Глава 12

Отстраняване на аналитични особености

За да докажем някои теореми за отстраняване на аналитични особености на холоморфна функция, трябва да въведем понятието за аналитично подпространство на област.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. *Подмножеството A на област $D \subset \mathbb{C}^n$ е аналитично подпространство, ако за всяка точка $a \in D$ съществуват околност U върху D и холоморфни функции $f_1, \ldots, f_k : U \to \mathbb{C}$, така че*

$$A \cap U = \{z \in U \mid f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}.$$

Областта $D \subset \mathbb{C}^n$ се счита за свое аналитично подпространство, зададено с тъждествено нулевата холоморфна функция в околност на всяка своя точка $a \in D$. Аналитичните подпространства $A \subsetneq D$, различни от D ще наричаме собствени.

ЛЕМА 12.2. *Ако $A_1, \ldots, A_m$ са аналитични подпространства на област $D \subset \mathbb{C}^n$, то сечението $A_1 \cap \ldots \cap A_m$ и обединението $A_1 \cup \ldots \cup A_m$ са аналитични подпространства на D.*

Доказателство: В произволна фиксирана точка $a \in D$ нека

$$A_i \cap U_i = \{z \in U_i \mid f_{i,1}(z) = \ldots = f_{i,k_i}(z) = 0\}$$

за подходящи околности U_i на a върху D, $1 \leq i \leq m$. Тогава в отвореното подмножество $U = U_1 \cap \ldots \cap U_m \subset D$, сечението $A_1 \cap \ldots \cap A_m$ се задава като

$$(A_1 \cap \ldots \cap A_m) \cap U = \{z \in U \mid f_{i,j_i}(z) = 0 \text{ за } \forall 1 \leq j_i \leq k_i, \forall 1 \leq i \leq m\}.$$

Следователно $A_1 \cap \ldots \cap A_m$ е аналитично подпространство на D. За аналитичността на обединението $A_1 \cup \ldots \cup A_m$ да образуваме множеството

$$J = \{j = (j_1, \ldots, j_m) \mid 1 \leq j_i \leq k_i, 1 \leq i \leq m\}$$

с $k_1 k_2 \ldots k_m$ елемента. Твърдим, че

$$(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \cap U = \{z \in U \mid f_{1,j_1}(z) \ldots f_{m,j_m}(z) = 0, \forall j = (j_1, \ldots, j_m) \in J\}. \tag{12.1}$$

Наистина, ако $z \in A_i$ за някое $1 \leq i \leq m$, то $f_{i,j_i}(z) = 0$ за $\forall 1 \leq j_i \leq k_i$, а оттам и $f_{1,j_1}(z) \ldots f_{i,j_i}(z) \ldots f_{m,j_m}(z) = 0$ за $\forall j \in J$. Обратно, нека $f_{1,j_1}(z) \ldots f_{m,j_m}(z) = 0$ за $\forall j \in J$. Ако допуснем, че $z \notin A_i$, то съществува $1 \leq l_i \leq k_i$ с $f_{i,l_i}(z) \neq 0$. Следователно в точка z извън $A_1 \cup \ldots \cup A_m$ е изпълнено неравенството $f_{1,l_1}(z) \ldots f_{i,l_i}(z) \ldots f_{m,l_m}(z) \neq 0$. Това води до противоречие, доказващо (12.1) и установяващо, че обединението $A_1 \cup \ldots \cup A_m$ е аналитично подпространство на D, Q.E.D.
Следващото твърдение доказва, че аналитичните подпространства A на област D са "достатъчно малки". Това обяснява продължимостта на холоморфна функция върху $D \setminus A$ до холоморфна функция върху D при някои допълнителни предположения.

Твърдение 12.3. *Ако* $A \subsetneqq D$ *е собствено аналитично подпространство на област* $D \subset \mathbb{C}^n$*, то* A *е затворено в* D*, а допълнението* $D \setminus A$ *е навсякъде гъсто и свързано подмножество на* D.

Доказателство: Нека $a \in D$ е гранична точка на A. По определение, съществува редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ с граница $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Да предположим, че в околност U на a аналитичното пространство A се задава като множеството на общите нули на холоморфните функции $f_i : U \to \mathbb{C}$ за $1 \leq i \leq k$. Тогава

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_i(a_n) = f_i(\lim_{n\to\infty} a_n) = f_i(a) \quad \text{за } \forall 1 \leq i \leq k,$$

съгласно непрекъснатостта на f_i. По този начин $a \in A$ и A е затворено подмножество на D.

