Глава 15

Плурисубхармонични функции

За прехода от локална към глобална псевдоизпъкналост е нужно да изучим плурисубхармоничните функции. Както споменахме в глава 5, субхармоничните функции в област $D \subset \mathbb{C}$ са двумерен аналог на изпъкналите реални функции върху интервал. Ще считаме, че една функция $f : W \to \mathbb{R}$ в област $W \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнала, ако за произволна реална права $L \subset \mathbb{R}^n$ с $L \cap W \neq \emptyset$, ограничението $f : L \cap W \to \mathbb{R}$ е изпъкнала функция на една променлива.

Лема 15.1. *Нека $f : W \to \mathbb{R}$ е функция от клас C^2 в област $W \subseteq \mathbb{R}^n$. В такъв случай, f е изпъкнала тогава и само тогава, когато хесианът*

$$H_w(f, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(w) v_i v_j \geq 0, \qquad \textit{за} \quad \forall w \in W, \quad v \in \mathbb{R}^n$$

е неотрицателно дефинитен във всяка точка w от областта.

Доказателство: Достатъчно е да докажем лемата за функция $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ в (евентуално безкраен) интервал. Причина за това е, че условието

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2} f(a + bt) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + bt) b_i b_j \qquad \text{за} \quad \forall b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0^n\}$$

е равносилно на неотрицателната дефинитност на хесиана $H_w(f, v)$.
Нека $f''(r) \geq 0$ за $\forall r \in (\alpha, \beta)$. Тогава за достатъчно близки$x, y \in (\alpha, \beta)$ и за $z = tx + (1-t)y$ с $t \in [0, 1]$ са в сила формулите на Тейлър

$$f(x) = f(z) + \frac{(x - z)}{1!} f'(z) + \frac{(x - z)^2}{2!} f''(\xi),$$

$$f(y) = f(z) + \frac{(y - z)}{1!} f'(z) + \frac{(y - z)^2}{2!} f''(\eta)$$

за подходящи ξ между x, z и η между y, z. В резултат,

$$tf(x) + (1-t)f(y) = f(z) + \frac{t(x - z)^2 f''(\xi) + (1 - t)(y - z)^2 f''(\eta)}{2} \geq f(tx + (1-t)y),$$

което по определение е изпъкналост на f.
Обратно, ако f е изпъкнала и допуснем, че $f''(t_o) < 0$ за някое $r_o \in (\alpha, \beta)$, то $(-f)''(r_o) > 0$. Поради непрекъснатостта на $f'' : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, съществува досаттъчно малко $\delta > 0$, така че $(-f)''(r) > 0$ за всички $r \in (r_o - \delta, r_o + \delta)$. Съгласно доказаното, функцията $(-f) : (r_o - \delta, r_o + \delta) \to \mathbb{R}$ е изпъкнала. Това означава, че

$$-f(tx + (1-t)y) \leq t(-f(x)) + (1-t)(-f(y)) \text{ за } \forall x, y \in (r_o - \delta, r_o + \delta), \forall 0 \leq t \leq n.$$

Комбинирайки с изпъкналостта на f получаваме

$$f(tx + (1 - t)y) = tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Следователно $f(r) = a + br : (r_o - \delta, r_o + \delta) \to \mathbb{R}$ е афинно линейна функция и $f'' \equiv 0$ в интервала $(r_o - \delta, r_o + \delta)$. Това противоречи на допускането $f''(r_o) < 0$ и доказва $f'' \geq 0$ за всяка изпъкнала функция f от клас C^2, Q.E.D.

Плурисубхармоничните функции са комплексен аналог на изпъкналите функции на няколко променливи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.2. *Функцията* $\varphi : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *в област* $D \subset \mathbb{C}^n$ *се нарича плурисубхармонична, ако:*
(i) φ *е полу-непрекъсната отгоре и*
(ii) за произволна права $L = \{a + \zeta w \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\}$ *през точка* $a \in D$*, успоредна на вектор* $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$*, ограничението* $\varphi : L \cap D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *е субхармонична функция в областта* $L \cap D \subset \mathbb{C}$*.*

Съгласно Следствие 6.9, произволна холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ в област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ определя плурисубхармонична функция $\log |f| : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

СЛЕДСТВИЕ 15.3. *Ако* $D \subseteq \mathbb{C}^n$ *е област, а* $\varphi \in C^2(D)$ *е реална функция с непрекъснати частни производни от ред 2, то* φ *е плурисубхармонична в точка* $z \in D$ *тогава и само тогава, когато формата на Леви*

$$H_z(\varphi, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(z) w_i \overline{w_j} \geq 0 \quad \text{за } \forall w \in \mathbb{C}^n.$$

Доказателство: Да напомним, че в комплексната равинна на $\zeta \in \mathbb{C}$, лапласианът

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}.$$

Следователно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}(a + \zeta w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(a + \zeta w) w_i \overline{w_j}.$$

Съгласно Следствие 6.7, ограничението

$$\varphi : \{a + \zeta w \in D \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

е субхармонична функция тогава и само тогава, когато $\Delta\varphi(a + \zeta w) \geq 0$, Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.4. *Функцията* $\varphi : D \to \mathbb{R}$ *в област* $D \subseteq \mathbb{C}^n$ *се нарича строго плурисубхармонична, ако*
(i) $\varphi \in C^2(D)$ *и*
(ii) във всяка точка $z \in D$ *формата на Леви* $H_z(\varphi, w) > 0$ *е строго положително дефинитна за* $\forall w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$*.*

