Глава 16

Псевдоизпъкнали области

Казваме, че $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ изчерпва областта $D \subseteq \mathbb{C}^n$, ако за всяко $c \in \mathbb{R}$ подмножеството

$$D_c = \{z \in D \,|\, u(z) < c\}$$

е компактно вложено в D, т.е., $\overline{D_C} \subset D$. Функцията $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ изчерпва D тогава и само тогава, когато за всяка редица $\{z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset D$, клоняща към $\lim\limits_{m\to\infty} z^{(m)} = \zeta \in \partial D$, редицата от стойности $\lim\limits_{m\to\infty} u(z^{(m)}) = \infty$ е неограничена.

Определение 16.1. *Областта $D \subset \mathbb{C}^n$ е (глобално) псевдоизпъкнала, ако има плурисубхармонична изчерпваща функция $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.*

Да отбележим, че разстоянието $\rho(\;, \partial D) : D \to \mathbb{R}^{>0}$ до границата ∂D на област $D \subsetneq \mathbb{C}^n$ е непрекъсната функция. Доколкото ∂D има поне една крайна точка, $\rho(z, \partial D) = \inf\limits_{\zeta \in \partial D} ||z - \zeta||$ взема крайни неотрицателни стойности. Ако $\{\zeta_z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \partial D$ е такава редица, че $\lim\limits_{m\to\infty} ||z - \zeta_z^{(m)}|| = \rho(z, \partial D)$, то нормите $0 \leq ||\zeta_z^{(m)}|| \leq ||\zeta_z^{(m)} - z|| + ||z||$ са ограничени и съществува сходяща подредица на $\{\zeta_z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. В границата $\zeta_z \in \partial D$ на тази редица се достига $\rho(z, \partial D) = \rho(z, \zeta_z)$. За произволни $z, w \in D$ неравенството на триъгълника дава $\rho(z, \zeta_z) + \rho(z, w) \geq \rho(w, \zeta_z)$. По определение, $\rho(w, \zeta_z) \geq \inf\limits_{\zeta \in \partial D} \rho(w, \zeta) = \rho(w, \zeta_w)$, отъкдето$\rho(z, w) \geq \rho(w, \zeta_w) - \rho(z, \zeta_z)$. Разменяйки z с w получаваме $\rho(z, w) \geq \rho(z, \zeta_z) - \rho(w, \zeta_w)$. С други думи, $|\rho(w, \zeta_w) - \rho(z, \zeta_z)| \leq \rho(z, w)$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \varepsilon > 0$, така че всички $z, w \in D$ на разстояние $\rho(z, w) < \varepsilon$ изпълняват неравенството $|\rho(w, \partial D) - \rho(z, \partial D)| < \varepsilon$.
Всяка област $D \subseteq \mathbb{C}$ е псевдоизпъкнала. Наистина, за $\forall \zeta \in \partial D$ функцията $f_\zeta : D \to \mathbb{C}$, $f_\zeta(z) = \frac{1}{z-\zeta}$ е холоморфна. Съгласно Следствие 6.9, функцията $\varphi_\zeta : D \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $\varphi_\zeta(z) = \frac{1}{|z-\zeta|}$ е субхармонична. Твърдим, че

$$u_o(z) = \sup_{\zeta \in \partial D} \frac{1}{|z - \zeta|} = \frac{1}{\rho(z, \partial d)}$$

е субхармонична в D. Преди всичко, $u_o(z)$ е непрекъсната, защото $\rho(z, \partial D)$ е непрекъсната в D и $\rho(z, \partial D) > 0$ за $\forall z \in D$. Това дава възможност да приложим Следствие 6.4 и да получим, че $u_o : D \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ е субхармонична функция. В случая на $\infty \in \partial D$ прибавяме $|z|$ към $u_o(z)$ и полагаме $u(z) = u_o(z) + |z|$. За ограничена област $D \subset \mathbb{C}$, функцията $u(z) = u_o(z)$. За произволна редица $\{z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset D$, слоняща към гранична точка $\lim\limits_{m\to\infty} z^{(m)} = \zeta \in \partial D$, редицата $u(z^{(m)}) = \frac{1}{\rho(z^{(m)}, \partial D)} + |z^{(m)}|$ или $u(z^{(m)}) = \frac{1}{\rho(z^{(m)}, \partial D)}$ клони към $+\infty$. Следователно $u : D \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ е изчерпваща субхармонична функция и областта $D \subset \mathbb{C}$ е псевдоизпъкнала.
За разлика от случая $n = 1$, съществуват области $D \subset \mathbb{C}^n$ с $n \geq 2$, които не са псевдоизпъкнали. Например, за произволни реални $0 < r < R$ и естествено $n \geq 2$ ивицата