По определение, $D \backslash A$ е навсякъде гъсто в D, ако всяка околност U_z на точка $z \in D$ върху D пресича $D \backslash A$. Еквивалентно, нито една точка на A не се съдържа в A заедно със своя околност върху D. Нека $A^o \subseteq A$ е множеството на вътрешните точки на A, т.е. $a \in A^o$ точно когато съществува околност U_a на a върху D, която се съдържа изцяло в A. За да докажем, че $A^o = \emptyset$ е празното множество, допускаме противното и забелязваме, че A^o е отворено в D по определение. Достатъчно е да докажем, че A^o е затворено в D, за да получим, че A^o съвпада с областта D, откъдето и $A = D$, противно на допускането. Наистина, ако a е гранична точка на $A^o \subseteq A$, то $a \in A$ съгласно затвореността на A. Съществува околност U на a върху D и холоморфни функции $f_i : U \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq k$, така че

$$A \cap U = \{z \in U \,|\, f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}.$$

От това, че $f_1, \ldots, f_k$ се анулират върху непразното отворено подмножество $A^o \cap U$ на U следва, че тези функции са тъждествено нулеви в U съгласно Принципа за аналитично продължение (Твърдение 2.2). По този начин, околността U на a се съдържа в A и $a \in A^o$. Това доказва затвореността на A^o и установява, че $D \setminus A$ е навсякъде гъсто в D.

За свързаността на допълнението $D \setminus A$ е достатъчно да проверим, че за всяка точка $a \in A$ съществува кълбо $B(a, \varepsilon) \subset D$ със свързано допълнение $B(a, \varepsilon) \setminus A$. По-точно, локалната свързаност на $D \setminus A$ около A позволява деформацията на произволна непрекъсната крива $\gamma : [0, 1] \to D$ от $\gamma(0) = p \in D \setminus A$ до $\gamma(1) = q \in D \setminus A$ до непрекъсната крива $\gamma^* : [0, 1] \to D \setminus A$ със същите краища $\gamma^*(0) = p$ и $\gamma^*(1) = q$. Ако $\gamma([0, 1]) \cap A = \emptyset$, то полагаме $\gamma^* \equiv \gamma$. За $\gamma([0, 1]) \cap A \neq \emptyset$ разглеждаме

$$t_1 = \inf\{t \in [0, 1] \,|\, \gamma(t) \in A\}.$$

Съгласно затвореността на A и непрекъснатостта на γ, точката $p_1 = \gamma(t_1) \in A$. Нека $B(p_1, \varepsilon_1) \subset D$ е кълбо със свързано допълнение $B(p_1, \varepsilon_1) \setminus A$. Избираме достатъчно малко $\delta_1 > 0$, така че $q_1 = \gamma(t_1 - \delta_1) \in B(p_1, \varepsilon_1)$. Съгласно определението на t_1 имаме $q_1 \in B(p_1, \varepsilon_1) \setminus A$. Избираме достатъчно малко $\delta_2 > 0$, така че $r_1 = \gamma(t_1 + \delta_2) \in B(p_1, \varepsilon_1)$ и заменяме $\gamma : [t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_2] \to B(p_1, \varepsilon_1)$ с непрекъснатата крива $\gamma_1 : [t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_2] \to B(p_1, \varepsilon_1)$, така че $\gamma_1(t_1 - \delta_1) = \gamma(t_1 - \delta_1) = q_1$, $\gamma_1(t_1 + \delta_2) = \gamma(t_1 + \delta_2) = r_1$ и

$$t_2 = \inf\{t \in [0, 1] \,|\, \gamma(t) \in A\} > t_1.$$

По-подробно, за произволно $0 < \delta_3 < \delta_2$ избираме $s_1 \in D \setminus A$ достатъчно близо до $\gamma(t_1 + \delta_3)$. Определяме $\gamma_1 : [t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_3] \to B(p_1, \varepsilon_1) \setminus A$ като непрекъсната крива от $q_1 = \gamma_1(t_1 - \delta_1) \in D \backslash A$ до $s_1 = \gamma_1(t_1 + \delta_3) \in D \backslash A$, а $\gamma_1 : [t_1 + \delta_3, t_1 + \delta_2] \to B(p_1, \varepsilon_1)$ като непрекъсната крива от $s_1 = \gamma_1(t_1 + \delta_3)$ до $r_1 = \gamma_1(t_1 + \delta_2)$. Твърдим, че ако итерираме този процес, то съществува естествено m, така че $\gamma_m([0,1]) \cap A = \emptyset$. В противен случай, получаваме безкрайна строго растяща редица

$$0 < t_1 < t_2 \ldots < t_m < t_{m+1} < \ldots \leq 1,$$

която клони към точната си горна граница $\overline{t} \in [0,1]$. Ако $\overline{t} < 1$, то продължавайки гореспоменатата процедура можем да получим $t' > \overline{t}$. В случая $\overline{t} = 1$ точката $\gamma_m(1) = q \in D \setminus A$ се оказва гранична точка на A и това противоречи на затвореността на A

Локално, за всяка точка $a \in A$ съществува кълбо $B(a, \varepsilon) \subset D$ с достатъчно малък радиус $\varepsilon = \varepsilon(a) > 0$, така че

$$A \cap B(a, \varepsilon) = \{z \in B(a, \varepsilon) \,|\, f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}$$