Да напомним, че

$$\partial = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j, \quad \overline{\partial} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j}$$

в холоморфни координати $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Ако $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ имат реална част $Re(z_j) = x_j \in \mathbb{R}$ и имагинерна част $Im(z_j) = y_j \in \mathbb{R}$, то пълният диференциал

$$d = \partial + \overline{\partial} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial}{\partial y_j} dy_j \right).$$

Определяме оператора

$$d^c = \frac{\partial - \overline{\partial}}{4i}$$

и пресмятаме непосредствено, че

$$dd^c = \frac{1}{4i}(\partial + \overline{\partial})(\partial - \overline{\partial}) = \frac{i}{2} \partial \overline{\partial}.$$

За произволна функция φ от клас C^2, формата

$$dd^c\varphi = \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}dz_i\wedge d\overline{z_j}$$

е (строго) положително дефинитна тогава и само тогава, когато функцията φ е (строго) плурисубхармонична.
В останалата част от този въпрос ще изучим някои свойства на плурисубхармоничните функции, без да предполагаме, че те са от клас C^2.

Твърдение 15.5. *Ако функцията $\varphi : D \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ е плурисубхармонична в област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ и достига локален максимум във вътрешна точка $a \in D$, то φ е постоянна в D.*

Доказателство: Достатъчно е да установим, че ако субхармонична функция $\varphi : D \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ в област $D \subseteq \mathbb{C}$ достига локален максимум във вътрешна точка $a \in D$, то $\varphi \equiv \mathrm{Const}$ е постоянна в D. За целта допускаме противното и избираме такава окръжност $\partial D(a,r)$ с център a и радиус $r > 0$, че
(i) $\overline{D(a,r)} \subset D$;
(ii) $\varphi(z) \leq \varphi(a)$ за $\forall z \in \overline{D(a,r)}$ и
(iii) $\varphi(\zeta_o) < \varphi(a)$ в някаква точка $\zeta_o \in \partial D(a,r)$.
Съгласно полу-непрекъснатостта на φ отгоре, за достатъчно малко $\varepsilon > 0$ съществува дъга $\gamma \subset \partial D(a,r)$, така че $\varphi(\zeta) < \varphi(a) - \varepsilon$ за $\forall\zeta \in \gamma$. Избираме дъга $\delta \subset \gamma$ с компактна затворена обвивка $\overline{\delta} \subset \gamma$ и построяваме непрекъсната функция $h : \partial D(a,r) \to \mathbb{R}$ по следния начин: Полагаме $h(\zeta) = \varphi(a) - \varepsilon$ за $\forall\zeta \in \delta$ и $h(\zeta) = \varphi(a)$ за $\forall\zeta \in \partial D(a,r) \setminus \gamma$. Върху дъгите от допълнението $\gamma \setminus \delta$ продължаваме h по непрекъснатост така, че да зависи линейно от $t = \arg(\zeta - a)$. Тогава

$$\varphi(\zeta) \leq h(\zeta) \quad \text{за } \forall\zeta \in \partial D(a,r).$$

По Лема 4.10 функцията

$$P(h)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\theta)h(a+re^{i\theta})d\theta$$

е хармонична в $D(a,r) \ni z$ и съвпада с h по границата $\partial D(a,r)$. Затова

$$\varphi(\zeta) \leq h(\zeta) = P(h)(\zeta) \quad \text{за } \forall\zeta \in \partial D(a,r).$$

Съгласно Определение 5.3 за субхармонична функция, оттук следва

$$\varphi(z) \leq P(h)(z) \quad \text{за } \forall z \in D(a,r).$$

Но съгласно Следствие 6.8,

$$P(h)(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(h)(a+re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(a+re^{i\theta})d\theta,$$

така че

$$\varphi(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(a+re^{i\theta})d\theta.$$

Съгласно избора на функцията $h : \partial D(a,r) \to \mathbb{R}$ интегралът

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(a+re^{i\theta})d\theta < \varphi(a).$$

Противоречието доказва, че $\varphi \equiv \mathrm{Const}$ е постоянна в D, Q.E.D.
От Следствие 6.1 получаваме непосредствено следното

Следствие 15.6. *Нека $\varphi : D \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ е такава функция в област $D \subseteq \mathbb{C}^n$, че всяка точка $a \in D$ има околност $a \in U_a \subset D$, в която $\varphi : U_a \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е плурисубхармонична. Тогава $\varphi : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е плурисубхармонична в цялата област D.*

Аналогично, Следствие 6.4 дава

Следствие 15.7. *Ако $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ е фамилия от плурисубхармонични в област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ функции и функцията*

$$z \mapsto \varphi(z) = \sup_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(z)$$

е полу-непрекъсната отгоре в D, то φ е плурисубхароммнична в D.

