Глава 14

Теорема на Бенке-Зомер. Локална псевдоизпъкналост.

Ще започнем с изучаване на една Теорема на Бенке-Зомер, известна под името Принцип за непрекъснатост. За целта да напомним, че произволна n-торка холоморфни функции

$$f = (f_1, \dots, f_n) : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

образува холоморфно изображение от област $D \subseteq \mathbb{C}^m$ с $m < n$ в $\mathbb{C}^n$. Матрицата

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(z_1, \dots, z_m)}(z) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_m}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_m}(z) \end{array} \right)$$

от частните производни се нарича матрица на Якоби. Холоморфното изображение f е неизродено в точка $z \in D$, ако рангът на матрицата на Якоби е максимален и равен на m. Ще казваме, че холоморфното изображение $f : D \to \mathbb{C}^n$ е неизродено, ако f е неизродено във всяка точка $z \in D$. Образът $f(D) \subset \mathbb{C}^n$ на област $D \subseteq \mathbb{C}^m$ под действие на неизродено холоморфно изображение $f : D \to \mathbb{C}^n$ се нарича m-мерна холоморфна повърхнина. Например, 1-мерните холоморфни повърхнини са холоморфните криви в $\mathbb{C}^n$. В частност, ако $D = D(a, r) \subset \mathbb{C}$ е диск в $\mathbb{C}$, а $f : D(a, r) \to \mathbb{C}^n$ е неизродено холоморфно изображение с непрекъснато продължение $f : \overline{D(a, r)} \to \mathbb{C}^n$, то $f(\overline{D(a, r)}) \subset \mathbb{C}^n$ се нарича холоморфен диск. Ограничените холоморфни повърхнини $f(D) \subset \mathbb{C}^n$ изпълняват следния Принцип за максимума на модула.

Лема 14.1. *Нека функцията $g : U \to \mathbb{C}$ е холоморфна в околност U на ограничена холоморфна повърхнина $f(D) \subset \mathbb{C}^n$. Тогава*

$$\sup_{w \in f(D)} |g(w)| \leq \sup_{w \in \partial f(D)} |g(w)|,$$

където границата $\partial f(D) = \overline{f(D)} \setminus f(D)$.

Доказателство: Достатъчно е да установим, че

$$\sup_{w \in \overline{f(D)}} |g(w)| \leq \sup_{w \in \partial f(D)} |g(w)|$$

и да използваме, че

$$\sup_{w \in f(D)} |g(w)| \leq \sup_{w \in \overline{f(D)}} |g(w)|.$$

Съгласно компактността на $\overline{f(D)}$, съществува точка $w^{(0)} \in \overline{f(D)}$, в която се достига $\sup\limits_{w \in \overline{f(D)}} |g(w)| = |g(w^{(0)})|$. При допускане на противното, от

$$|g(w^{(0)})| = \sup_{w \in \overline{f(D)}} |g(w)| > \sup_{w \in \partial f(D)} |g(w)| \qquad (14.1)$$

следва, че $w^{(0)} \in f(D)$. С други думи, съществува $z^{(0)} \in D$ с $f(z^{(0)}) = w^{(0)}$. Твърдим, че областта D е ограничена, щом холоморфната повърхнина $f(D)$ е ограничена. В противен случай, съществува неограничена редица $\{p^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset D$, $\lim\limits_{k\to\infty} |p^{(k)}| = \infty$. Редицата от образи $\{f(p^{(k)})\}_{k=1}^{\infty} \subset f(D)$ има гранична точка $\zeta \in \overline{f(D)}$. Всяка околност U_ζ на ζ пресича $\{f(p^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ във фундаментална редица. Поради своята неизроденост, холоморфното изображение f е локално обратимо и $\{p^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ съдържа поне една фундаментална подредица. Следователно съществува крайна гранична точка на $\{p^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ в $\overline{D}$. Това противоречи на неограничеността на $\{p^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ и доказва ограничеността на областта D. Сега холомарфната функция $gf : D \to \mathbb{C}$ в ограничената област D изпълнява неравенствата $|gf(z^{(0)})| \geq |gf(z)|$ за $\forall z \in D$. Съгласно Следствие 2.9 от Принципа за максимума, $gf \equiv \text{const}$ е постоянна и не може да изпълнява (14.1), Q.E.D.

Да напомним, че за произволно подмножество $M \subset \mathbb{C}^n$ и произволно $\varepsilon > 0$, ε-раздуването $M^{(\varepsilon)} = \cup_{z\in M}\mathcal{P}(z,\varepsilon)$ е обединението на поли-дисковете с център $z \in M$ и радиус $\varepsilon > 0$. Редицата $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ от подмножества $M_k \subset \mathbb{C}^n$ клони към множеството M, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $k_0 \in \mathbb{N}$, така че $M_k \subseteq M^{(\varepsilon)}$ и $M \subseteq M_k^{(\varepsilon)}$ за всички $k \geq k_0$.

Теорема 25. (Бенке-Зомер) *Нека D е област, $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ е редица от ограничени холоморфни повърхнини, компактно вложени в D, $S_k \subseteq \overline{S_k} \subset D$ и клонящи към подмножество $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S \subset \mathbb{C}^n$. Ако границите $\{\partial S_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ клонят към компактно вложено подмножество $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma} \subset D$, то произволна холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ се продължава холоморфно в околност на S.*

Доказателство: Съществува ограничена област $D_0 \subset \mathbb{C}^n$, която е компактно вложена в D, $D_o \subset \overline{D_o} \subset D$ и съдържа $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma} \subset D_o$. Нека

$$r = \rho(D_o, \partial D) = \inf_{z\in D_o, \zeta\in\partial D} ||z - \zeta||$$

е разстоянието от D_o до границата ∂D на D. Да изберем достатъчно малко $\varepsilon > 0$, така че $\Gamma^{(\varepsilon)} \subset D_o$. Тогава от $\lim\limits_{k\to\infty} \partial S_k = \Gamma$ следва съществуването на $k_o \in \mathbb{N}$ с $\partial S_k \subset D_o$ за $\forall k \geq k_o$. За произволна холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ и произволна точка $z \in S_k$ е изпълнено

$$|f(z)| \leq ||f||_{\partial S_k}$$

по Лема 14.1 за максимума на модула. Вземайки предвид $\partial S_k \subset D_o$ за $k \geq k_o$, получаваме

$$|f(z)| \leq ||f||_{D_o} \quad \text{за } \forall z \in S_k \text{ с } k \geq k_o.$$