се задава с подходящи холоморфни функции $f_i : B(a, \varepsilon) \to \mathbb{C}$. За произволни точки $p, q \in B(a, \varepsilon) \setminus A$ правата

$$L_{p,q} = \{\zeta p + (1 - \zeta) q \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\}$$

през p, q пресича кълбото $B(a, \varepsilon)$ в едномерната област $U_1 = L_{p,q} \cap B(a, \varepsilon)$ Поне една от функциите, определящи A в околност на a не се анулира тъждествено върху U_1. В противен случай, $U_1 \subseteq A$ и $p, q \in A$ противно на избора на $p, q \in B(a, \varepsilon) \setminus A$. Нека $f_1(\zeta p + (1 - \zeta) q) \not\equiv 0$. Следователно множеството $A_1 = U_1 \cap A$ е дискретно в U_1. В резултат, $U_1 \setminus A_1$ е свързано. Допълнението $U_1 \setminus A_1$ съдържа p и q, така че съществува непрекъснат път $\gamma : [0,1] \to U_1 \setminus A_1$ с начало $\gamma(0) = p$ и край $\gamma(1) = q$. Възоснова на $U_1 \setminus A_1 \subset B(a, \varepsilon) \setminus A$, същият път $\gamma : [0,1] \to B(a, \varepsilon) \setminus A$ свързва $\gamma(0) = p$ с $\gamma(1) = q$ в $B(a, \varepsilon) \setminus A$, Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.4. *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е област, $A \subset D$ е аналитично подпространство, а U е такава околност на $a \in A$ върху D, в която*

$$A \cap U = \{z \in U \,|\, f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}$$

се задава с $k \leq n$ холоморфни функции $f_i : U \to \mathbb{C}$. Ако матрицата на Якоби

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}(a) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_k}{\partial z_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial z_n}(a) \end{array} \right) \in \mathbb{C}_{k \times n}$$

има максимален ранг k в точка a, то казваме, че $a \in A$ е гладка точка на A. В такъв случай, A има коразмерност k в $a \in A$ и размерност $\dim_a A = n - k$. Множеството на гладките точки на аналитично подпространство $A \subset D$ бележим с A^{smooth}.

След евентуална пермутация на променливите $z_1, \ldots, z_n$, можем да считаме, че минорът

$$\det \left[\frac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(z_{n-k+1}, \ldots, z_n)}(a) \right] = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-k+1}}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_k}{\partial z_{n-k+1}}(a) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial z_n}(a) \end{array} \right| \neq 0$$

е различен от нула в гладка точка a на аналитично подпространство $A \subset D \subset \mathbb{C}^n$ с $\dim_a A = n - k$. За произволна точка $z \in D$ да означим $z' = (z_1, \ldots, z_{n-k})$, $z'' = (z_{n-k+1}, \ldots, z_n)$ и да разгледаме проекциите $D' = \{z' \,|\, z \in D\}$, $D'' = \{z'' \,|,\ z \in D\}$. Тогава по Теоремата за неявната функция съществуват околности V' на a' в D', V'' на a'' в D'' и холоморфно изображение $g : V' \to V''$, така че

$$A \cap (V' \times V'') = \{(z', g(z')) \,|\, z' \in V'\} \simeq V'.$$

Оттук става ясно, че в околност на своя гладка точка a, произволно аналитично подпространство $A \subset D \subset \mathbb{C}^n$ с $\dim_a A = n - k$ е гладко комплексно многообразие от посочената размерност.

Определение 12.5. *Точката a на аналитично подпространство A на област $D \subset \mathbb{C}^n$ е особена, ако тя не е гладка. Множеството на особените точки на A се бележи с A^{sing}.*

Например, аналитичното пространство

$$A = \{z \in \mathbb{C}^3 \,|\, f(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 z_3 = 0\} = H_1 \cup H_2 \cup H_3$$

е обединението на координатните хиперравнини $H_i = \{z \in \mathbb{C}^3 \,|\, z_i = 0\}$, $1 \leq i \leq 3$. Холоморфната функция $f(z_1, z_2, z_3)$ има матрица на Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial(z_1, z_2, z_3)} = (z_2 z_3, z_3 z_1, z_1 z_2).$$

Непосредствено се вижда, че $\frac{\partial f}{\partial(z_1,z_2,z_3)}$ е от ранг 1 извън координатните прави $L_1 = H_2 \cap H_3$, $L_2 = H_3 \cap H_1$, $L_3 = H_1 \cap H_2$ и от ранг 0 върху $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Следователно $A \setminus L$ е множеството на гладките точки на A, а L е множеството на особените точки.