От Критерия за субхармоничност (Твърдение 5.5) следва следното

Следствие 15.8. (Критерий за плурисубхармоничност) *Нека $\varphi : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е полу-непрекъсната отгоре функция в област $D \subseteq \mathbb{C}^n$. В такъв случай, φ е плурисубхармонична тогава и само тогава, когато за всяка точка $a \in D$ и всеки ненулев вектор $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$ съществува $R = R(a, w) \in \mathbb{R}^{>0}$, така че правата $L = \{a + \zeta w \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\}$ пресича кълбото $B(a, R)$ в диск $L \cap B(a, R) \subset D$ и*

$$\varphi(a) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + \rho e^{i\theta})d\theta \quad \text{за} \quad \forall 0 < \rho < R(a, w).$$

За доказателството на някои от следващите свойства на плурисубхармоничните функции ще използваме метриката на Фубини-Щуди. Тя е определена в проективното пространство $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\})/\mathbb{C}^*$, което може да се разглежда като множеството на $\mathbb{C}^*$-орбитите върху $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0^{n+1}\}$ или като множеството на правите в $\mathbb{C}^{n+1}$ през началото $0^{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1}$. Точките в $\mathbb{P}^n$ се задават със своите хомогенни координати $w = [w_0 : w_1 : \ldots : w_n]$, където

$$z = w \Longleftrightarrow w_i = \lambda z_i \text{ за някое } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ и } \forall 0 \le i \le n.$$

Ако

$$(u, v) = \sum_{i=0}^{n} u_i \overline{v_i}$$

е ермитовото скаларно произведение в $\mathbb{C}^{n+1}$, то за всяка точка $w \in \mathbb{P}^n$ определяме формата

$$\omega = \frac{i}{2}\frac{(w, w)(dw, dw) - (w, dw)(dw, w)}{(w, w)^2}.$$

Съгласно линейността на ермитовото скаларно произведение относно първия аргумент и косо-линейността спрямо втория аргумент, формата $\omega(\lambda w) = \omega(w)$ е инвариантна относно действието на $\lambda \in \mathbb{C}^*$, а оттам и коректно определена върху $\mathbb{P}^n$. Нека

$$d^c = \frac{\partial - \overline{\partial}}{4i},$$

така че

$$dd^c = \frac{(\partial + \overline{\partial})(\partial - \overline{\partial})}{4i} = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}.$$

Непосредствено се проверява, че $\omega = dd^c \log ||w||^2$. За $w_0 \neq 0$ функцията $\log |w_0|^2 = \log w_0 + \log \overline{w_0}$ е хармонична, откъдето $dd^c \log |w_0|^2 = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial} \log |w_0|^2 = 0$ и

$$dd^c \log ||w||^2 = dd^c \log \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{w_i}{w_0}\right|\right).$$

Върху отвореното подмножество $U_0 = \{w \in \mathbb{P}^n \,|\, w_0 \neq 0\}$ въвеждаме локални координати $z_i = \frac{w_i}{w_0}$ за $1 \leq i \leq n$ и отъждествяваме U_0 с $\mathbb{C}^n$. По този начин,

$$\omega = dd^c \log(1 + ||z||^2) \quad \text{за } \forall z \in \mathbb{C}^n \simeq U_0.$$

Теорема 30. *Обемът на проективното пространство $\mathbb{P}^n$ относно метриката на Фубини-Щуди е*

$$\int_{\mathbb{P}^n} \omega^n = \pi^n.$$

Доказателство: Множеството на безкрайните точки

$$\mathbb{P}^n \setminus U_0 = \{w = [0 : w_1 : \ldots : w_n] \in \mathbb{P}^n\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$$

има реална коразмерност 2 и не влияе на интегрирането. Затова

$$I_n = \int_{\mathbb{P}^n} \omega^n = \int_{U_0} [dd^c \log(1 + ||z||^2)]^n.$$

Ще работим с индукция по $n \in \mathbb{N}$. За $n = 1$ преминаваме към полярни координати $z_1 = re^{i\theta}$ с $r \in \mathbb{R}^{>0}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ и пресмятаме

$$I_1 = \int_{\mathbb{P}^1} \omega = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{C}} \frac{dz_1 \wedge d\overline{z_1}}{(1 + ||z_1||^2)^2} = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{rdr}{(1 + r^2)^2} \right] d\theta = \pi,$$

съгласно

$$\omega = \frac{i}{2} \partial\overline{\partial} \log(1 + z_1\overline{z_1}) = \frac{i}{2} \frac{dz_1 \wedge d\overline{z_1}}{(1 + ||z_1||^2)^2}.$$

За произволно $n \in \mathbb{N}$ представяме

$$\omega = \frac{i}{2} \left[\frac{\sum\limits_{j=1}^n dz_j \wedge d\overline{z_j}}{1 + ||z||^2} - \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^n \overline{z_j} dz_j\right) \wedge \left(\sum\limits_{j=1}^n z_j d\overline{z_j}\right)}{(1 + ||z||^2)^2} \right].$$

Вземайки предвид

$$\left(\sum_{j=1}^n \overline{z_j} dz_j\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n \overline{z_j} dz_j\right) = 0 \quad \text{и}$$

$$\left(\sum_{j=1}^n z_j d\overline{z_j}\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n z_j d\overline{z_j}\right) = 0$$

пресмятаме

$$\omega^n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \Bigg\{ \frac{n!}{(1 + ||z||^2)^n} \prod_{j=1}^n dz_j \wedge d\overline{z_j} -$$

$$- \frac{(n-1)!n}{(1 + ||z||^2)^{n+1}} \sum_{j=1}^n dz_1 \wedge d\overline{z_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_j} \wedge \widehat{d\overline{z_j}} \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge \overline{z_n} \wedge \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{z_i} z_k dz_i \wedge d\overline{z_k} \right) \Bigg\}$$

или

$$\omega^n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{n!}{(1 + ||z||^2)^{n+1}} \prod_{j=1}^n dz_j \wedge d\overline{z_j}. \tag{15.1}$$

Ако $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ и $z_n = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ с $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, то интегрирайки първо относно z_n, а после относно z', получаваме, че

$$I_n = \int\limits_{\mathbb{C}^n} \omega^n = \int\limits_{\mathbb{C}^{n-1}} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} n! \left(\prod_{j=1}^{n-1} dz_j \wedge d\overline{z_j}\right) \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{rdr}{(1 + ||z'||^2 + r^2)^{n+1}} d\theta,$$

$$I_n = \pi \int\limits_{\mathbb{C}^{n-1}} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1 + ||z'||^2)^n} \prod_{j=1}^{n-1} dz_j \wedge d\overline{z_j}.$$

С помощта на (15.1) забелязваме, че $I_n = \pi I_{n-1}$. Следователно редицата $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ е геометрична прогресия с начален член $I_1 = \pi$ и частно π, така че $I_n = \pi^n$ за $\forall n \in \mathbb{N}$, Q.E.D.

