Глава 11

Теорема на Хартогс за аналитично продължение. Аналитичност върху хиперповърхнина при наличие на непрекъснатост.

В унитарното пространство $\mathbb{C}^m$ със скаларно произведение $(x,y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{y_i}$ разглеждаме индуцираната норма $||z|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |z_i|^2}$ и метрика $\rho(x,y) = ||x-y||$. За произволна крива $\gamma_o : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ и произволно деление $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ на интервала $[a,b]$ определяме дължината $l(\gamma_o)$ на γ_o като

$$l(\gamma_o) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} \rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) \,\middle|\, k \in \mathbb{N},\, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \right\}.$$

Ако γ_o има крайна дължина $l(\gamma_o) < \infty$, то казваме, че γ_o е ректифицируема крива. Образът $\Gamma_o = \gamma_o([a,b]) \subset \mathbb{C}^m$ също ще наричаме крива в $\mathbb{C}^m$.

Лема 11.1. (Холоморфна зависимост на интеграла от параметър) *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е област, а $\Gamma = \gamma\left(\prod_{i=1}^{m}[a_i,b_i]\right) = \gamma_1([a_1,b_1]) \times \ldots \times \gamma_m([a_m,b_m]) \subset \mathbb{C}^m$ е компактно Декартово произведение на ректифицируеми криви. Да предположим, че*

$$g(\zeta, z) : \Gamma \times D \longrightarrow \mathbb{C}$$

е непрекъсната функция с холоморфни ограничения

$$g(\zeta, \ ) : \zeta \times D \longrightarrow \mathbb{C}$$

за $\forall \zeta \in \Gamma$ и частните производни

$$\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial z_j} : \Gamma \times D \longrightarrow \mathbb{C}$$

са непрекъснати за $\forall 1 \leq j \leq n$. Тогава

$$G(z) = \int_{\Gamma} g(\zeta, z) d\zeta$$

е холоморфна функция в D, с частни производни

$$\frac{\partial G}{\partial z_j}(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial z_j} d\zeta \qquad \text{за } \forall 1 \leq j \leq n.$$

Доказателство: За $\forall z \in D$ избираме полидиск $\mathcal{P}(z, r^n) = \prod_{j=1}^{n} D(z_j, r) \subset D$. За произволни комплексни числа $t_j \in D(0,r)$ образуваме векторите $h_j =$

$(0,\ldots,0,t_j,0,\ldots,0)\in\mathbb{C}^n$ с единствени евентуално ненулеви компоненти t_j на място $1\le j\le n$. Тогава $z+h_j\in D$ и разглеждаме диференчните частни

$$\frac{G(z+h_j)-G(z)}{t_j}=\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta,z+h_j)-g(\zeta,z)}{t_j}d\zeta.$$

Холоморфността на $g(\zeta,\ ):D\to\mathbb{C}$ за произволно фиксирано $\zeta\in\Gamma$ ни дава право да представим тази функция чрез формула на Тейлър от ред 1 с остатъчен член във формата на Лагранж,

$$\frac{g(\zeta,z+h_j)-g(\zeta,z)}{t_j}=\frac{\partial g(\zeta,z+\theta h_j)}{\partial z_j}\qquad\text{за } \theta\in[0,1].$$

В резултат,

$$\frac{G(z+h_j)-G(z)}{t_j}-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial z_j}d\zeta=\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial g(\zeta,z+\theta h_j)}{\partial z_j}-\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial z_j}\right]d\zeta.$$

При фиксиране на $z_o\in D$ функцията $\frac{\partial g(\zeta,z_o+\theta h_j)}{\partial z_j}$ е непрекъсната върху Декартовото произведение $\Gamma\times[0,1]\times\mathcal{P}(z,r^n)$. За произволно $0<\rho<r$ затвореният полидиск $\overline{\mathcal{P}(z,\rho)}=\prod\limits_{j=1}^{n}\overline{D(z_j,\rho)}\subset\prod\limits_{j=1}^{n}D(z_j,r)=\mathcal{P}(z,r^n)$ е компактно вложен в $\mathcal{P}(z,r^n)$. Следователно $\frac{\partial g(\zeta,z_o+\theta h_j)}{\partial z_j}$ е непрекъсната, а оттам и равномерно непрекъсната върху компакта $\Gamma\times[0,1]\times\overline{\mathcal{P}(z,\rho^n)}\ni(\zeta,\theta,h_j)$. В частност, за $\forall\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, така че за произволни $(\zeta,\theta)\in\Gamma\times[0,1]$ и $t_j\in D(0,\delta)$ е изпълнено

$$\left|\frac{\partial g(\zeta,z+\theta h_j)}{\partial z_j}-\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial z_j}\right|<\varepsilon.$$