За да въведем понятието размерност $\dim_a A$ на аналитично подпространство $A \subset D \subset \mathbb{C}^n$ в особена точка $a \in A^{\text{sing}}$ ни е необходимо следното

Твърдение 12.6. *Множеството A^{smooth} на гладките точки на собствено аналитично подпространство A на област $D \subset \mathbb{C}^n$ е отворено и навсякъде гъсто в A.*

Доказателство: Преди всичко, всяка гладка точка $a \in A^{\text{smooth}}$ има околност $V \subset A$, съставена изцяло от гладки точки, $V \subseteq A^{\text{smooth}}$. По-точно, ако в околност U на a в D имаме

$$A \cap U = \{z \in U \,|\, f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}$$

за подходящи холоморфни функции $f_i : U \to \mathbb{C}$, то

$$V = \left\{ z \in A \cap U \,\middle|\, \mathrm{rk} \frac{\partial f_1, \ldots, f_k)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}(z) = k \right\}$$

е отворено подмножество на $A \cap U$, а оттам и на A. По определение, $V = A^{\text{smooth}} \cap U \subseteq A^{\text{smooth}}$.

Гъстотата на A^{smooth} в A ще установим с индукция по n. Твърдим, че всички точки на собствено аналитично подпространство A на област $D \subset \mathbb{C}$ са изолирани, а оттам и гладки. Наистина, по определението за собствено аналитично подпространство на област $D \subset \mathbb{C}$, всяка точка $a \in A$ има околност $U \subset \mathbb{C}$, така че сечението $A \cap U$ се съдържа в нулите на поне едно (нетъждествено нулева) холоморфна функция $f_1 : U \to \mathbb{C}$. Твърдим, че съществува $m \in \mathbb{N}$, така че $\frac{\partial^k f_1}{\partial_1^k}(a) = 0$ за $\forall 0 \leq k \leq m-1$ и $\frac{\partial^m f_1}{\partial z_1^m}(a) \neq 0$. В противен случай, $\frac{\partial^k f_1}{\partial z_1^k}(a) = 0$ за $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ води до $f_1|_U \equiv 0$ съгласно Следствие 2.3 и противоречи на избора на f_1. След евентуално свиване на U можем да считаме, че $\frac{\partial^m f_1}{\partial z_1^m}(z) \neq 0$ за $\forall z \in U$. Прилагаме Твърдение 2.5 за изолираност на нулите на холоморфна функция на една комплексна променлива и получаваме $A \cap U = \{a\}$ след евентуално по-нататъшно свиване на U. Сега е ясно, че

$$A \cap U = \left\{ z \in U \,\middle|\, \frac{\partial^{m-1} f_1}{\partial z_1^{m-1}}(z) = 0 \right\} = \{a\}$$

е изолирана гладка точка на A.

Да допуснем, че сме доказали твърдението на произволни аналитични подпространства на области $D' \subset \mathbb{C}^{n-1}$. По определение, A^{smooth} е гъсто в A, ако за всяка точка $a \in A$ и всяка околност V_a на a в A е в сила $A^{\text{smooth}} \cap V_a \neq \emptyset$. Отворените подмножества $V_a \subset A$ са от вида $V_a = U_a \cap A$ за отворени подмножества $U_a \subset D$, съдържащи a. След евентуално свиване на U_a можем да считаме, че

$$A \cap U_a = \{z \in U_a \mid f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\} \tag{12.2}$$

се задава с холоморфни функции $f_i : U_a \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq k$. Трябва да проверим, че $A^{\mathrm{smooth}} \cap V_a = A^{\mathrm{smooth}} \cap (A \cap U_a) = A^{\mathrm{smooth}} \cap U_a \neq \emptyset$. Оттук нататък ще предполагаме, че $f_1 : U_a \to \mathbb{C}$ не се анулира тъждествено. Тогава $f_1|_{A \cap U_a} \equiv 0$. Твърдим, че съществува $m \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$, така че $\frac{\partial^{|k|} f_1}{\partial z^k}|_{A \cap U_a} \equiv 0$ за $\forall k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ с $|k| = \sum\limits_{i=1}^n k_i < \sum\limits_{i=1}^n m_i = |m|$ и $\frac{\partial^{|m|} f_1}{\partial z^m}|_{A \cap U_a} \not\equiv 0$. В противен случай, $\frac{\partial^{|k|} f_1}{\partial z^k}|_{A \cap U_a} \equiv 0$ за $\forall k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ дава, в частност, $\frac{\partial^{|k|} f_1}{\partial z^k}(a) = 0$ за $\forall k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ и води до тъждествено анулиране на $f_1 : U_a \to \mathbb{C}$ съгласно Следствие 2.3. Фиксираме $l \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ с $|l| + 1 = |m|$. По-точно, съществува $1 \leq j \leq n$, така че $l_j + 1 = m_j$ и $l_i = m_i$ за $\forall i \neq j$. Да означим

$$f(z) := \frac{\partial^{|l|} f_1}{\partial z^l} : U_a \longrightarrow \mathbb{C}$$