Възоснова на Теорема 30 казваме, че формата $\frac{\omega}{\pi}$ е нормирана форма на Фубини-Щуди, защото нейният интеграл по $\mathbb{P}^n$ е 1.

Твърдение 15.9. *Нека $\varphi : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и плурисубхармонична функция в околност $U \subseteq \mathbb{C}^n$ на точка $a \in \mathbb{C}^n$, а*

$$S(a, r) = \partial B(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, ||z - a|| = r\} \subset U$$

е сфера с център a и радиус $r \in \mathbb{R}^{>0}$. Тогава за достатъчно малко $r > 0$ стойността $\varphi(a)$ не надминава средната стойност на φ върху $S(a, r)$, т.е.

$$\varphi(a) \leq \frac{1}{\mathrm{vol} S(a, r)} \int\limits_{S(a,r)} \varphi(z) d\sigma_r.$$

Доказателство: Без ограничение на общността можем да считаме, че $a = 0^n \in \mathbb{C}^n$ е началото на $\mathbb{C}^n$. Твърдим, че елементът на лицето $d\sigma_r$ се задава с формата

$$d\sigma_r = \frac{1}{\pi} d^c \log ||z||^2 \wedge \left(\frac{dd^c \log ||z||^2}{\pi}\right)^{n-1}.$$

За $n = 1$ в полярни координати $z_1 = re^{i\theta}$ имаме

$$\frac{1}{\pi} d^c \log |z_1|^2 = \frac{d\theta}{2\pi} = d\sigma_r.$$

За произволно $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ е достатъчно да отбележим, че в хомогенни координати $z = [z_1 : \ldots : z_n]$ формата $\frac{dd^c \log ||z||^2}{\pi}$ съвпада с нормираната форма на Фубини-Щуди. За произволен единичен вектор $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$ означаваме с $L_w = \{\zeta w \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\}$ правата през началото 0^n, успоредна на w. За пресмятане на

$$\int\limits_{S(0 \cdot r)} \varphi(z) d\sigma_r$$

да започнем интегрирането по окръжността

$$L_w \cap S(0^n, r) = \{\zeta w \,|\, |\zeta| = r\} \simeq \partial D(0, r),$$

а после по множеството $\mathbb{P}^{n-1}$ на правите $L_w \subset \mathbb{C}^n$ през началото. Ако $t = \arg(\zeta)$ и $r = |\zeta|$, то

$$\frac{d^c \log ||z||^2}{\pi} = \frac{dt}{2\pi} \quad \text{и}$$

$$S(r) = \frac{1}{\mathrm{vol} S(0^n, r)} \int\limits_{S(0^n, r)} \varphi(z) d\sigma_r =$$

$$\int\limits_{\mathbb{P}^{n-1}} \frac{1}{\pi^{n-1}} (dd^c \log ||z||^2)^{n-1} \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(zre^{it}) dt\right]. \qquad (15.2)$$

Съгласно Критерия за плурисубхармоничност (Следствие 15.8),

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(zre^{it})dt \geq \varphi(0^n).$$

От друга страна,

$$\omega_o = \frac{dd^c \log ||z||^2}{\pi}$$

е нормираната форма на Фубини-Щуди за $\mathbb{P}^{n-1}$. Затова

$$S(r) \geq \varphi(0)\int_{\mathbb{P}^{n-1}}\omega_o^{n-1} = \varphi(0)$$

по Теорема 30, Q.E.D.

За да докажем, че средната стойност на плурисубхармонична функция върху сфера е растяща функция на радиуса на сферата ни е необходимо понятието за най-добра хармонична мажоранта на субхармонична функция $u : D(a,r) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Това изисква Теоремата на Харнак за границата на намаляваща редица от хармонични функции, която използва от своя страна средно аритметичното свойство на хармонична функция върху диск.

ТЕОРЕМА 31. *Ако $h : D \to \mathbb{R}$ е локално интегруема функция върху област $D \subseteq \mathbb{C}$, то h е хармонична в D тогава и само тогава, когато във всяка точка $a \in D$ стойността*

$$h(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} h(z)d\mathrm{vol} \quad \text{за } \forall 0 < r < R(a) = \rho(a, \partial D) = \inf_{z\in\partial D}|z-a|. \tag{15.3}$$

Доказателство: Ако $h : D \to \mathbb{R}$ е хармонична функция, то съгласно Следствие 6.8 е изпълнено

$$h(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(a+\rho e^{i\theta})d\theta \quad \text{за } \forall 0 < \rho < R(a).$$

За всяко фиксирано $r \in (0, R(a))$ интегрираме по $\rho \in [0, r]$ и получаваме

$$h(a)\int_0^r \rho d\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r h(a+\rho e^{i\theta})\rho d\rho d\theta,$$

което е еквивалентно на (15.3).