В резултат,

$$\left|\frac{G(z+h_j)-G(z)}{t_j}-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial z_j}d\zeta\right|<\varepsilon l(\gamma_1)\ldots l(\gamma_m)$$

или границата

$$\lim_{t_j\to0}\left[\frac{G(z+h_j)-G(z)}{t_j}-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial z_j}d\zeta\right]=0.$$

По определението за частна производна съществува

$$\frac{\partial G(z)}{\partial z_j}:=\lim_{t_j\to0}\left[\frac{G(z+h_j)-G(z)}{t_j}\right]=\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial z_j}d\zeta,$$

и $G(z)$ е холоморфна, Q.E.D.

Теорема 14. (Теорема на Хартогс за аналитично продължение) *Нека $D_o\subset D\subset\mathbb{C}^m$ са области, $\mathcal{P}=\mathcal{P}(a,r)=D(a_1,r_1)\times\ldots\times D(a_n,r_n)\subset\mathbb{C}^n$ е полидиск с център $a\in\mathbb{C}^n$ и поли-радиус $r=(r_1,\ldots,r_n)\in\left(\mathbb{R}^{>0}\right)^n$, а торът $T=\partial D(a_1,r_1)\times\ldots\times\partial D(a_n,r_n)$ е границата на Шилов на $\mathcal{P}$. Да предположим, че функцията*

$$f:(\mathcal{P}\times D_o)\cup(T\times D)\longrightarrow\mathbb{C}$$

изпълнява едновременно следните условия:
(i) $f:T\times D\to\mathbb{C}$ е непрекъсната;
(ii) $f(\zeta,\ ):D\to\mathbb{C}$ е холоморфна за $\forall\zeta\in T$;
(iii) частните производни $\frac{\partial f}{\partial z_j}:T\times D\to\mathbb{C}$ са непрекъснати за $\forall 1\le j\le m$;
(iv) $f(\ ,a):\mathcal{P}\to\mathbb{C}$ е холоморфна функция за всяко $a\in D_o$;

(v) $f(\ ,a) : \mathcal{P} \cup T \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функция за всяко $a \in D_o$.
Тогава f има холоморфно продължение

$$f : \mathcal{P} \times D \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Доказателство: Разглеждаме функцията

$$F : \mathcal{P} \times D \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$F(w,z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_T \frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w} d\zeta.$$

От Лема 11.1 за холоморфна зависимост на интеграла от параметър следва холоморфността на F върху $\mathcal{P} \times D$. По-подробно,

$$\frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w} : T \times \mathcal{P} \times D \longrightarrow \mathbb{C}$$

е непрекъсната функция на $(\zeta, w, z) \in T \times \mathcal{P} \times D$ съгласно (i) и непрекъснатостта на

$$\frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w} : \zeta \times \mathcal{P} \times z \longrightarrow \mathbb{C}.$$

С други думи, за произволна точка $(\zeta_o, w_o, z_o) \in T \times \mathcal{P} \times D$ и произволно $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всички $(\zeta, w, z) \in T \times \mathcal{P} \times D$ с $||\zeta - \zeta_o||^2 + ||w - w_o||^2 + ||z - z_o||^2 < \delta^2$ да е изпълнено

$$\left| \frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w} - \frac{f(\zeta_o,z_o)}{\zeta - w} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left| \frac{f(\zeta_o,z_o)}{\zeta - w} - \frac{f(\zeta_o,z_o)}{\zeta_o - w_o} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В резултат,

$$\left| \frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w} - \frac{f(\zeta_o,z_o)}{\zeta_o - w_o} \right| < \varepsilon$$