и да отбележим, че $f|_{A \cap U_a} \equiv 0$, докато $\frac{\partial f}{\partial z_j}|_{A \cap U_a} \not\equiv 0$. Следователно съществува точка $b \in A \cap U_a$ с $\frac{\partial f}{\partial z_j}(b) \neq 0$. Избираме такава околност U_b на b върху U_a, върху която частната производна $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ не се анулира. Тогава аналитичното подпространство

$$M = \{z \in U_b \mid f(z) = 0\}$$

на U_b се състои изцяло от гладки точки и представлява $(n-1)$-мерно комплексно многообразие. След евентуално свиване на U_b можем да считаме, че M се съдържа в една своя карта и представлява област в $\mathbb{C}^{n-1}$. За аналитичното подпространство $A \cap U_b \subseteq M$ прилагаме индукционното предположение и получаваме гладка точка $c \in A^{\mathrm{smooth}} \cap U_b$. Но

$$A \cap U_b = \{z \in U_b \mid f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}$$

съгласно $U_b \subseteq U_a$, така че $c \in A^{\mathrm{smooth}} \cap U_a$ и множеството A^{smooth} на гладките точки на A е навсякъде гъсто в A, Q.E.D.

Последното твърдение дава възможност за определяне на размерността на аналитично пространство A в произволна (не обезателно гладка) точка $a \in A$.

Определение 12.7. *Размерността на аналитично пространство A в точка $a \in A^{\mathrm{sing}}$ се определя като*

$$\dim_a A = \limsup_{z \to a, z \in A^{\mathrm{smooth}}} (\dim_z A).$$

Определение 12.8. *Размерността на аналитично пространство A е неотрицателното цяло число*

$$\dim A := \limsup_{a \in A} (\dim_a A).$$

Ако $\dim_a A = m$ за всяка точка a от аналитично пространство A, то казваме, че A има чиста размерност m.

Например, едномерните аналитични подпространства се наричат комплексни криви. Аналитичните подпространства $H \subset \mathbb{C}^n$ с размерност $\dim H = n - 1$ се наричат комплексни хиперповърхнини.

Лема 12.9. *Подмножеството A^{sing} на особените точки на собствено аналитично подпространство A на област $D \subset \mathbb{C}^n$ е аналитично подпространство на A с размерност $\dim A^{\mathrm{sing}} < \dim A$.*

Доказателство: Нека в околност U върху D аналитичното подпространство A се задава с нулите на холоморфни функции $f_i : U \to \mathbb{C}$ за $1 \leq i \leq k$, $k \leq n$. Тогава

$$A^{\text{sing}} \cap (A \cap U) = \left\{ z \in A \cap U \,\middle|\, \text{rk} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}(z) \leq k - 1 \right\}$$

е аналитично подпространство на $A \cap U$, защото рангът на Якобиевата матрица не надминава $k-1$ тогава и само тогава, когато всички минори на $\frac{\partial(f_1, \ldots f_k)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}$ от ред k се анулират.
За всяка точка $a \in A^{\text{sing}}$ твърдим, че $\dim_a A^{\text{sing}} < \dim_a A$. Наиситна, за достатъчно малка околност U_a на a и за всяка точка $b \in A^{\text{smooth}} \cap U_a$ съществува $k \in \mathbb{N}$, така че в подходяща околност U_b на b върху D сечението

$$A \cap U_b = \{ z \in U_b \mid f_{b,1}(z) = \ldots = f_{b,k}(z) = 0 \}$$

за подходящи холоморфни функции $f_{b,i} : U_b \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq k$, По определение,

$$\dim_a A = \limsup_{b \to a, b \in A^{\text{smooth}}} (\dim_b A) = n - k.$$

Твърдим, че

$$A^{\text{sing}} \cap U_b = \left\{ z \in A \cap U_b \,\middle|\, \text{rk} \frac{\partial(f_{b,1}, \ldots, f_{b,k})}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} \leq k - 1 \right\}$$

е собствено аналитично подпространство на $A \cap U_b$, така че $\dim_a A^{\text{sing}} < n - k$ чрез повтаряне на горните разсъждения. Допускането $A^{\text{sing}} \cap U_b = A \cap U_b$ води до

$$\det \left. \frac{\partial(f_{b,1}, \ldots, f_{b,k})}{\partial(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k})} \right|_{A \cap U_b} \equiv 0 \quad \text{за } \forall 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$$

и противоречи на гъстотата на A^{smooth} в A. По този начин получаваме неравенството $\dim_a A^{\text{sing}} < \dim_a A$ за $\forall a \in A^{\text{sing}}$. Сега от $\dim_a A^{\text{sing}} \leq \dim_a A - 1$ за $\forall a \in A^{\text{sing}}$ следва

$$\dim A^{\text{sing}} = \limsup_{a \in A^{\text{sing}}} (\dim_a A^{\text{sing}}) \leq \limsup_{a \in A^{\text{sing}}} (\dim_a A - 1) =$$

$$\limsup_{a \in A^{\text{sing}}} (\dim_a A) = 1 \leq \limsup_{a \in A} (\dim_a A) - 1 = \dim A - 1.$$

С други думи, $\dim A^{\text{sing}} < \dim A$, Q.E.D.