Обратно, твърдим, че ако функцията $h : D \to \mathbb{R}$ изпълнява условието (15.3), то h е непрекъсната в D. За целта използваме локалната интегруемост на h в D. По-точно, за всяко $\varepsilon_1 > 0$ съществува $\delta_1 > 0$, така че върху произволно подмножество $M \subset D$ с лице $\mathrm{vol}(M) < \delta_1$ интегралът

$$\int_M h d\mathrm{vol} < \varepsilon_1.$$

Сега за произволно $\varepsilon > 0$ полагаме $\varepsilon_1 = \varepsilon\pi r^2$, определяме $\delta_1 > 0$ с гореспоменатото свойство и избираме $0 < \delta < 2\sqrt{\pi(\pi r^2 + \delta_1)} - r$. Тогава за всяка точка $z \in D(a, \delta)$ е в сила

$$D(z,r) \setminus D(a,r) \subseteq D(a, r+\delta) \setminus D(a,r),$$

съгласно неравенството на триъгълника $|y-a| \leq |y-z| + |z-a|$. Следователно лицето

$$V = \mathrm{vol}(D(z,r) \setminus D(a,r)) \leq \mathrm{vol}D(a, r+\delta) - \mathrm{vol}D(a,r) \quad \text{или}$$

$$V \leq \pi(r+\delta)^2 - \pi r^2 = \pi\delta(2r+\delta) < \delta_1.$$

По този начин,

$$h(z) - h(a) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D(z,r)\setminus D(a,r)} h(\zeta) d\text{vol} < \frac{\varepsilon_1}{\pi r^2} = \varepsilon$$

за $\forall z \in D(a,\delta)$ и h е непрекъсната в a.
Сега да фиксираме точка $a \in D$ и диск $D(a,r)$, който се съдържа в D заедно със затворената си обвивка $\overline{D(a,r)} \subset D$. Да напомним ядрото на Поасон

$$P(z,\theta) = Re\left[\frac{re^{i\theta} + (z-a)}{re^{i\theta} - (z-a)}\right] = \frac{|\zeta - a|^2 - |z-a|^2}{|\zeta - z|^2}$$

за $z \in D(a,r)$ и $\zeta = a + re^{i\theta} \in \partial D(a,r)$. В доказателството на Следствие 4.11 установихме, че функцията

$$H(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(z,\theta) h(a + re^{i\theta}) d\theta$$

е хармонична за $\forall z \in D(a,r)$. Съгласно Лема 4.10, H се продължава непрекъснато до функция $H : \overline{D(a,r)} \to \mathbb{R}$ с $H(\zeta) = h(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial D(a,r)$. Ще докажем, че H съвпада тъждествено с h в $D(a,r)$. За целта да отбележим, че хармоничната функция H изпълнява средно аритметичното свойство (15.3), съгласно доказаната посока на теоремата. Следователно и функцията $\varphi(z) = H(z) - h(z)$ изпълнява равенството

$$\varphi(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D(a,r)} \varphi(\zeta) d\text{vol} \quad \text{за } \forall 0 < r < R(a).$$

Функцията $\varphi : \overline{D(a,r)} \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и се анулира тъждествено върху окръжността $\partial D(a,r)$. Ако допуснем, че $\varphi|_{\overline{D(a,r)}} \not\equiv 0$, то поне едното от максимума или минимума на φ в компакта $\overline{D(a,r)}$ е различно от 0. Нека $\max\limits_{z \in \overline{D(a,r)}} \varphi(z) \neq 0$ и се достига в точка $b \in \overline{D(a,r)}$. Тогава $b \in D(a,r)$ е вътрешна точка. Съществува $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$, така че
(i) $\overline{D(b,\rho)} \subset D(a,r)$;
(ii) $\varphi(z) \leq \varphi(b)$ за $\forall z \in \overline{D(b,\rho)}$ и
(iii) $\varphi(c) < \varphi(b)$ в някоя точка $c \in D(b,\rho)$.
От една страна,

$$\varphi(b) = \frac{1}{\pi\rho^2} \int\limits_{D(b,\rho)} \varphi(\zeta) d\text{vol} \tag{15.4}$$

От друга страна, съгласно непрекъснатостта на φ в точката c, за достатъчно малко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че $D(c,\delta) \subset D(b,\rho)$ и $\varphi(z) < \varphi(b) - \varepsilon$ за $\forall z \in D(c,\delta)$. По този начин, от (15.4) следва, че

$$\varphi(b) < [\varphi(b) - \varepsilon]\left(\frac{\pi\delta^2}{\pi\rho^2}\right) + \frac{1}{\pi\rho^2} \int\limits_{D(b,\rho)\setminus D(c,\delta)} \varphi(\zeta) d\text{vol} <$$

$$[\varphi(b) - \varepsilon]\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2 + \varphi(b)\left(\frac{\pi\rho^2 - \pi\delta^2}{\pi\rho^2}\right) = \varphi(b) - \varepsilon\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2,$$

което е противоречие, доказващо тъждественото анулиране на φ в $\overline{D(a,r)}$, Q.E.D.