и $\frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w} : T \times \mathcal{P} \times D \to \mathbb{C}$ е непрекъсната. Твърдим, че за всяко фиксирано $\zeta \in T$ ограничението

$$\frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w} : \zeta \times \mathcal{P} \times D \longrightarrow \mathbb{C}$$

е холоморфно. От една страна, функцията

$$\frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w} : \zeta \times w \times D \longrightarrow \mathbb{C}$$

е холоморфна по предположение (ii). От друга страна,

$$\frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w} : \zeta \times \mathcal{P} \times z \longrightarrow \mathbb{C}$$

е холоморфна функция за $\forall \zeta \not\in \mathcal{P}$. По Теоремата на Хартогс за едномерна и многомерна холоморфност (Теорема 8) получаваме, че $\frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w}$ е холоморфна функция на $(w,z) \in \mathcal{P} \times D$ за $\forall \zeta \in T$. По-нататък, частните производни

$$\frac{\partial}{\partial w_j} \left[\frac{f(\zeta,z)}{\zeta - w} \right] = \frac{f(\zeta,z)}{(\zeta_j - w_j)^2 \prod\limits_{i \neq j} (\zeta_i - w_i)} : T \times \mathcal{P} \times D \longrightarrow \mathbb{C}$$

са непрекъснати. По определение това означава, че за $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall (\eta, v, a) \in T \times \mathcal{P} \times D$ съществува $\delta > 0$, така че за произволна точка $(\zeta, w, z) \in T \times \mathcal{P} \times D$ с $||\zeta - \eta||^2 + ||w - v||^2 + ||z - a||^2 < \delta^2$ е в сила

$$\left| \frac{f(\zeta,z)}{(\zeta_j - w_j)^2 \prod\limits_{i \neq j} (\zeta_i - w_i)} - \frac{f(\eta,a)}{(\eta_j - v_j)^2 \prod\limits_{i \neq j} (\eta_i - v_i)} \right| \leq \frac{|f(\zeta,z) - f(\eta,a)|}{|\zeta_j - w_j|^2 \prod |\zeta_i - w_i|} +$$

$$|f(\eta,a)|\left|\frac{1}{(\zeta_j-w_j)^2\prod\limits_{i\neq j}(\zeta_i-w_i)}-\frac{1}{(\eta_j-v_j)^2\prod\limits_{i\neq j}(\eta_i-v_i)}\right|<\varepsilon.$$

Последното неравенство се осигурява от предположение (i) и непрекъснатостта на $\frac{1}{(\zeta_j-w_j)^2\prod\limits_{i\neq j}(\zeta_i-w_i)}:T\times\mathcal{P}\to\mathbb{C}$. За непрекъснатостта на другите частни производни

$$\frac{\partial f(\zeta,z)}{\partial z_j}.\frac{1}{\zeta-w}:T\times\mathcal{P}\times D\longrightarrow\mathbb{C}$$

използваме (iii) и непрекъснатостта на $\frac{1}{\zeta-w}:T\times\mathcal{P}\longrightarrow\mathbb{C}$. По-точно, за $\forall(\zeta_o,w_o,z_o)\in T\times\mathcal{P}\times D$ и $\forall\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, така че за произволна точка $(\zeta,w,z)\in T\times\mathcal{P}\times D$ с $||\zeta-\zeta_o||^2+||w-w_o||^2+||z-z_o||^2<\delta^2$ е изпълнено

$$\left|\frac{\partial f(\zeta,z)}{\partial z_j}.\frac{1}{\zeta-w}-\frac{\partial f(\zeta_o,z_o)}{\partial z_j}.\frac{1}{\zeta_o-w_o}\right|\leq$$

$$\left|\frac{\partial f(\zeta,z)}{\partial z_j}\right|\left|\frac{1}{\zeta-w}-\frac{1}{\zeta_o-w_o}\right|+\left|\frac{\partial f(\zeta,z)}{\partial z_j}-\frac{\partial f(\zeta_o,z_o)}{\partial z_j}\right|\left|\frac{1}{\zeta_o-w_o}\right|<\varepsilon.$$

С това установихме, че функцията $\frac{\partial f(\zeta,z)}{\zeta-w}:T\times\mathcal{P}\times D\to\mathbb{C}$ изпълнява условията на Лема 11.1 за холоморфна зависимост на интеграла от параметър. Следователно нейният интеграл $F(w,z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_T\frac{f(\zeta,z)}{\zeta-w}d\zeta$ зависи холоморфно от $(w,z)\in\mathcal{P}\times D$.