По определение, това означава, че S_k с $k \geq k_o$ се съдържа в холоморфната обвивка $H(D_o)$ на ограничената област D_o. По Лема 13.12 за едновременно продължение, всяка холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ има холоморфно продължение в r-раздуването $H(D_o)^r = \cup_{z\in H(D_o)}\mathcal{P}(z,r)$ на холоморфната обвивка $H(D_o)$ на D_o. В частност, f има холоморфно продължение в r-раздуването $S_k^r = \cup_{z\in S_k}\mathcal{P}(z,r)$ за всяко $k \geq k_o$. Поради сходимостта на S_k към S съществува естествено число $k_1 \geq k_o$, така че $S \subseteq S_k^{\frac{r}{2}}$ за всички $k \geq k_1$. Оттук $S^{\frac{r}{2}} \subseteq \left(S_k^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{2}} \subset S_k^r$ и всяка холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ има холоморфно продължение в околността $S^{\frac{r}{2}}$ на S, Q.E.D.

Локалната псевдоизпъкналост в C^2-гладка гранична точка на област $D \subset \mathbb{C}^n$ е аналог на локалната изпъкналост в C^2-гладка гранична точка $a \in \partial W$ на област $W \subset \mathbb{R}^n$. По-точно, да допуснем, че съществува околност U_a на $a \in \partial W$ върху $\mathbb{R}^n$ и функция $\varphi : U_a \to \mathbb{R}$ от клас C^2 с неанулиращ се градиент $\nabla\varphi(x) =$

$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)\right)$ за $\forall x \in U_a$, така че

$$W \cap U_a = \{x \in U_a \,|\, \varphi(x) < 0\}.$$

Тогава можем да определим допирателната равнина

$$T_a(\partial W) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, (x - a, \nabla\varphi(a)) = 0\}$$

към ∂W в a, където $(x - a, \nabla\varphi(a)) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(a)$ е евклидовото скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$. Казваме, че областта $W \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнала в своята C^2-гладка гранична точка $a \in \partial W$, ако съществува околност V_a на a върху $\mathbb{R}^n$, така че $W \cap V_a$ се съдържа в едното от полупространствата спрямо допирателната равнина $T_a(\partial W)$ към ∂W в a. Твърдим, че ако $W \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнала област, то W е изпъкнала във всяка своя C^2-гладка гранична точка. За целта да разгледаме нормалата N_a към ∂W през a, т.е. правата през a, успоредна на градиента $\nabla\varphi(a)$. В доказателството на Теорема 20 изибраме точки $y^{(k)} \in N_a$, клонящи към $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = a$. Тогава разстоянията от $y^{(k)}$ до ∂W се реализират от $a \in \partial W$ и можем да изберем хиперравнините H_k с един и същи нормален вектор $\nabla\varphi(a) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0^n\}$. Тяхната граница H е равнината през a с нормален вектор $\nabla\varphi(a)$, т.е. H съвпада с $T_a(\partial W)$.

Да отбележим, че W е под $T_a(\partial W)$ точно тогава, когато всички точки на $T_a(\partial W)$ са над W (щом $a \in \partial W \cap T_a(\partial W)$ е извън W). За да анализираме последното условие, да преместим началото $0^n \in \mathbb{R}^n$ в точката a. С помощта на линейната функция $L_o(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0^n)x_i$ и симетричната билинейна форма

$$H_o(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(0^n)x_ix_j$$

записваме формулата на Тейлър за $\varphi(x)$ във вида

$$\varphi(x) = L_o(x) + \frac{1}{2}H_o(x) + o(||x||^2).$$

Тогава за $\forall x \in T_{0^n}(\partial W)$ условието $\varphi(x) \geq 0$ се свежда до положителната дефинитност

$$H_o(x)|_{T_{0^n}(\partial D)} \geq 0$$

на хесиана $H_o(x)$ на $\varphi(x)$ върху допирателната равнина към ∂W в 0^n.

Локалната псевдоизпъкналост на област $D \subset \mathbb{C}^n$ е аналог на този критерий. По-точно, нека U е околност на гранична точка $a \in \partial D$ на област $D \subset \mathbb{C}^n$, а $\varphi : U \to \mathbb{R}$ е C^2-функция с неанулиращ се холоморфен градиент $\nabla_\partial\varphi(z) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial z_n}\right) \neq 0$ във всяка точка $z \in U$, която задава

$$D \cap U = \{z \in U \,|\, \varphi(z) < 0\}.$$

Ще казваме, че φ определя локално D в U.

Тейлъровото развитие на φ около $a = 0^n$ има вида

$$\varphi(z) = 2ReL_o(z) + ReK_o(z) + \frac{1}{2}H_o(z) + o(||z||^2),$$

където

$$L_o(z) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(0^n)z_j,$$

$$K_o(z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial z_j}(0^n)z_iz_j,$$

$$H_o(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(0^n) z_i \overline{z_j}.$$

За целта е достатъчно да забележим, че съгласно реалността на стойностите на φ, частните производни относно $\overline{z_i}$ са комплексно спрегнати на частните производни относно z_i и тяхната сума е равна на удвоената реална част. В частност,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{z_i} \partial z_j} \quad \text{за } \forall 1 \leq i, j \leq n,$$

така че матрицата

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \right)_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}_{n \times n}$$

е ермитова.

Определение 14.2. *Нека $U \subset \mathbb{C}^n$ е околност, а $\varphi : U \to \mathbb{R}$ е C^2-функция с неанулиращ се градиент $\partial \varphi(z) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(z), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial z_n}(z) \right) \neq 0$ във всяка точка $z \in U$. Тогава ермитовата форма*

$$H_z(\varphi, \ ) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$H_z(\varphi, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(z) w_i \overline{w_j}$$

се нарича форма на Леви на φ в $z \in U$.

Да напомним комплексното допирателно пространство

$$T_a^{\mathbb{C}}(\partial D) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(a)(z_i - a_i) = 0 \}$$

към ∂D в $a \in \partial D$.

Определение 14.3. *Областта D е локално псевдоизпъкнала в граничната си точка $a \in \partial D$, ако в някаква околност U на a тази област има локална определяща функция φ от клас C^2, чиято форма на Леви $H_a(\varphi, w) \geq 0$ е неотрицателно дефинитна във всеки комплексен допирателен вектор $w \in T_a^{\mathbb{C}}(\partial D)$.*
Още повече, ако $H_a(\varphi, w) > 0$ е строго положително дефинитна за $\forall w \in T_a^{\mathbb{C}}(\partial D)$, $w \neq 0^n$, то D се нарича строго локално псевдоизпъкнала в $a \in \partial D$.