Определение 12.10. *Нека A е собствено аналитично подпространство на област $D \subset \mathbb{C}^n$, а $f : D \setminus A \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция. Казваме, че f е локално ограничена в A, ако всяка точка $a \in A$ има околност U_a в D, така че функцията $f : U_a \setminus A \to \mathbb{C}$ е ограничена.*

Теоремата на Риман за холоморфно продължение на локално ограничена функция върху аналитична хиперповърхнина обобщава следната

Лема 12.11. *Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област, a е точка от D, а $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ е локално ограничена в a холоморфна функция. Тогава f се продължава до холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$.*

Доказателство: Да разгледаме функцията

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & \text{за } z \in D \setminus \{a\}, \\ 0 & \text{за } z = a. \end{cases}$$

Твърдим, че $h(z)$ е $\mathbb{C}$-диференцируема в D и $h'(a) = 0$. За целта е достатъчно да отбележим, че в околност на точка $b \in D \setminus \{a\}$ функцията $h(z) = (z-a)^2 f(z)$ е $\mathbb{C}$-диференцируема и нейната производна $h'(z) = (z-a)[2f(z) + (z-a)f'(z)]$.

Достатъчно е да проверим, че $\lim\limits_{t\to 0, t\neq 0}\left[\frac{h(a+t)}{t}\right] = \lim\limits_{t\to 0, t\neq 0}\left[\frac{t^2 f(a+t)}{t}\right] = 0$ съгласно локалната ограниченост на f в a, за да получим, че съществува производната

$$h'(z) = \begin{cases} (z-a)[2f(z) + (z-a)f'(z)] & \text{за } z \in D \setminus \{a\}, \\ 0 & \text{за } z = a. \end{cases}$$

В резултат, функцията $h(z)$ е холоморфна и се разлага в ред на Тейлър

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n h}{\partial z^n}(a)(z-a)^n$$

около a. Оттук получаваме, че функцията

$$\frac{h(z)}{(z-a)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n h}{\partial z^n}(a)(z-a)^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \frac{\partial^{k+2} h}{\partial z^{k+2}}(a)(z-a)^k$$

е холоморфна в околност на a и съвпада с $f(z)$ за $\forall z \in D \setminus \{a\}$. Вземайки предвид, че

$$\left.\frac{h(z)}{(z-a)^2}\right|_{z=a} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(a),$$

полагаме

$$f(a) := \frac{1}{2!} \frac{\partial h}{\partial z^2}(a)$$

и получаваме холоморфно продължение $f : D \to \mathbb{C}$ на $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, Q.E.D.

Теорема 16. (Теорема на Риман за аналитично продължение) *Ако A е аналитична хиперповърхнина в област $D \subset \mathbb{C}^n$, а $f : D \setminus A \to \mathbb{C}$ е локално ограничена в A холоморфна функция, то съществува холоморфно продължение $f : D \to \mathbb{C}$.*

Доказателство: Достатъчно е да установим холоморфната продължимост на f в произволна точка $a \in A$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $a = 0^n \in \mathbb{C}^n$ и определящата функция $g(z)$ на A в околност на 0^n изпълнява условието $g(0^{n-1}, z_n) \not\equiv 0$. Както в доказателството на Подготвителната теорема на Вайерщрас, съществува достатъчно малък диск $D(0, r_n)$, така че 0^n е единственият корен на уравнението $g(0^{n-1}, z_n) = 0$ в $\overline{D(0, r_n)}$. Тогава $g(0^{n-1}, z_n)$ не се анулира за $z_n \in \partial D(0, r_n)$ и съществува достатъчно малък полидиск $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'(0^{n-1}, r') \subset \mathbb{C}^{n-1}$ с център $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, така че $g(z', z_n) \neq 0$ за $\forall (z', z_n) \in \mathcal{P}' \times \partial D(0, r_n)$.
Да разгледаме интеграла на Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(0, r_n)} \frac{f(z', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n$$

спрямо последната променлива. За $\forall (z', \zeta_n) \in \mathcal{P}' \times \partial D(0, r_n)$ знаем, че $g(z', \zeta_n) \neq 0$, така че $(z', \zeta_n) \in D \setminus A$ и $f(z', \zeta_n)$ е холоморфна спрямо (z', ζ_n). В частност, $f(z', \zeta_n)$ е холоморфна спрямо $z' \in \mathcal{P}'$, а оттам и $F(z) = F(z', z_n)$ е холоморфна спрямо $z' \in \mathcal{P}'$. От друга страна, $F(z', z_n)$ е холоморфна относно $z_n \in D(0, r_n)$, така че $F(z) = F(z', z_n)$ е холоморфна относно $(z', z_n) \in \mathcal{P}' \times D(0, r_n)$ по Теоремата на Хартогс за едномерна и многомерна холоморфност.
След евентуално свиване на околността $U = \mathcal{P}' \times D(0, r_n)$ имаме