За всяко фиксирано $z_o\in D_o$ функцията $f(\ ,z_o):\mathcal{P}\to\mathbb{C}$ е холоморфна по условие (iv) и се продължава непрекъснато до $f(\ ,z_o):\overline{\mathcal{P}}\to\mathbb{C}$ съгласно (v). По формулата на Коши можем да представим

$$f(w,z_o)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{f(\zeta,z_o)}{\zeta-w}d\zeta.$$

Следователно $f(w,z_o)=F(w,z_o)$ за $\forall w\in\mathcal{P}$ и $\forall z_o\in D_o$. По този начин,
$F:\mathcal{P}\times D\to\mathbb{C}$ се оказва търсеното холоморфно продължение на
$f:(\mathcal{P}\times D_o)\cup(T\times D)\to\mathbb{C}$, Q.E.D.

Холоморфността на функция върху гладка хиперповърхнина при наличие на непрекъснатост се свежда до случая на гладка крива в област на една комплексна променлива.

Лема 11.2. *Нека $D\subset\mathbb{C}$ е област, $\gamma\subset D$ е гладка ректифицируема крива, а $f:D\to\mathbb{C}$ е непрекъсната функция с холоморфно ограничение $f:D\setminus\gamma\to\mathbb{C}$. Тогава f е холоморфна в D.*

Доказателство: Съгласно Теорема 1.14 на Морера, непрекъснатата функция $f:D\to\mathbb{C}$ е холоморфна в D стига интегралът

$$\int\limits_{\partial\Delta}f(\zeta)d\zeta=0 \tag{11.1}$$

за всеки компактно вложен триъгълник $\overline{\Delta}\subset D$. Ако $\overline{\Delta}\cap\gamma=\emptyset$, то f е холоморфна в $\overline{\Delta}$ и Теоремата на Коши дава (11.1). Оттук нататък ще предполагаме, че γ пресича $\overline{\Delta}$ и разделя този затворен триъгълник на краен брой криволинейни затворени триъгълници $\overline{\Delta_j}$, $1\leq j\leq k$ с по най-много една страна $\gamma_j\subset\gamma$. Да означим с α_j и β_j другите две страни на Δ_j. Достатъчно е да докажем, че

$$\int\limits_{\partial\Delta_j}f(\zeta)d\zeta=0\quad\text{за }\forall 1\leq j\leq k, \tag{11.2}$$

за да получим (11.1) и да установим верността на лемата. С тази цел, за достатъчно малко $\delta > 0$ да означим с γ_j^δ транслацията на γ_j на разстояние δ по посока на вътрешната нормала към γ_j. Гладката крива γ_j^δ разделя криволинейния триъгълник Δ_j на триъгълник Δ_j^δ със страни α_j^δ, β_j^δ, γ_j^δ, който се съдържа в $D \setminus \gamma$ и трапец T_j^δ с основи γ_j, γ_j^δ и бедра λ_j^δ, μ_j^δ, така че $\alpha_j = \alpha_j^\delta \cup \lambda_j^\delta$, $\beta_j = \beta_j^\delta \cup \mu_j^\delta$. По Теоремата на Коши

$$\int\limits_{\Delta_j^\delta} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

така че

$$\int\limits_{\partial\Delta_j} f(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\partial T^{\delta_j}} f(\zeta)d\zeta. \tag{11.3}$$

Достатъчно е да докажем, че

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\partial T_j^\delta} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

за да получим (11.2), доколкото лявата страна на (11.3) не зависи от δ. Наистина, дължините на бедрата λ_j^δ и μ_j^δ на T_j^δ клонят към 0 при $\delta \to 0$. Съгласно ограничеността на непрекъснатата функция $f : \overline{T_j^\delta} \to \mathbb{C}$ върху компактната затворена обвивка $\overline{T_j^\delta}$ на T_j^δ следва