Например, кълбото $B(0^n, 1) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid ||z||^2 < 1 \}$ е строго псевдоизпъкнало във всяка своя гранична точка $a \in \partial B(0^n, 1)$. По-точно, определящата функция

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n z_i \overline{z_i} - 1$$

има форма на Леви

$$H_a(\varphi, w) = \sum_{i=1}^n w_i \overline{w_i} = ||w||^2 > 0 \quad \text{за } \forall w \neq 0^n.$$

Следващата Лема изучава някои основни свойства на формата на Леви.

Лема 14.4. *Нека $U \subset \mathbb{C}^n$ е околност, а $\varphi : U \to \mathbb{R}$ е C^2-функция с холоморфен градиент $\partial \varphi(z) \neq 0$ за $\forall z \in U$.*
(i) Ако $h : U_z \to \mathbb{R}$ е C^2-функция в околност U_z на $z \in U$, то формата на Леви

$$H_z(h\varphi, w) = hH_z(\varphi, w) + \varphi H_z(h, w) + 2Re[\partial \varphi(w) \overline{\partial h(w)}] \quad \text{за } \forall w \in \mathbb{C}^n,$$

където $\partial\varphi(w) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_i} w_i$.

(ii) Ако $\psi : U_{\varphi(z)} \to \mathbb{R}$ *е* C^2*-функция в околност* $U_{\varphi(z)} \subset \mathbb{R}$ *на* $\varphi(z)$*, то формата на Леви*

$$H_z(\psi \circ \varphi, w) = \psi'(\varphi) H_z(\varphi, w) + \psi''(\varphi)|\partial\varphi(w)|^2 \quad \text{за } \forall w \in \mathbb{C}^n.$$

(iii) Ако $f = (f_1, \dots, f_n) : V \to U \subset \mathbb{C}^n$ *е холоморфно изображение от околност* $V \subset \mathbb{C}^m$*, то във всяка точка* $\zeta \in V$ *формата на Леви*

$$H_\zeta(\varphi \circ f, w) = H_{f(\zeta)}(\varphi, f_* w),$$

където $f_* w = ((f_1)_* w, \dots, (f_n)_* w)$ *и* $(f_s)_* w = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial \zeta_i} w_i$ *за* $\forall \zeta \in V$*,* $\forall w \in \mathbb{C}^m$*. В частност, формата на Леви е инвариантна относно бихоломорфни изображения (взаимно-еднозначни изображения, които са холоморфни заедно със своите обратни).*

Доказателство: (i) Непосредствено пресмятаме, че

$$\frac{\partial(h\varphi)}{\partial z_i} = h\frac{\partial\varphi}{\partial z_i} + \varphi\frac{\partial h}{\partial z_i},$$

$$\frac{\partial^2(h\varphi)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} = h\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} + \varphi\frac{\partial^2 h}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial h}{\partial \overline{z_j}} + \frac{\partial h}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z_j}}\right).$$

Следователно

$$H_z(h\varphi, w) = hH_z(\varphi, w) + \varphi H_z(h, w) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_i} w_i \frac{\partial h}{\partial \overline{z_j}} \overline{w_j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial z_i} w_i \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z_j}} \overline{w_j} =$$

$$hH_z(\varphi, w) + \varphi H_z(h, w) + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_i} w_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial \overline{z_j}} \overline{w_j}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial z_i} w_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z_j}} \overline{w_j}\right) =$$

$$hH_z(\varphi, w) + \varphi H_z(h, w) + \partial\varphi(w)\overline{\partial h(w)} + \partial h(w)\overline{\partial\varphi(w)} =$$

$$hH_z(\varphi, w) + \varphi H_z(h, w) + 2Re[\partial\varphi(w)\overline{\partial h(w)}].$$

(ii) Ако $\psi(t)$ е функция на $t \in U_{\varphi(z)}$, то по правилото за диференциране на суперпозиция,

$$\frac{\partial(\psi \circ \varphi)}{\partial z_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\psi'(\varphi), \frac{\partial^2(\psi \circ \varphi)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}\psi'(\varphi) + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z_j}}\psi''(\varphi).$$

Следователно формата на Леви

$$H_z(\psi \circ \varphi, w) = \psi'(\varphi) H_z(\varphi, w) + \psi''(\varphi)\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_i} w_i \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z_j}} \overline{w_j}\right] =$$

$$\psi'(\varphi) H_z(\varphi, w) + \psi''(\varphi)\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_i} w_i\right]\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z_j}} \overline{w_j}\right] =$$

$$\psi'(\varphi) H_z(\varphi, w) + \psi''(\varphi)|\partial\varphi(w)|^2.$$

(iii) За холоморфните функции $f_1, \dots, f_n : V \to \mathbb{C}$ непосредствено пресмятаме, че

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial \zeta_i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial \zeta_i}\frac{\partial\varphi}{\partial z_s}(f) \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial^2(\varphi \circ f)}{\partial \zeta_i \partial \overline{\zeta_j}} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial \zeta_i}\frac{\partial \overline{f_t}}{\partial \overline{\zeta_j}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_s \partial \overline{z_t}}(f)$$

съгласно холоморфността на $\frac{\partial f_s}{\partial \zeta_i} : V \to \mathbb{C}$. В резултат,

$$H_\zeta(\varphi \circ f, w) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_s \partial \overline{z_t}}(f) \frac{\partial f_s}{\partial \zeta_i} w_i \frac{\partial \overline{f_t}}{\partial \overline{\zeta_j}} \right] =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_s \partial \overline{z_t}}(f) \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial \zeta_i} w_i \right] \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \overline{f_t}}{\partial \overline{z_j}} \overline{w_j} \right] =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_s \partial \overline{z_t}}(f(\zeta))[(f_s)_* w][(f_t)_* w] = H_{f(\zeta)}(\varphi, f_* w),$$

Q.E.D.