$$B_{r,R} = B(0^n, R) \setminus \overline{B(0^n, r)}$$

не е псевдоизпъкнала област. При допускане на противното съществува плурисубхармонична функция $u : B_{r,R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, която е неограничена във всяка гранична точка $\zeta \in \partial B_{r,R} = \partial B(0^n, R) - \partial B(0^n, r)$. От друга страна, $u : B_{r,R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е полу-непрекъсната отгоре, а оттам и ограничена отгоре върху всеки компакт $K \subset B_{r,R}$ (виж Лема-Определение 5.1). В частност, за $\forall r < \rho < R$ и достатъчно малко $\varepsilon > 0$, допълнението $K_{\rho,\varepsilon} = \overline{B(0^n, \rho)} \setminus B(0^n, r+\varepsilon)$ е компактно подмножество на $B_{r,R}$, така че u е ограничена върху $K_{\rho,\varepsilon}$ и, по-специално, u е ограничена върху сферата $\partial B(0^n, r+\varepsilon)$. Пускайки $\varepsilon \to 0$ получаваме ограничеността на u върху $\partial B(0^n, r)$, което е противоречие. Следователно областта $B_{r,R}$ не е псевдоизпъкнала.

За да докажем, че псевдоизпъкналостта на област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е еквивалентна на нейната локална псевдоизпъкналост във всяка гранична точка $a \in \partial D$, ще характеризираме локалната псевдоизпъкналост в $a \in \partial D$ с несъществуване на редица от компактно вложени холоморфни дискове $D_t \subseteq \overline{D_t} \subset D$, $t \in [0,1)$ с $\lim\limits_{t\to 1} D_t = D_1 \ni a$ и $\lim\limits_{t\to 1} \partial D_t = \partial D_1 \subset D$. Това свойство е коректно определено без да се предполага наличие на локална определяща функция φ на D около $a \in \partial D$ от клас C^2.

Определение 16.2. *Областта $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е псевдоизпъкнала в $a \in \partial D$ относно компактно вложени дискове, ако не съществува фамилия $\{D_t\}_{t\in[0,1]}$ от холоморфни дискове D_t, така че $D_t \subseteq \overline{D_t} \subset D$ са компактно вложени за $\forall t \in [0,1)$, $\lim\limits_{t\to 1} D_t = D_1$, $\lim\limits_{t\to 1} \partial D_t = \partial D_1 \subset D$ и $a \in D_1$.*

Лема 16.3. *Нека $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е област, $a \in \partial D$, V е околност на a върху $\mathbb{C}^n$ и $\varphi : V \to \mathbb{R}$ е $C^2(V)$-определяща функция на $D \cap V = \{z \in V \,|\, \varphi(z) < 0\}$ с неанулиращ се холоморфен градиент $\partial\varphi|_V \neq 0$ върху V. В такъв случай D е локално псевдоизпъкнала в $a \in \partial D$ тогава и само тогава, когато D е псевдоизпъкнала в $a \in \partial D$ относно компактно вложени холоморфни дискове.*

Доказателство: Ако D е псевдозипъкнала в $a \in \partial D$ относно компактно вложени холоморфни дискове и допуснем, че D не е псевдоизпъкнала в $a \in \partial D$, то повтаряйки разсъжденията от Теорема 29(ii) получаваме фамилия $\{D_t\}_{t\in(0,1]}$ от компактно вложени в D холоморфни дискове с $\lim\limits_{t\to 0} D_t = D_0$, окръжност $\partial D_0 = \lim\limits_{t\to 0} \partial D_t$ в D и $a \in D_0$. Противоречието доказва псевдоизпъкналостта на D в $a \in \partial D$ при наличие на псевдоизпъкналост в $a \in \partial D$ относно вложени холоморфни дискове.