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\lambda_j^\delta} f(\zeta)d\zeta = 0, \quad \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\mu_j^\delta} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

От друга страна,

$$\int\limits_{\gamma_j^\delta} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{\gamma_j} f(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\gamma_j} [f(\zeta + \delta\nu(\zeta)) - f(\zeta)]d\zeta,$$

където $\nu(\zeta) \in \mathbb{C}$ е единичната нормала към γ_j в $\zeta \in \gamma_j$, която сочи към γ_j^δ. Вземайки предвид ректифицируемостта на γ_j и непрекъснатостта на f получаваме

$$\lim_{\delta\to 0} \left[\int\limits_{\gamma_j^\delta} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{\gamma_j} f(\zeta)d\zeta \right] = 0,$$

откъдето и

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\partial T_j^\delta} f(\zeta)d\zeta = \lim_{\delta\to 0} \left[\int\limits_{\gamma_j^\delta} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{\gamma_j} f(\zeta)d\zeta \right] + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\lambda_j^\delta} f(\zeta)d\zeta - \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\mu_j^\delta} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

Q.E.D.

Теорема 15. *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е област, $S \subset \mathbb{C}^n$ е гладка хиперповърхнина, пресичаща D, а $f : D \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функция с холоморфно ограничение $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$. Тогава f е холоморфна в D.*

Доказателство: Достатъчно е да установим холоморфността на f в точка $a \in S$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $a = 0^n \in \mathbb{C}^n$ е началото на координатната система и

$$S \cap U = \{z \in U \mid Imz_n = \Psi(z', Rez_n)\}$$

в околност $U \subset \mathbb{C}^n$ на $0^n \in \mathbb{C}^n$. Съгласно непрекъснатостта на C^1-функцията Ψ в 0^n, за всяко $\beta > 0$ съществуват $\alpha > 0$ и полидиск $\mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1}) \subset \mathbb{C}^{n-1}$, така че $|\Psi(z', Rez_n)| < \beta$ за произволни $z' \in \mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1})$ и $z_n \in \mathbb{C}$, $|Rez_n| < \alpha$. Разглеждаме равниннните правоъгълници

$$G(\alpha, \gamma) = \{z_n \in \mathbb{C} \,|\, |Rez_n| < \alpha, \, |Imz_n| < \gamma\}$$

за $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^{>0}$ и ивиците

$$G_o(\alpha, \beta, \gamma) = \{z_n \in \mathbb{C} \,|\, |Rez_n| < \alpha, \, \beta < Imz_n < \gamma\},$$

с $0 < \beta < \gamma$, съдържащи се в $G(\alpha, \gamma)$. За достатъчно малки $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^{>0}$, произведенията $\mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1}) \times G(\alpha, \gamma)$ се съдържат в областта D заедно с компактната си затворена обвивка $\overline{\mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1})} \times \overline{G(\alpha, \gamma)}$. Още повече, техните подобласти $\mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1}) \times G_o(\alpha, \beta, \gamma)$ се съдържат в $D \setminus S$. Следователно ограниченията $f : \mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1}) \times G_o(\alpha, \beta, \gamma) \to \mathbb{C}$ са холоморфни функции. За произволно фиксирано $z' \in \mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1})$, функцията

$$f(z', \ ) : G(\alpha, \gamma) \setminus S \longrightarrow \mathbb{C}$$

е холоморфна и има непрекъснато продължение

$$f(z', \ ) : G(\alpha, \gamma) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Съгласно Лема 11.2, $f(z', \ ) : G(\alpha, \gamma) \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция в целия правоъгълник $G(\alpha, \gamma)$. Сега сме в състояние да приложим Теорема 14 на Хартогс за аналитично продължение и да получим холоморфността на функцията $f : \mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1}) \times G(\alpha, \gamma) \to \mathbb{C}$. В частност, f е холоморфна в точката $a = (0^{n-1}, 0) \in \mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1}) \times G(\alpha, \gamma)$. По-точно, ако $T' = \partial D(0, r) \times \ldots \times \partial D(0, r) \subset \mathbb{C}^{n-1}$ е границата на Шилов на полидиска $\mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1})$, то разполагаме с функция

$$f : [\mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1}) \times G_o(\alpha, \beta, \gamma)] \cup [T' \times G(\alpha, \gamma)] \longrightarrow \mathbb{C},$$