Лема 14.5. *Нека $a \in \partial D$ е C^2-гладка гранична точка на област D. Тогава локалната псевдоизпъкналост на D в a (строгата локална псевдоизпъкналост на D в a) не зависи от локална определяща функция на D около a.*

Доказателство: Ако φ и ψ определят локално D в достатъчно малка околност U, то съществува C^1-функция $h : U \to \mathbb{R}^{>0}$ с реални положителни стойности, така че $\psi = \varphi h$. Наистина, съгласно Лема 10.3 съществуват функции $h, h_1 \in C^1(U)$, за които $\psi = \varphi h$ и $\varphi = \psi h_1$. Следователно $\varphi(hh_1 - 1)|_U = 0$. В достатъчно малка околност U имаме $\varphi|_{U \cap \partial D} = 0$, $\varphi|_{D \cap U} < 0$ и $\varphi|_{U \setminus \overline{D}} > 0$. Оттук следва, че разликата $(hh_1 - 1)|_{U \setminus \partial D} = 0$ се анулира. Понеже $U \setminus \partial D$ е навсякъде гъсто отворено подмножество на U, стигаме до извода, че $hh_1 = 1$ в U. В частност, h и h_1 не се анулират в U, така че не си менят знака. От $\varphi|_{D \cap U} < 0$ и $\psi|_{D \cap U} < 0$ получаваме, че $h|_{D \cap U} > 0$. Аналогично, $\varphi|_{U \setminus \overline{D}} > 0$ и $\psi|_{U \setminus \overline{D}} > 0$ изискват $h|_{U \setminus \overline{D}} > 0$. В резултат, $h|_{\partial D} > 0$, откъдето $h : U \to \mathbb{R}^{>0}$.
Нека $\varphi : U \to \mathbb{R}$ и $\psi = h\varphi : U \to \mathbb{R}$ са локални определящи функции на

$$D \cap U = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\} = \{z \in U \mid \psi(z) < 0\}$$

в околност U на a. Тогава $\varphi(a) = 0$ и $\partial\varphi(w) = 0$ за всеки комплексен допирателен вектор $w \in T_a^{\mathbb{C}}(\partial D)$. Затова по Лема 14.4(i) получаваме, че

$$H_a(\psi, w) = h(a) H_a(\varphi, w) \quad \text{ за } \forall w \in T_a^{\mathbb{C}}(\partial D).$$

Както вече доказахме, $h(a) > 0$, така че формите на Леви $H_a(\psi, w)$ и $H_a(\varphi, w)$ имат едни и същи знаци за комплексен допирателен вектор $w \in T_a^{\mathbb{C}}(\partial D)$, Q.E.D.
Да отбележим, че билинейната форма K_o не е инвариантна относно бихоломорфни автоморфизми. Още повече, следващата лема установява, че формата K_o може да се анулира тъждествено чрез подходящо бихоломорфно изображение.

Лема 14.6. *В околност U на своя гранична точка $a \in \partial D$, областта $D \subset \mathbb{C}^n$ се определя с C^2-функция $\varphi : U \to \mathbb{R}$ с неанулиращ се холоморфен градиент $\partial\varphi \neq 0$, т.е.*

$$D \cap U = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\}.$$

Тогава съществува бихоломорфно изображение

$$f : U \longrightarrow V$$

върху околност V на $f(a) = 0^n$, така че определящата функция $\psi = \varphi \circ f^{-1}$ на $f(D \cap U)$ в $f(U) = V$ има Тейлърово разлагане

$$\psi(w) = 2Re(w_n) + \frac{1}{2} H_o(\psi, w) + o(||w||^2).$$

Доказателство: Без ограничение на общността можем да считаме, че $a = 0^n$ и определящата функция φ на $D \cap U$ в U има Тейлърово разлагане

$$\varphi(z) = 2ReL_o(z) + ReK_o(z) + \frac{1}{2}H_o(z) + o(||z||^2) \tag{14.2}$$

във всяка точка $z \in U$. Сменяме координатите $z = (z_1, \dots, z_n)$ в околността U на 0^n с координати $w = (w_1, \dots, w_n)$, където $w_1, \dots, w_{n-1}$ са координати в комплексната допирателна равнина

$$T^{\mathbb{C}}_{0^n}\partial D = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid L_o(\zeta) = 0\}, \quad \text{а}$$

$$w_n = L_o(z) + \frac{1}{2}K_o(z).$$

Доколкото $K_o(z)$ е полином от втора степен на $z_1, \dots, z_n$, изображението

$$f : U \longrightarrow U,$$

$$f(z_1, \dots, z_n) = f(w_1, \dots, w_{n-1}, w_n)$$

е бихоломорфно върху достатъчно малка околност U на $0^n \in \mathbb{C}^n$. Още повече, $w_i = f_i(z)$ са линейни функции за $\forall 1 \leq i \leq n-1$, така че

$$w_i = f_i(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0^n) z_j = (f_i)_*(z).$$

От друга страна,

$$w_n = f_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial z_j}(0^n) z_j + \frac{1}{2}K_o(z) = (f_n)_* z + \frac{1}{2}K_o(z) = (f_n)_* z + O(||z||^2),$$

така че

$$(f_*)z = ((f_1)_* z, \dots, (f_{n-1})_* z, (f_n)_* z) = w + O(||z||^2).$$

Да отбележим, че образът

$$f(D \cap U) = \{w = f(z) \mid \psi(w) = \varphi \circ f^{-1}(f(z)) = \varphi(z) < 0\}$$

се задава с определяща функция $\psi = \varphi \circ f^{-1} : U \to \mathbb{R}$. Съгласно Лема 14.4(iii), формата на Леви

$$H_{0^n}(\varphi, z) = H_{0^n}(\psi \circ f, z) = H_{0^n}(\psi, f_* z) =$$

$$H_{0^n}(\psi, w + O(||z||^2)) = H_{0^n}(\psi, w) + o(||z||^2),$$

защото $w = O(||z||)$. Записваме (14.2) във вида

$$\varphi(z) = 2Ref_n(z) + \frac{1}{2}H_{0^n}(\varphi, z) + o(||z||^2). \tag{14.3}$$

След това заместваме $z = f^{-1}(w)$ и получаваме

$$\psi(w) = 2Rew_n + \frac{1}{2}H_{0^n}(\psi, w) + o(||w||^2),$$

Q.E.D.
По този начин, формата на Леви е най-важната част на събираемите от ред 2 в Тейлъровото развитие на определящата функция.

Теорема 26. *Ако областта D е строго локално псевдоизпъкнала в граничната си точка $a \in \partial D$, то съществува околност U на a и определяща функция $\varphi : U \to \mathbb{R}$ на*

$$D \cap U = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\},$$

чиято форма на Леви $H_a(\varphi, w)$ е положителна не само за ненулевите комплексни допирателни вектори $w \in T^{\mathbb{C}}_a(\partial D)$, но и за всички ненулеви вектори $0^n \neq w \in \mathbb{C}^n$.