ТЕОРЕМА 32. (Теорема на Харнак за намаляваща редица от хармонични функции) *Нека $u_k : D \to \mathbb{R}$ е намаляваща редица от хармонични функции в област $D \subseteq \mathbb{C}$. 9з Тогава поточковата граница $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ е или хармонична в D функция, или тъждествено равна на $-\infty$.*

Доказателство: Нека $u : D \to \mathbb{R}$ приема само крайни стойности. Съгласно Теорема 31, хармоничните функции u_k изпълняват равенствата

$$u_k(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D(a,r)} u_k(z) d\mathrm{vol}$$

за $\forall a \in D$ и $\forall 0 < r < R(a) = \rho(a, \partial D)$. По теоремата на Лебег за монотонната сходимост, оттук следва

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D(a,r)} u(z) d\mathrm{vol}$$

при граничен преход $k \to \infty$ с произволни фиксирани a и r. Още повече, функцията u е локално интегруема, така че по Теорема 31 получаваме хармоничността на $u : D \to \mathbb{R}$.
Ако $u(a) = -\infty$ в някоя точка $a \in D$, то множеството

$$E = \{z \in D \,|\, u(z) = -\infty\}$$

е непразно. Ще докажем, че E е отворено и затворено в областта D, за да стигнем до извода, че $E = D$. Наистина, за $\forall b \in E$ нека $\rho = \frac{1}{2}\rho(b, \partial D)$. От

$$u_k(b) = \left[\pi \left(\frac{\rho}{2}\right)^2\right]^{-1} \int\limits_{D\left(b, \frac{\rho}{2}\right)} u_k(\zeta) d\mathrm{vol}$$

при граничен преход $k \to \infty$ получаваме

$$-\infty = u(b) = \left[\pi \left(\frac{\rho}{2}\right)^2\right]^{-1} \int\limits_{D\left(b, \frac{\rho}{2}\right)} u(\zeta) d\mathrm{vol}.$$

Но за $\forall z \in D\left(b, \frac{\rho}{2}\right)$ е в сила $D\left(b, \frac{\rho}{2}\right) \subset D(z, \rho)$, съгласно неравенството на триъгълника $|y - z| \leq |y - b| + |b - z|$. Следователно

$$u(z) = \frac{1}{\pi \rho^2} \int\limits_{D(z,\rho)} u(\zeta) d\mathrm{vol} = -\infty.$$

С други думи, $D\left(b, \frac{\rho}{2}\right) \subset E$ и E е отворено. За да установим, че E е затворено в D да изберем редица $\{c_m\}_{m=1}^{\infty} \subset E$ с граница $c = \lim\limits_{m\to\infty} c_m \in D$. Ако $\rho = \rho(c, \partial D)$ и $0 < r < \rho$, то съществува $c_m \in D(c, r)$ и достатъчно малко $\delta > 0$, така че $D(c_m, \delta) \subset D(c, r)$. Съгласно хармоничността на u_k имаме

$$u_k(c) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D(c,r)} u_k(\zeta) d\mathrm{vol}.$$

Чрез граничен преход $k \to \infty$ оттук следва

$$u(c) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D(c,r)} u(\zeta) d\mathrm{vol} = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D(c_m,\delta)} u(\zeta) d\mathrm{vol} + \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D(c,r) \setminus D(c_m,\delta)} u(\zeta) d\zeta.$$

Вземайки предвид, че

$$-\infty = u(c_m) = \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{D(c_m,\delta)} u(\zeta) d\text{vol},$$

получаваме, че

$$u(c) = -\infty + \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D(c,r)\setminus D(c_m,\delta)} u(\zeta) d\zeta = -\infty,$$

доколкото

$$\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{D(c,r)\setminus D(c_m,\delta)} u(\zeta) d\zeta < \infty,$$

Q.E.D.
Сега сме в състояние да определим оптималната хармонична мажоранта на субхармонична функция $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ в област $D \subseteq \mathbb{C}$. За произволна точка $a \in D$ с $u(a) \neq -\infty$, нека $\rho = \rho(a, \partial D)$ е разстоянието до границата на D. Тогава върху всяка окръжност $\partial D(a,r)$ с радиус $0 < r < \rho$, ограничението

$$u : \partial D(a,r) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

е полунепрекъсната отгоре, а оттам и ограничена отгоре функция. Съгласно Лема 5.2 съществува редица от непрекъснати функции $u_k : D(a,r) \to \mathbb{R}$, която е монотонно намаляваща и клони поточково към u. По Следствие 4.11, функциите

$$h_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(z,\theta) u_k(a + re^{i\theta}) d\theta$$

са хармонични за $\forall z \in D(a,r)$ при $0 < r < \rho = \rho(a, \partial D)$. В Лема 4.10 установихме, че h_k имат непрекъснати продължения $h_k : \overline{D(a,\rho)} \to \mathbb{R}$ с $h_k(\zeta) = u_k(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial D(a,\rho)$. По Твърдение 4.8 хармоничните функции $h_{k+1} - h_k$ изпълняват принципа за максимума. По-точно, за $\forall \zeta \in D(a,r)$ е изпълнено

$$h_{k+1}(\zeta) - h_k(\zeta) = u_{k+1}(\zeta) - u_k(\zeta) \leq 0.$$

Следователно

$$h_{k+1}(z) - h_k(z) \leq \sup_{\zeta \in \partial D(a,\rho)} [h_{k+1}(\zeta) - h_k(\zeta)] \leq 0$$

за $\forall z \in D(a,r)$ или редицата $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ е поточково намаляваща в $D(a,r)$. По Теорема 32 на Харнак, границата $h = \lim\limits_{k\to\infty} h_k$ е хармонична функция или тъждествено равна на $-\infty$. Ако $h|_{D(a,r)} \equiv= -\infty$, то $h|_{\partial D(a,r)} \equiv -\infty$ и $u|_{\partial D(a,r)} \equiv -\infty$. По критерия за субхармоничност, оттук следва $u(a) = -\infty$, противно на предположението. Следователно $h : D(a,r) \to \mathbb{R}$ е хармонична. По определението за субхармоничност, $u(\zeta) = f(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial D(a,r)$ води до $u(z) \leq h(z)$ за $\forall z \in D(a,r)$. Казваме, че h е оптимална хармонична мажоранта на u в $D(a,r)$. Оптималността е в смисъл на минималност на стойностите на h върху $\partial D(a,r)$.