$$A \cap U = \{z \in U \mid g(z) = 0\}.$$

За всяко фиксирано $z' \in \mathcal{P}'$ разглеждаме

$$A(z') = \{z_n \in D(0, r_n) \mid g(z', z_n) = 0\}.$$

В качеството си на собствено аналитично подпространство на диска $D(0, r_n)$, множеството $A(z')$ се състои от изолирани гладки точки. По предположение, $f(z', \ ) : D(0, r_n) \setminus A(z') \to \mathbb{C}$ е холоморфна и $f(z', \ )$ е локално ограничена в $A(z')$, така че съгласно предшестващага лема съществува продължение $f(z', \ ) : D(0, r_n) \to \mathbb{C}$, което е холоморфно относно $z_n \in D(0, r_n)$. В резултат, $f(z', \ ) : D(0, r_n) \to \mathbb{C}$ изпълнява формулата на Коши

$$f(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(0, r_n)} \frac{f(z', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n$$

относно z_n. По този начин, $f(z', z_n) = F(z', z_n)$ за $\forall z = (z', z_n) \in U$ и $f : U \to \mathbb{C}$ е холоморфна в $U = \mathcal{P}' \times D(0, r_n)$. В частност, f е холоморфна в $0^n = (0^{n-1}, 0) \in \mathcal{P}' \times D(0, r_n)$, Q.E.D.

Лема 12.12. *Нека $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е област на $n \geq 2$ комплексни променливи, $A \subset D$ е аналитично пространство с $\dim A = 0$, а $f : D \backslash A \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция. Тогава A се състои от изолирани гладки точки и съществува холоморфно продължение $f : D \to \mathbb{C}$.*

Доказателство: По определение, $0 = \dim A = \limsup\limits_{a \in A}(\dim_a A)$ изисква $\dim_a A = 0$ за $\forall a \in A$. Ако $a \in A^{\text{smooth}}$ е гладка точка, то съществува околност U на a върху D и холоморфни функции $f_i : U \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$, така че

$$A \cap U = \left\{ z \in U \,\middle|\, f_1(z) = \ldots = f_n(z) = 0, \, \text{rk} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}(z) \neq 0 \right\}.$$

По Теоремата за неявната функция, след евентуално свиване на U имаме $A \cap U = \{a\}$. По този начин, всяка гладка точка на A е изолирана. За $A = A^{\text{smooth}}$ да допуснем, че съществува особена точка $a_o \in A^{\text{sing}}$. Тогава съгласно Твърдение 12.6 можем да намерим редица $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A^{\text{smooth}}$ с граница $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = a_o$. От една страна, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица на Коши, а от друга страна тя се състои от изолирани точки. Противоречието установява, че $A^{\text{sing}} = \emptyset$ и $A = A^{\text{smooth}}$ се състои от изолирани гладки точки.
Остава да докажем холоморфната продължимост на $f : D \backslash A \to \mathbb{C}$ в околността U_a на фиксирана точка $a \in A$. Избираме U_a така, че $A \cap U_a = \{a\}$. Тогава $A \cap U_a$ е компакт със свързано допълнение $U_a \setminus A = U_a \setminus \{a\}$. Съгласно Теорема 13 за премахване на компактните особености съществува холоморфно продължение $f : U_a \to \mathbb{C}$, Q.E.D.

Теорема 17. *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е област в комплексно пространство с размерност $n \geq 2$, а A е аналитично подпространство на D с размерност $\dim A \leq n - 2$. Тогава всяка холоморфна функция $f : D \backslash A \to \mathbb{C}$ има холоморфно продължение $f : D \to \mathbb{C}$.*

Доказателство: Ще работим с индукция по размерността $\dim A = m \leq n - 2$. Случаят $m = 0$ е доказан в Лема 12.12. За произволно естествено $m \leq n - 2$ да допуснем, че сме установили верността на теоремата за аналитични подпространства с размерност по-малка от m и да изберем аналитично подпространство $A \subset D \subseteq \mathbb{C}^n$ с $\dim A = m$. По индукционно предположение съществува холоморфно продължение на f върху A^{sing}, доколкото A^{sing} е аналитично подпространство на D с $\dim A^{\text{sing}} < \dim A = m$. Аналогично, съществува холоморфно продължение на f в гладките точки $a \in A^{\text{smooth}}$, в които $\dim_a A < m$. По-точно, теоремата се свежда до холоморфна продължимост на f в околност на гладка точка $a \in A^{\text{smooth}}$ с $\dim_a A = m$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $a = 0^n \in A^{\text{smooth}}$. В подходяща околност U на 0^n върху D аналитичното подпространство A се задава като множеството на нулите на $n-m \geq 2$ холоморфни функции $f_i : U \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n-m$ с $\text{rk}\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-m})}{\partial(z_1,\ldots,z_n)}(0^n) = m$. След евентуална пермутация на променливите $z_1,\ldots,z_{n-2},z_{n-1},z_n$ и холоморфните функции $f_1,f_2,\ldots,f_{n-m}$ имаме

$$A \cap U \subseteq M \cap U = \left\{ z \in U \,\middle|\, f_1(z) = f_2(z) = 0,\ \det\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(z_{n-1},z_n)}(z) \neq 0 \right\}.$$