Доказателство: Съгласно строгата локална псевдоизпъкналост на D в a съществува определяща функция $\psi : U \to \mathbb{R}$ в околност на a, така че

$$D \cap U = \{z \in U \,|\, \psi(z) < 0\} \quad \text{и}$$
$$H_a(\psi, w) > 0 \quad \text{за } \forall w \in T_a^{\mathbb{C}}(\partial D),\ w \neq 0^n.$$

За произволна константа $k > 0$ съществува достатъчно малка околност $U_k \subseteq U$, така че $\varphi = \psi + k\psi^2$ е C^2-гладка определяша функция на D в U_k. По-точно, ако $U_k = \psi^{-1}\left(-\frac{1}{2k}, +\infty\right)$, то $\{z \in U_k \,|\, \psi(z) < 0\} = \{z \in U_k \,|\, \varphi(z) < 0\}$ и $\partial\varphi(z) = \partial\psi(1 + 2k\psi(z)) \neq 0$ за $\forall z \in U_k$. Съгласно Лема 14.4(ii), формата на Леви

$$H_a(\varphi, w) = (2k\psi + 1)(a)H_a(\psi, w) + 2k|\partial\psi(w)|^2,$$
$$H_a(\varphi, w) = H_a(\psi, w) + 2k|\partial\psi(w)|^2. \tag{14.4}$$

Достатъчно е да докажем положителната дефинитност на формата $H_a(\varphi, w)$ върху единичната сфера $S = \{w \in \mathbb{C}^n \,|\, ||w||^2 = 1\}$, защото тогава $H_a(\varphi, \lambda w) = |\lambda|^2 H_a(\varphi, w) > 0$ за $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ и $\forall w \in S$. За положителната дефинитност на $H_a(\varphi,\ )$ върху S да означим

$$S_o := \{w \in S \,|\, H_a(\psi, w) \leq 0\}.$$

Ако $S_o = \emptyset$, то полагаме $k = 0$. В противен случай, съгласно компактността на S_o съществува константа $M_o \geq 0$, така че $H_a(\psi, w) \geq -M_o$ за $\forall w \in S_o$. По определението за строга локална псевдоизпъкналост в $a \in \partial D$, $H_a(\psi, w) > 0$ за всеки ненулев комплексен допирателен вектор $w \in T_a^{\mathbb{C}}(\partial D)$, т.е. за $\forall 0^n \neq w \in \mathbb{C}^n$ с $\partial\psi(w) = 0$. Следователно $\partial\psi(w) \neq 0$ за $\forall w \in S_o$. Оттук, съществува константа $m > 0$, така че $|\partial\psi(w)| \geq m$ за $\forall w \in S_o$. Избирайки $k > \frac{M_o}{2m^2}$ в (14.4) получаваме

$$H_a(\varphi, w) \geq -M_o + 2km^2 > 0 \quad \text{за } \forall w \in S_o.$$

Ако $w \in S \setminus S_o$, то от $H_a(\psi, w) > 0$, $k \geq 0$ и $|\partial\psi(w)|^2 \geq 0$ следва $H_a(\varphi, w) > 0$, така че $H_a(\varphi, w) > 0$ за $\forall 0^n \neq w \in \mathbb{C}^n$, Q.E.D.

От това, че формата на Леви $H_z(\varphi, w)$ на C^2-функцията φ зависи непрекъснато от z, получаваме следното

Следствие 14.7. *Ако областта D е строго локално псевдоизпъкнала в граничната си точка $a \in \partial D$, то в достатъчно малка околност U на a съществува оперделяща функция φ на $D \cap U$, така че*

$$H_z(\varphi, w) > 0 \quad \textit{за } \forall z \in U \ \textit{ и } \forall w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}.$$

Следващата теорема свързва строгата псевдоизпъкналост с геометричната строга изпъкналост.

Теорема 27. (Лема на Нарасимхан) *Ако областта D е строго локално псевдоизпъкнала в граничната си точка $a \in \partial D$, то съществува околност U на a и бихоломорфно изображение $f : U \to V$, така че $f(D) \cap V$ е строго изпъкнала във всяка точка от $f(\partial D \cap U)$.*

Доказателство: Без ограничение на общността можем да считаме, че $a = 0^n$ и определящата функция φ на $D \cap U$ е такава, че $H_{0^n}(\varphi, w) > 0$ за $\forall w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$. Прилагайки бихоломорфното изображение $f : U \to V$ от доказателството на Лема 14.6 получаваме определяща функция $\psi = \varphi \circ f^{-1}$ в околност на $f(0^n) = 0^n$, с Тейлърово развитие

$$\psi(w) = 2Re(w_n) + \frac{1}{2}H_{0^n}(\psi, w) + o(||w||^2).$$

Събираемите от ред 2 в това развитие се свеждат до

$$\frac{1}{2}H_{0^n}(\psi, w) = \frac{1}{2}H_{0^n}(\varphi, f_*^{-1}w)$$

съгласно Лема 14.4(iii). По предположение, формата $H_{0^n}(\varphi, f_*^{-1}w) > 0$ е положително дефинитна за всички ненулеви вектори $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$. Следователно $H_{0^n}(\psi, w) > 0$ за $\forall w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$. Но реалният хесиан на ψ съвпада с формата на Леви $H_{0^n}(\psi, w)$ и строгата положителна дефинитност на $H_\zeta(\psi, w)$ за $\forall \zeta \in f(\partial D) \cap V$ и $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0^n\}$ означава строга изпъкналост на $f(D) \cap V \subset \mathbb{R}^{2n}$ във всяка гранична точка $\zeta \in f(\partial D) \cap V$, Q.E.D.