Твърдение 15.10. *Нека φ е плурисубхармонична функция в околност U на точка $a \in \mathbb{C}^n$, а*

$$S(r) = \frac{1}{\text{vol}\partial B(a,r)} \int\limits_{\partial B(a,r)} \varphi(z) d\sigma_r$$

е средната стойност на φ върху сферата $\partial B(a,r)$ при $B(a,r) \subset U$. Тогава $S(r)$ е растяща функция на r.

Доказателство: Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $a = 0^n$. Както се вижда от (15.2), достатъчно е да докажем, че за всяко фиксирано $z \in \mathbb{P}^{n-1}$, средната стойност

$$s(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(zre^{it})dt$$

върху окръжността $L_w \cap \partial B(0^n, r) \simeq \partial D(0, r)$ е растяща функция на r.
Нека $0 < r_1 < r_2$, а $h : D(0, r_2) \to \mathbb{R}$ е оптималната хармонична мажоранта на φ в кръга $D(0, r_2)$.

$$s(r_1) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(zr_1e^{it})dt,$$

защото

$$h(zr_1e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(zr_1e^{i\theta} + \rho e^{it})dt \geq u(zr_1e^{i\theta})$$

по Критерия за субхармоничност (Твърдение 5.5). По-нататък,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(zr_1e^{it})dt = h(0^n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(zr_2e^{it})dt,$$

съгласно Следствие 6.8. Накрая, от $h(zr_2e^{it}) = u(zr_2e^{it})$ за $\forall t \in [0, 2\pi]$ получаваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(zr_2e^{it})dt = s(r_2)$$

и извеждаме, че $s(r_1) \leq s(r_2)$, Q.E.D.
Следващата теорема апроксимира произволна плурисубхармонична функция с безкрайно диференцируеми плурихармонични функции.

Теорема 33. *За произволна плурисубхармонична функция $\varphi : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ в област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ съществува растяща редица от отворени подмножества*

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m \subseteq G_{m+1} \subseteq \ldots,$$

изчерпващи D (т.е. $\cup_{m=1}^{\infty} G_m = D$) и намаляваща редица $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ от безкрайно гладки плурихармонични функции $\varphi_m : G_m \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, която е поточково сходяща към φ, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(z) = \varphi(z)$ за $\forall z \in D$.

Доказателство: Ако $\varphi \equiv -\infty$, то можем да изберем $\varphi_m(z) \equiv -m$ за $\forall m \in \mathbb{N}$. В общия случай строим φ_m чрез усредняване. По-точно, разглеждаме функцията

$$K(z) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|z|^2}} & \text{за } z \in B(0^n, 1), \\ 0 & \text{за } z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{B(0^n, 1)}, \end{cases}$$

където константата $c \in \mathbb{R}^{>0}$ е определена по такъв начин, че

$$\int_{\mathbb{C}^n} K(z) = \int_{B(0^n,1)} K(z) = 1.$$

Използваме $K(Z)$ като осредняващо ядро, полагайки

$$\varphi_m(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi\left(z + \frac{w}{m}\right) K(w) d\mathrm{vol}(w). \tag{15.5}$$

Ако $\rho(z, \partial D) = \inf_{\zeta \in \partial D} ||z - \zeta||$ е евклидовото разстояние от $z \in D$ до границата ∂D, то функциите $\varphi_m(z)$ са определени в отворените множества

$$G_m = \left\{ z \in D \,\middle|\, \rho(z, \partial D) > \frac{1}{m} \right\},$$

които се наричат свивания на D с коефициент $\frac{1}{m}$. Ясно е, че $G_m \subseteq G_{m+1}$ и $\cup_{m=1}^{\infty} G_m = D$. След смяна на променливата $z + \frac{w}{m} \mapsto w$ в интеграла (15.5) получаваме

$$\varphi_m(z) = m^{2n} \int\limits_{\mathbb{C}^n} \varphi(w) K(m(w-z)) d\mathrm{vol}(w).$$

Подинтегралната функция $K(m(w-z))$ е безкрайно диференцируема относно z, така че $\varphi_m \in C^\infty(G_m)$ за $\forall m \in \mathbb{N}$. С помощта на Критерия за плурисубхармоничност (Следствие 15.8) проверяваме, че така построените функции $\varphi_m : G_m \to \mathbb{R}$ са плурисубхармонични. По-точно, за $\forall z \in G_m$, $\forall u \in \mathbb{C}^n$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ и произволно достатъчно малко $r > 0$ е в сила

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_m(z + re^{i\theta} u) d\theta = \int\limits_{\mathbb{C}^n} K(w) \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi\left(z + \frac{w}{m} + re^{i\theta} u \right) d\theta \right] d\mathrm{vol}(w) \geq$$

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} K(w) \varphi\left(z + \frac{w}{m} \right) d\mathrm{vol}(w) = \varphi_m(z).$$

Тук използвахме плурисубхармоничността на φ и неотрицателността на ядрото $K(z)$.