По Теоремата за неявната функция съществуват околност U'' на 0^{n-2}, диск $D(0,r_n)$ и холоморфни функции $g_1,g_2 : U'' \to D(0,r_n)$, така че

$$M \cap [U'' \times D(0,r_n)^2] = \{(z'', g_1(z''), g_2(z'')) \,|\, z'' = (z_1,\ldots,z_{n-2}) \in U''\}.$$

По този начин, $M \cap [U'' \times D(0,r_n)^2]$ е $(n-2)$-мерно комплексно многообразие, съдържащо $A \cap [U'' \times D(0,r_n)^2]$. Условието $0^n \in M \cap [U'' \times D(0,r_n)^2]$ изисква $g_1(0^{n-2}) = g_2(0^{n-2}) = 0$ и изяснява, че $[0^{n-2} \times \partial D(0,r_n)^2] \cap M = \emptyset$. Съгласно непрекъснатостта на g_1 и g_2 относно $z'' = (z_1,\ldots,z_{n-2})$, съществува достатъчно малък полидиск $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}''(0^{n-2}, r^{n-2}) \subset U''$, така че $[\mathcal{P}'' \times \partial D(0,r_n)^2] \cap M = \emptyset$. Това позволява определянето на функцията

$$F : \mathcal{P}'' \times D(0,r_n)^2 \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$F(z'', z_{n-1}, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\partial D(0,r_n)^2} \frac{f(z'', \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{(\zeta_{n-1} - z_{n-1})(\zeta_n - z_n)} d\zeta_{n-1} d\zeta_n$$

чрез интеграл на Коши относно последните две променливи. Твърдим, че така определената функция е холоморфна. Наистина, съгласно $[\mathcal{P}'' \times \partial D(0,r_n)^2] \cap A = \emptyset$ функцията $f : \mathcal{P}'' \times \partial D(0,r_n)^2 \to \mathbb{C}$ е холоморфна. В частност, тя е холоморфна относно $z'' \in \mathcal{P}''$ за произволни фиксирани $\zeta_{n-1}, \zeta_n \in \partial D(0,r_n)$. Съгласно холоморфната зависимост на интеграла от параметър получаваме холоморфността на $F(\ ,z_{n-1},z_n) : \mathcal{P}'' \to \mathbb{C}$ за произволни фиксирани $z_{n-1}, z_n \in D(0,r_n)$. В Теарема 2 доказахме холоморфността на функция, зададена с интеграл на Коши. Затова $F(z'',\ ,\ ) : D(0,r_n)^2 \to \mathbb{C}$ е холоморфна за всяко фиксирано $z'' \in \mathcal{P}''$. По Теоремата на Хартогс за едномерна и многомерна холоморфност оттук следва холоморфността на $F : \mathcal{P}'' \times D(0,r_n)^2 \to \mathbb{C}$.

Остава да докажем, че $F(z) = f(z)$ за $\forall z \in [\mathcal{P}'' \times D(0,r_n)^2] \setminus M$, за да твърдим, че F е холоморфно продължение на f в $0^n \in \mathcal{P}'' \times D(0,r_n)^2$. За произволно фиксирано $z'' \in \mathcal{P}''$ разглеждаме точката $M(z'') = \{(z'', g_1(z''), g_2(z''))\}$ като 0-мерно аналитично подпространство на $D(0,r_n)^2 \subset \mathbb{C}^2$. Тогава съгласно Лема 12.12, холоморфната функция $f(z'',\ ,\ ) : D(0,r_n)^2 \setminus M(z'') \to \mathbb{C}$ се продължава до функция $f(z'',\ ,\ ) : D(0,r_n)^2 \to \mathbb{C}$, която е холоморфна относно $(z_{n-1}, z_n) \in D(0,r_n)^2$. Следователно $f(z'',\ ,\ ) : D(0,r_n)^2 \to \mathbb{C}$ изпълнява формулата на Коши относно z_{n-1} и z_n,

$$f(z'', z_{n-1}, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\partial D(0,r_n)^2} \frac{\partial f(z'', \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{(\zeta_{n-1} - z_{n-1})(\zeta_n - z_n)} d\zeta_{n-1} d\zeta_n.$$

В резултат, $F(z) = f(z)$ за $\forall z \in \mathcal{P}'' \times D(0,r_n)^2$ и F е холоморфно продължение на f в $a = 0^n$, Q.E.D.