Лема 14.8. *Нека $W \subseteq \mathbb{R}^n$ е ограничена област с глобална C^2-гладка граница, която е строго локално изпъкнала във всяка своя гранична точка. Тогава съществува константа $C > 0$ и C^2-гладка определяща функция φ на W, така че*

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(\zeta) w_j w_k \geq C ||w||^2 \quad \text{\textit{за}} \quad \forall \zeta \in \partial W, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

Доказателство: Нека ψ е C^2-гладка определяща функция на ∂W. За произволно $\lambda > 0$ определяме

$$\psi_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda \psi(x)} - 1}{\lambda}.$$

На всяка гранична точка $\zeta \in \partial W$ съпоставяме множеството

$$S_\zeta = \left\{ w \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_k}(\zeta) w_j w_k \leq 0, \, ||w||^2 = \sum_{j=1}^n w_j^2 = 1 \right\}$$

на единичните вектори, в които хесианът на ψ в ζ има неположителна стойност. Съгласно изпъкналостта на W в $\zeta \in \partial W$, множеството S_ζ не пресича допирателното порстранство

$$T_\zeta(\partial W) = \left\{ w \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum_{j=1}^k \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\zeta) w_j = 0 \right\}$$

към ∂W в ζ. По определение, S_ζ е затворено и ограничено, а оттам и компактно подмножество на $\mathbb{R}^n$. Затова съществува

$$\mu_\zeta = \min_{w \in S_\zeta} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\zeta) w_j \right| > 0$$

и се достига в някакъв вектор $w(\zeta) \in S_\zeta$. Ако

$$-K_\zeta = \min_{w \in S_\zeta} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_k}(\zeta) w_j w_k \right),$$

то избираме $\lambda = \frac{K_\zeta}{\mu_\zeta^2} + 1$ и $\varphi = \psi_\lambda$. Съгласно $e^{\psi(\zeta)} = 1$, за $\forall w \in \mathbb{R}^n$ с $||w|| = 1$ пресмятаме, че

$$H_\zeta(\varphi, w) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(\zeta) w_j w_k =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_k}(\zeta) + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\zeta) \right] w_j w_k =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_k}(\zeta) w_j w_k + \lambda \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\zeta) w_j \right|^2 = H_\zeta(\psi, w) + \lambda |(\nabla \psi(\zeta), w)|^2.$$

Твърдим, че съществува реална константа $C_\zeta > 0$, така че

$$H_\zeta(\varphi, w) = H_\zeta(\psi, w) + (\nabla \psi(\zeta), w)^2 \geq C_\zeta > 0 \quad \text{за } \forall w \in S. \tag{14.5}$$

Ако $w \in S_\zeta$, то $H_\zeta(\psi, w) \geq -K_\zeta$, $(\nabla\psi(\zeta), w)^2 \geq \mu_\zeta^2$, откъдето $H_\zeta(\varphi, w) \geq \mu_\zeta^2 > 0$. Съгласно непрекъснатостта на $H_\zeta(\varphi, w)$ относно w, съществува $\delta > 0$, така че в околността $S_\zeta^{(\delta)} = \cup_{w\in S_\zeta} B(w, \delta)$ на S_ζ е изпълнено $H_\zeta(\varphi, w) \geq C'_\zeta > 0$ за подходяща константа $C'_\zeta > 0$. В допълнението $S \setminus S_\zeta^{(\delta)}$ с $\lim\limits_{m\to\infty}(\nabla\psi(\zeta), w^{(m)}) = 0$. Върху компактната единична сфера S съществува гранична точка $w^{(0)} \in S$ на $\{w^{(m)}\}_{m=1}^\infty$. В нея $(\nabla\psi(\zeta), w^{(0)}) = 0$, така че $w^{(0)} \in S_\zeta$. Но границата $\partial(S \setminus S_\zeta^{(\delta)})$ не пресича S_ζ и възникващото противоречие доказва, че $\nu_\zeta > 0$. По този начин, $H_\zeta(\varphi, w) \geq \nu_\zeta \geq C_\zeta = \min(C'_\zeta, \nu_\zeta) > 0$ за $\forall w \in S$.

Произволен вектор $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0^n\}$ се представя като $v = ||v|| \left(\frac{v}{||v||}\right)$ с $\frac{v}{||v||} \in S$ и твърдението на лемата следва от (14.5).

По построение, константите $C_\zeta > 0$ зависят непрекъснато от $\zeta \in \partial W$, защото μ_ζ и K_ζ са в непрекъсната зависимост от ζ. Можем да изберем локално постоянни C_ζ. Покриваме компактната граница ∂W с околности, върху които са определени локално постоянни C_ζ. Избираме крайно покритие и универсална долна граница $C > 0$ за цялата граница, Q.E.D.

Следствие 14.9. *Ако ограничена област $W \subset \mathbb{R}^n$ с C^2-гладка граница е строго изпъкнала във всяка своя гранична точка, то W е изпъкнала област.*

Доказателство: Да отбележим, че

$$S = \{(x, y) \in W \times W \,|\, (1-\lambda)x + \lambda y \in W \ \text{ за } \forall 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

е непразно отворено подмножество на $W \times W$. Съгласно Лема 14.8, съществува определяща функция φ на W с

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k}(\zeta) w_j w_k \geq C||w||^2 \quad \text{за} \quad \forall \zeta \in \partial W, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

За да проверим, че S е относително затворено в $W \times W$, допускаме противното и избираме редица $(a^{(m)}, b^{(m)}) \in S$ с граница $\lim\limits_{m\to\infty}(a^{(m)}, b^{(m)}) = (a, b) \in (W \times W) \setminus S$. Тогава $\varphi(a) < 0$, $\varphi(b) < 0$, но $\varphi((1-t_1)a + t_1 b) \geq 0$ в някаква вътрешна точка $t_1 \in (0, 1)$. Следователно $\varphi((1-t)a+tb)$ достига локален максимум във вътрешна точка $t_0 \in (0, 1)$ и $\varphi''(t_o) < 0$. Това противоречи на строгата положителна дефинитност на хесиана на φ и доказва, че S е затворено. Доколкото $W \times W$ е свързано, непразното отворено и затворено подмножество S на $W \times W$ съвпада с $W \times W$ и W е изпъкнало по определение, Q.E.D.

За произволна точка $\zeta \in \mathbb{C}^n$ и линейно независими вектори $u, v \in \mathbb{C}^n$, множеството

$$A_\zeta(u, v) = \{\zeta + t_1 u + t_2 v \,|\, t_1, t_2, \mathbb{C}\}$$

се нарича двумерна афинна равнина през ζ, успоредна на u и v.

Ако $\zeta \in \partial D$ е C^2-гладка гранична точка на област $D \subseteq \mathbb{C}^n$, то оротгоналното допълнение $N_\zeta\mathbb{C}(\partial D) = T_\zeta^{\mathbb{C}}(\partial D)^\perp$ относно стандартното ермитово скаларно произведение е комплексна права, нареечна комплексна норамла към ∂D в a.