Нека $d\sigma_r$ е елемент на лицето на сферата

$$S_r = \partial B(0^n, r) = \{ w \in \mathbb{C}^n \,|\, ||w|| = r \},$$

така че $d\mathrm{vol}(w) = d\sigma_r dr$. Обемът на кълбото $B(0^n, r) \subset \mathbb{C}^n$ с радиус r е

$$\mathrm{vol} B(0^n, r) = \frac{(\pi r^2)^n}{n!}.$$

За пресмятане на лицето на сферата $\partial B(0^n, r)$ да тобележим, че

$$\mathrm{vol} B(0^n, r + \varepsilon) - \mathrm{vol} B(0^n, r) \approx \varepsilon \mathrm{vol} \partial B(0^n, r)$$

за достатъчно малко $\varepsilon > 0$. В граничен преход,

$$\frac{d}{dr} \mathrm{vol} B(0^n, r) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{vol} B(0^{\cdot} r + \varepsilon) - \mathrm{vol} B(0^n, r)}{\varepsilon} = \mathrm{vol} \partial B(0^n, r).$$

По-точно,

$$\mathrm{vol} \partial B(0^n, r) = \frac{2\pi^n}{n!} r^{2n-1}.$$

Тогава (15.5) придобива вида

$$\varphi_m(z) = \int\limits_0^1 K(r) \left[\int\limits_{S_r} \varphi\left(z + \frac{w}{m} \right) d\sigma_r \right] dr.$$

След смяната $z + \frac{w}{m} \mapsto w$ получаваме

$$\varphi_m(z) = \int\limits_0^1 K(r) \left[m^{2n-1} \int\limits_{\partial B\left(z, \frac{r}{m}\right)} \varphi(w) d\sigma_{\frac{r}{m}} \right] dr = \int\limits_0^1 K(r) m^{2n-1} \mathrm{vol} \partial B\left(z, \frac{r}{m} \right) M\left(\frac{r}{m} \right) dr,$$

където $\mathrm{vol}\partial B\left(z,\frac{r}{m}\right)=\frac{1}{m^{2n-1}}\left(\frac{2\pi^n}{n!}r^{2n-1}\right)$ е лицето на сферата $\partial B\left(z,\frac{r}{m}\right)$, а

$$M\left(\frac{r}{m}\right)=\frac{1}{\mathrm{vol}\partial B\left(z,\frac{r}{m}\right)}\int\limits_{\partial B\left(z,\frac{r}{m}\right)}\varphi(w)d\sigma_{\frac{r}{m}}$$

е средната стойност на φ върху сферата $\partial B\left(z,\frac{r}{m}\right)$. Вземайки предвид $\mathrm{vol}\partial B\left(z,\frac{r}{m}\right)=\frac{1}{m^{2n-1}}\mathrm{vol}\partial B(0^n,r)$, стигаме до извода, че

$$\varphi_m(z)=\int\limits_0^1 K(r)\mathrm{vol}\partial B(0^n,r)M\left(\frac{r}{m}\right)dr. \qquad (15.6)$$

Съгласно Твърдение 15.10, редицата $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ е поточково намаляваща.
Остава да докажем, че $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ клони поточково към φ. За целта да отбележим, че $M\left(\frac{r}{m}\right)\geq\varphi(z)$ съгласно Критерия за субхармоничност (Твърдение 5.5). Освен това,

$$\int\limits_0^1 K(r)\mathrm{vol}\partial B(0^n,r)dr=\int Kd\mathrm{vol}=1,$$

така че от (15.6) следва $\varphi_m(z)\geq\varphi(z)$ във всяка точка $z\in D$ и за достатъчно големи $m\geq m_o$. Доколкото φ е полу-непрекъсната отгоре, за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, така че $D(z,\delta)\subset\varphi^{-1}(-\infty,\varphi(z)+\varepsilon)$. Следователно $M\left(\frac{r}{m}\right)\leq\varphi(z)+\varepsilon$ за достатъчно голямо $m\geq m_1$. Тогава (15.6) с $m\geq m_1$ дава $\varphi_m(z)<\varphi(z)+\varepsilon$. В резултат, $0\leq\varphi_m(z)-\varphi(z)<\varepsilon$ или $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(z)=\varphi(z)$, Q.E.D.

Следствие 15.11. *Нека $\varphi:D\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ е плурисубхармонична функция в област $D\subseteq\mathbb{C}^n$, а $\psi:\varphi(D)\to\mathbb{R}$ е изпъкнала растяща функция от клас C^2. Тогава $\psi\circ\varphi:D\to\mathbb{R}$ е плурисубхармонична функция в D.*

Доказателство: Ако $\varphi\in C^2(D)$, то съгласно Лема 14.4 (ii) е в сила

$$H_z(\psi\circ\varphi,w)=\psi'(\varphi)H_z(\varphi,w)+\psi''(\varphi)\partial\varphi(w)|^2 \quad \text{за } \forall w\in\mathbb{C}^n.$$

Растящата функция ψ има $\psi'\geq 0$. Изпъкналостта на ψ гарантира, че $\psi''\geq 0$. Следователно $H_z(\psi\circ\varphi,w)\geq 0$ и $\psi\circ\varphi:D\to\mathbb{R}$ е плурисубхармонична функция. В общия случай прилагаме Теорема 33 и апроксимираме φ с намаляваща редица $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ от гладки плурисубхармонични функции в D. Вече видяхме, че $\psi\circ\varphi_m:D\to\mathbb{R}$ са плурисубхармонични функции. Доколкото редицата $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ е намаляваща, а ψ е растяща непрекъсната функция, редицата $\{\psi\circ\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ намалява и клони към $\psi\circ\varphi$. Оттук следва, че $\psi\circ\varphi:D\to\mathbb{R}$ е плурисубхармонична, Q.E.D.