която е непрекъсната в $T' \times G(\alpha, \gamma) \subset \overline{\mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1})} \times G(\alpha, \gamma)$. За всяко $\zeta \in T'$ ограничението $f(\zeta, \ ) : G(\alpha, \gamma) \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция. За непрекъснатостта на частните производни $\frac{\partial f}{\partial z_n} : T' \times G(\alpha, \gamma) \to \mathbb{C}$ използваме непрекъснатостта на $\frac{\partial f}{\partial z_n}(\zeta, \ ) : G(\alpha, \gamma) \to \mathbb{C}$ за всяко фиксирано $\zeta \in T'$ и интегралните формули за честните производни (Следствие 1.10). По-точно, около всяка точка $b_n \in G(\alpha, \gamma)$ съществува компактно вложен диск $D(b_n, \varepsilon) \subset \overline{D(b_n, \varepsilon)} \subset G(\alpha, \gamma)$, така че

$$\frac{\partial f(\zeta, b_n)}{\partial z_n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(b_n, \varepsilon)} \frac{f(\zeta, \zeta_n)}{(\zeta_n - b_n)^2} d\zeta_n$$

за произволно фиксирано $\zeta \in T'$. За $\forall (\eta, b_n) \in T' \times G(\alpha, \gamma)$ и $\forall \varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всички $(\zeta, z_n) \in T' \times G(\alpha, \gamma)$ с $||\zeta - \eta||^2 + |z_n - b_n|^2 < \delta^2$ и произволни $\zeta_n \in \partial D(b_n, \varepsilon)$ е изпълнено $|f(\zeta, \zeta_n) - f(\eta, \zeta_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ съгласно непрекъснатостта на $f : T' \times \overline{D(b_n, \varepsilon)} \to \mathbb{C}$. В резултат,

$$\left| \frac{\partial f(\zeta, b_n)}{\partial z_n} - \frac{\partial f(\eta, b_n)}{\partial z_n} \right| \leq |f(\zeta, \zeta_n) - f(\eta, \zeta_n)| \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(b_n, \varepsilon)} \frac{d\zeta_n}{(\zeta_n - b_n)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11.4)$$

От друга страна, за $\forall \zeta \in T'$ холоморфната функция $\frac{\partial f}{\partial z_n}(\zeta, \ ) : G(\alpha, \gamma) \to \mathbb{C}$ е непрекъсната, така че

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z_n}(\zeta, z_n) - \frac{\partial f}{\partial z_n}(\zeta, b_n) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (11.5)$$

след евентуално намаляване на δ. Комбинирайки (11.4) с (11.5) получаваме, че

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z_n}(\zeta, z_n) - \frac{\partial f}{\partial z_n}(\eta, b_n)\right| < \varepsilon$$

и функцията $\frac{\partial f}{\partial z_n} : T' \times G(\alpha,\gamma) \to \mathbb{C}$ е непрекъсната. От холоморфността на $f : \mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1}) \times G_o(\alpha,\beta,\gamma) \to \mathbb{C}$ следва холоморфността на $f(\ , z_n) : \mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1}) \to \mathbb{C}$ за всяко фиксирано $z_n \in G_o(\alpha,\beta,\gamma)$. По същия начин, непрекъснатостта на $f : \overline{\mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1})} \times \overline{G(\alpha,\gamma)} \to \mathbb{C}$ е достатъчна за непрекъснатостта на $f : \overline{\mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1})} \to \mathbb{C}$ за $\forall z_n \in G(\alpha,\gamma)$. С това проверихме предположенията на Теорема 14 на Хартогс за аналитично продължение. Следователно функцията $f : \mathcal{P}'(0^{n-1}, r^{n-1}) \times G(\alpha,\gamma) \to \mathbb{C}$ е холоморфна, Q.E.D.