Теорема 28. *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е област с C^2-гладка гранична точка $\zeta \in \partial D$, $T_\zeta^{\mathbb{C}}(\partial D)$ е комплексното допирателно пространство към ∂D в ζ, а $\nu \in N_\zeta^{\mathbb{C}}(\partial D)$ е нормален вектор към ∂D в ζ. Ако за $\forall w \in T_\zeta^{\mathbb{C}}(\partial D)$ сечението $D_\zeta(w) = D \cap A_\zeta(\nu, w)$ е локално псевдоизпъкнало в $\zeta \in \partial D_\zeta(w)$, то областта D е локално псевдоизпъкнала в $\zeta \in \partial D$.*

Доказателство: Нека φ е C^2-гладка определяща функция на D в околност U на $\zeta \in \partial D$. За всяко двумерно афинно подпространство $A = A_\zeta(\nu, w) \in \mathbb{C}^n$

разглеждаме холоморфното влагане $g_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^n$, $g_A(t_1, t_2) = \zeta + t_1\nu + t_2 w$ на $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^n$ с образ A. Тогава

$$D_\zeta(w) \cap U = \{(t_1, t_2) \in g_A^{-1}(U) \mid \varphi(g_A)(t_1, t_2) < 0\}.$$

Твърдим, че $(\xi_1, \xi_2) = (0, 1) \in T^{\mathbb{C}}_{0^2}(\partial D_\zeta(w))$ е комплексен допирателен вектор. Наистина,

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \varphi(g_A)}{\partial t_j}(0^2)\xi_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(g_A(0^2))\frac{\partial (g_A)_k}{\partial t_2}(0^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(\zeta) w_k = 0,$$

защото $w \in T^{\mathbb{C}}_\zeta(\partial D)$. По предположение, областта $D_\zeta(w)$ е локално псевдоизпъкнала в 0^2, така че

$$0 \leq \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 \varphi(g_A)}{\partial t_j \partial \overline{t_k}}(0^2)\xi_j\overline{\xi_k} = \frac{\partial^2 \varphi(g_A)}{\partial t_2 \partial \overline{t_2}}(0^2) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_l \partial \overline{z_m}}(\zeta) w_l \overline{w_m}.$$

Горното е изпълнено за $\forall w \in T^{\mathbb{C}}_\zeta(\partial D)$, така че D е локално псевдоизпъкнала в $\zeta \in \partial D$, Q.E.D.
За разлика от холоморфната изпъкналост, локалната псевдоизпъкналост и строгата локална псевдоизпъкналост са локални свойства и допускат ефективна проверка, но не характеризират глобално изучаваните области.

Определение 14.10. *Областта D е холоморфно неразширяема в граничната си точка $a \in \partial D$, ако съществува околност U_a на a и холоморфна функция $f : D \cap U_a \to \mathbb{C}$, която не се продължава холоморфно в a.*

Ясно е, че ако D е област на холоморфност, то D е холоморфно неразширяема във всяка своя гранична точка.
Локалният въпрос за холоморфна неразширяемост в гранична точка се решава в термините на локалната псевдоизпъкналост.

Теорема 29. *Нека област D е C^2-гладка в околност на граничната си точка $a \in D$.*
(i) Ако D е строго локално псевдоизпъкнала в a, то D е холоморфно неразширяема в a.
(ii) Ако D е холоморфно неразширяема в точка a, то D е локално псевдоизпъкнала в a.

Доказателство: Без ограничение на общността можем да считаме, че $a = 0^n$. За локалната определяща φ на D в околност U на a предполагаме, че има линейна част на Тейлъровото развитие $L_o(z) = \frac{z_n}{2}$. За целта избираме линейна смяна на променливите $z = Ay$ с неособена матрица $A \in GL_n(\mathbb{C})$, чиито стълбове $(a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ с номера $1 \leq i \leq n-1$ са в комплексното допирателно пространство $T^{\mathbb{C}}_{0^n}(\partial D)$ и изпълняват равенствата $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(0^n) = 0$. Тогава $z_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} y_i$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(0^n) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial z_j}{\partial y_i}\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(0^n) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(0^n) = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq n-1$.
Сега φ има Тейлърово развитие от вида

$$\varphi(z) = Re(z_n + K_o(z)) + \frac{1}{2}H_o(z) + o(||z||^2) \tag{14.6}$$

в U, а комплексното допирателно пространство

$$T^{\mathbb{C}}_{0^n}(\partial D) = \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}.$$

Да разгледами холоморфната функция $f(z) = z_n + K_o(z)$ и аналитичната хиперповърхнина $A = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$, определена от нея.

(i) Ако областта D е строго локално псевдоизпъкнала в точката $0^n \in \partial D$, тогава както в доказателството на Теорема 26 заменяме φ с $\varphi + k\varphi^2$ за подходяща константа $k \geq 0$, така че $H_o(z) > 0$ за $\forall z \neq 0^n$. При тази смяна се запазва условието $\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(0^n) = 0$ за $\forall 1 \leq j \leq n-1$ и Тейлъровото развитие на $\varphi(z)$ запазва вида на (14.6). Ако $S = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, ||z|| = 1\}$ е единичната сфера, а $m = \min\limits_{z \in S} H_{0^n}(z)$, то от $H_{0^n}(z) > 0$ за $\forall z \in S$ следва $m \geq 0$. Твърдим, че $m > 0$. В противен случай, съществува редица $\{z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset S$ с $\lim\limits_{m \to \infty} H_{0^n}(z^{(m)}) = 0$. След евентуално преминаване към подредица можем да считаме, че $\{z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ е сходяща към $\lim\limits_{m \to \infty} z^{(m)} = z^{(0)}$, съгласно компактността на S. Но тогава $H_{0^n}(z^{(0)}) = 0$ противоречи на избора на определяща функция и доказва, че $m > 0$. В резултат, всяко $\forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$ изпълнява равенството

$$H_{0^n}(z) = ||z||^2 H_{0^n}\left(\frac{z}{||z||}\right) \geq m||z||^2.$$

Ограничението на (14.6) върху A изпълнява неравенствата

$$\varphi|_A = \frac{1}{2} H_{0^n}(z) + o(||z||^2) \geq \frac{m}{2}||z||^2 + o(||z||^2) > 0$$

за достатъчно малки $||z|| > 0$. По този начин, аналитичната хиперповърхнина A през 0^n се намира извън D в достатъчно малка околност на 0^n. Следователно $\frac{1}{f} : D \cap U \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция, която не се продължава холоморфно в 0^n и D е холоморфно неразширяема в тази точка.

