limits_{\partial \setminus \Sigma_a} \theta(z, a)$ зависи непрекъснато от z и $\lim\limits_{z \to a} J_2 = 0$.
Следователно $\lim\limits_{z \to a} g(z) = g(a)$ и g е непрекъсната в $a \in \partial D$, Q.E.D.
Теорема 12 не е в сила за $n = 1$, защото тогава формата на Коши

$$\omega_{MB}(\zeta_1 - z_1) = \frac{1}{2\pi i} 1 \frac{1}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1$$

не е точна върху границата ∂D. Функцията

$$F(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1$$

е холоморфна във всички точки $z_1 \notin \partial D$, но F не се анулира в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$.
Ще приложим Теоремата на Бохнер-Севери, за да докажем следната

Теорема 13. (Теорема за премахване на компактните особености) *Нека D е област в $\mathbb{C}^n$ за някое $n \geq 2$, $K \subset D$ е компактно подмножество със свързано допълнение $D \setminus K$, а $f : D \setminus K \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция върху това допълнение. Тогава f може да се продължи до холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$.*

Доказателство: Нека $G_1 \subset \mathbb{C}^n$ и $G_2 \subset \mathbb{C}^n$ са такива области, че $K \subset G_1 \subset G_2 \subset D$, разликата $G := G_2 \setminus G_1$ има компактна затворена обвивка $\overline{G} \subset D \setminus K$, а допълненията $\mathbb{C}^n \setminus G_1$ и $\mathbb{C}^n \setminus G_2$ са свързани. Функцията f е холоморфна в $\overline{G}$, така че изпълнява допирателните уравнения на Коши-Риман върху границата $\partial G = \partial G_2 - \partial G_1$ и

$$(df(\zeta) \wedge d\zeta)|_{\partial G_1} = 0, \tag{10.3}$$

$$(df(\zeta) \wedge d\zeta)|_{\partial G_2} = 0. \tag{10.4}$$

По формулата на Мартинели-Бохнер (Твърдение 9.2) имаме

$$f(z) = \int_{\partial G_2} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta - z) - \int_{\partial G_1} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta - z) \quad \text{за } \forall z \in G,$$

съгласно холоморфността на $f : G \to \mathbb{C}$ и непрекъснатостта на $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$. Както доказахме в Теоремата на Бохнер-Севери (Теорема 12), за $\forall z \in G \subset (\mathbb{C}^n \setminus G_1)$ е изпълнено

$$\int_{\partial G_1} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta - z) = 0,$$

Следователно

$$f(z) = \int_{\partial G_2} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta - z) \quad \text{за } \forall z \in G.$$

По Теорема 12 и (10.4), функцията

$$F(z) = \int_{\partial G_2} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta - z)$$

е холоморфна във всяка точка $z \in G_2$ Съгласно $F(z) = f(z)$ за $\forall z \in G_2 \setminus K$, функцията $F : G_2 \to \mathbb{C}$ е холоморфно продължение на $f : G_2 \setminus K \to \mathbb{C}$. По предположение, допълнението $D \setminus K$ е свързано, така че F задава холоморфно продължение на f в цялата област D, Q.E.D.

Да отбележим, че твърдението на теоремата не е изпълнено, ако допълнението $D \setminus K$ не е свързано. Например, ако $D = B(0^n, 1)$ е единичното кълбо в $\mathbb{C}^n$ за $n \geq 2$, а $K = \partial B\left(0^n, \frac{1}{2}\right) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, ||z|| = \frac{1}{2} \right\}$ е концентричната сфера с радиус $\frac{1}{2}$, то функцията

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{за } z \in B\left(0^n, \frac{1}{2}\right), \\ 1 & \text{за } z \in B(0^n, 1) \setminus \overline{B\left(0^n, \frac{1}{2}\right)} \end{cases}$$

е холоморфна в $B(0^n, 1) \setminus \partial\left(0^n, \frac{1}{2}\right)$, но няма холоморфно продължение в $B(0^n, 1)$. От Теорема 13 следва, че холоморфните функции на $n \geq 2$ променливи не могат да имат изолирани особени точки, защото тяхното допълнение е свързано. За разлика от това, съществуват холоморфни функции на една променлива, които имат изолирани особености. Например, функцията $f(z) = \frac{1}{z}$ има изолирана особена точка $z = 0$ в комплексната равнина $\mathbb{C}$.