(ii) Да допуснем, че D е холоморфно неразширяема в точката $0^n \in \partial D$, но не е псевдоизпъкнала в тази точка. Тогава съществува комплексен допирателен вектор $w = (w', 0) \in T^{\mathbb{C}}_{0^n}(\partial D)$, $w' \in \mathbb{C}^{n-1}$, в който $H_{0^n}(w) < 0$. Да разгледаме комплексната двумерна равнина P, минаваща през оста $0z_n \longrightarrow$ и вектора w. Да означим с $C = A \cap P$ холоморфната крива, в която аналитичната хиперповърхнина A пресича P. Непосредствено се вижда, че

$$C = \{\zeta w + \eta e_n \in \mathbb{C}^n \,|\, g(\zeta, \eta) = \eta + K_o(\zeta w + \eta e_n) = 0, \zeta, \eta \in \mathbb{C}\}.$$

Съгласно $\frac{\partial g}{\partial \eta}(0,0) = 1 \neq 0$, можем да приложим Теоремата за неявната функция и да представим η като холоморфна функция $\eta = \eta(\zeta)$ в достатъчно малка околност на $\zeta = 0 \in \mathbb{C}$. Понеже $g(0,0) = 0$, Тейлъровият ред на $\eta(\zeta)$ около $0 \in \mathbb{C}$ има вида $\eta(\zeta) = c\zeta + o(|\zeta|)$ за някакво комплексно число c. Кривата C се състои от точките $\zeta w + \eta e_n = (\zeta w_1, \ldots, \zeta w_{n-1}, \eta)$ с $g(\zeta, \eta) = 0$. За достатъчно малки по модул $\zeta \in \mathbb{C}$, в тях е изпълнена оценката

$$\eta = -K_o(\zeta w + \eta e_n) = -K_o(\zeta(w + ce_n) + o(|\zeta|)e_n) = \alpha\zeta^2 + o(|\zeta|^2)$$

за подходящо $\alpha \in \mathbb{C}$. По този начин получаваме параметризация

$$\left| \begin{array}{c} z'(\zeta) = \zeta w' \\ z_n(\zeta) = \alpha\zeta^2 + o(|\zeta|^2) \end{array} \right. \qquad \forall \zeta \in \mathbb{C}$$

на C в околност на $0^n \in C$. Да означим накратко $z(\zeta) = (z'(\zeta), z_n(\zeta))$. Комплексното допирателно пространство $T^{\mathbb{C}}_{0^n} C$ към C в 0^n е подпространство на

$$T^{\mathbb{C}}_{0^n} A = \left\{ w = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial z_i} \,\middle|\, \partial f(w)(0^n) = w_n = 0 \right\}$$

и съвпада с правата $T^{\mathbb{C}}_{0^n} C = l_{\mathbb{C}}(w)$, породена от вектора $w = (w', 0)$. Както в доказателството на (i) получаваме

$$\varphi|_C = \frac{1}{2} H_{0^n}(w)|\zeta|^2 + o(|\zeta|^2).$$

Поради $H_{0^n}(w) < 0$, съществува $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$, така че

$$(\overline{D_o})^* = \{(z'(\zeta), z_n(\zeta)) \in \mathbb{C}^n \,|\, \zeta \in \overline{D(0,\delta)} \setminus \{0\}\} \subset D.$$

В резултат, за достатъчно малки $t \in \mathbb{R}^{>0}$ холоморфните дискове

$$\overline{D_t} = \{(z'(\zeta), z_n(\zeta) - t) \in \mathbb{C}^n \,|\, \zeta \in \overline{D(0,\delta)}\} \subset D$$

се съдържат компактно в D. Причина за това е, че $0^n \not\in \overline{D_t}$ за $\forall t > 0$. Ограничените холоморфни дискове $\overline{D_t}$ са затворени, а оттам и компактно вложени в D. Те клонят към

$$\overline{D_o} = \{(z'(\zeta), z_n(\zeta)) \in \mathbb{C}^n \,|\, \zeta \in \overline{D(0,\delta)}\}.$$

Границите

$$\partial D_t = \{(z'(\zeta), z_n(\zeta) - t) \in \mathbb{C}^n \,|\, \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = \delta\}$$

клонят към компактно вложеното подмножество

$$\Gamma = \{(z'(\zeta), z_n(\zeta)) \in \mathbb{C}^n \,|\, \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = \delta\} = \overline{\Gamma} \subset (\overline{D_o})^* \subset D.$$

Съгласно Теорема 25, за всяка околност U на a и всяка холоморфна функция $f : D \cap U \to \mathbb{C}$ съществува холоморфно продължение в околност на $\overline{D_o}$. В частност, f е холоморфно продължима в $a = 0^n$, противно на предположението, Q.E.D.

Чрез доказателството на Твърдение (ii) от Теорема 29 установихме и следното

Следствие 14.11. *Нека $\varphi : U \to \mathbb{R}$ е C^2-функция с неанулиращ се градиент в околност $U \subseteq \mathbb{C}^n$ на точка $a \in \mathbb{C}^n$, която се анулира в a и определя реалната хиперповърхнина*

$$S = \{z \in U \,|\, \varphi(z) = 0\}.$$

Да предположим, че формата на Леви

$$H_a(\varphi, \ ) : T_a^{\mathbb{C}} S \longrightarrow \mathbb{C}$$

има поне една отрицателна собствена стойност или, еквивалентно,

$$H_a(\varphi, w) < 0$$

за някакъв комплексен допирателен вектор $w \in T_a^{\mathbb{C}} S$. Тогава произволна холоморфна функция

$$f : \{z \in U \,|\, \varphi(z) < 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

има холоморфно продължение в a.

Накрая да отбележим, че ако в околност U на гранична точка $a \in \partial D$ на област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ съществува комплексна хиперповърхнина $A = \{z \in U \,|\, f(z) = 0\}$, която се съдържа в допълнението $\mathbb{C}^n \setminus D$ и се допира външно до D в a, то D е холоморфно неразширяема в a, доколкото холоморфната функция

$$\frac{1}{f} : D \cap U \longrightarrow \mathbb{C}$$

не се продължава в $a \in \partial D$. Съгласно Теорема 29 (ii), оттук следва псевдоизпъкналостта на D в $a \in \partial D$. Този критерий е аналогичен на критерия за геометрична изпъкналост на област $W \subset \mathbb{R}^n$, при наличие на реална хиперповърхнина M през $a \in \partial W$, която се допира до W в a и е разположена извън W в околност на a.