Обратно, нека D е локално псевдоизпъкнала в $a \in \partial D$ и допуснем, че D не е псевдоизпъкнала в $a \in \partial D$ относно вложени холоморфни дискове. Тогава съществува фамилия $\{D_t\}_{t\in[0,1]}$ от компактно вложени в D холоморфни дискове D_t, $t \in [0,1)$ с $\lim\limits_{t\to 1} D_t = D_1$, $\partial D_1 = \lim\limits_{t\to 1} \partial D_t$ и $a \in D_1$. От $\overline{D_t} \subset D$ и $\overline{D_1} = \lim\limits_{t\to 1} \overline{D_t}$ следва, че $\overline{D_1} \subset \overline{D}$. Ако $\overline{D_1}$ се съдържа в комплексното допирателно пространство $T_a^{\mathbb{C}}(\partial D) = \{w \in \mathbb{C}^n \,|\, \partial\varphi(w)(a) = 0\}$ към ∂D в a, то псевдоизпъкналостта на D в a изисква $\varphi|_{\overline{D_1}} \geq 0$. Но $\overline{D_1} \subset \overline{D}$ предполага противоположното неравенство $\varphi|_{\overline{D_1}} \leq 0$, откъдето $\varphi|_{\overline{D_1}} \equiv 0$. С други думи, $\overline{D_1} \subset \partial D$, което противоречи на $\partial D_1 \subset D$. Следователно $\overline{D_1}$ не се съдържа изцяло в $T_a(\partial D)$. Холоморфната хиперравнина $T_a^{\mathbb{C}}(\partial D) \subset \mathbb{C}^n$ пресича $\overline{D_1}$ в собствено аанлитично подмножество. Вземайки предвид компактността на $\overline{D_1}$, стигаме до извода, че $\overline{D_1} \cap T_a(\partial D)$ се състои от краен брой изолирани точки. В резултат, съществува околност $U \subset \overline{D_1}$ на a с $U \cap T_a^{\mathbb{C}}(\partial D) = \{a\}$ и

$$\varphi(z) = 2ReL_a(\varphi, z-a) + o(||z-a||) \leq 0 \quad \text{за } \forall z \in U \setminus \{a\}.$$

Оттук $ReL_a(\varphi, z-a) \leq 0$ за $\forall z \in U \setminus \{a\}$ или $U \setminus \{a\}$ се намира под реалната допирателна равнина $T_a^{\mathbb{R}}(\partial D)$ към ∂D в a. Но $a \in T_a^{\mathbb{R}}(\partial D)$, така че околността

U би трябвало да пресича и двете полупространства относно $T_a^{\mathbb{R}}(\partial D)$. Противоречието установява, че ако D е локално псевдоизпъкнала в $a \in \partial D$, то D е псевдоизпъкнала в $a \in \partial D$ относно компактно вложени холоморфни дискове, Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.4. *Радиусът на Хартогс $R(a)$ на област $D \subset \mathbb{C}^n$ в точка $a \in D$ е радиусът на максималния кръг с център a, който лежи в сечението на D с правата $L_n(a) = \{(a', \zeta) \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\}$ през a, успоредна на оста Oz_n. С други думи, радиусът на Хартогс на D в a е разстоянието*

$$R(a) = \rho(a, \partial D \cap L_n(a))$$

от a до дъгата $\partial D \cap L_n(a)$, в която правата $L_n(a)$ през a, успоредна на $Oz_n \longrightarrow$ пресича границата ∂D на областта D.

ЛЕМА 16.5. *Радиусът на Хартогс $R : D \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ на област $D \subset \mathbb{C}^n$ е полу-непрекъсната отдолу функция, а $-\log(R) : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е полу-непрекъсната отгоре функция.*

Доказателство: По определение, функцията R е полу-непрекъсната отдолу, ако $R^{-1}(\beta, \infty)$ е отворено подмножество на D за $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Това е еквивалентно на $(-R)^{-1}(-\infty, -\beta) \subset D$ за $\forall -\beta \in \mathbb{R}$ или на полу-непрекъснатостта на $-R$ отгоре. Както доказахме в Лема-Определение 5.1, $-R : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е полу-непрекъсната отгоре точно когато

$$\limsup_{z \to a, z \neq a} [-R(z)] \leq -R(a) \quad \text{за } \forall a \in D.$$

Непосредствено се вижда, че ако редицата $\{z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset D \setminus \{a\}$ клони към $\lim\limits_{m\to\infty} z^{(m)} = a$, то $\sup\limits_{m \geq k} [-R(z^{(m)})] = -\inf\limits_{m \geq k} R(z^{(m)})$ и

$$\limsup_{m\to\infty} [-R(z^{(m)})] = \inf_{k \geq 1} \sup_{m \geq k} [-R(z^{(m)})] = \inf_{k \geq 1} [-\inf_{m \geq k} R(z^{(m)})] =$$

$$-\sup_{k \geq 1} \inf_{m \geq k} R(z^{(m)}) = -\liminf_{m\to\infty} R(z^{(m)}).$$

Затова R е полунепрекъсната отдолу тогава и само тогава, когато

$$\liminf_{m\to\infty} R(z^{(m)}) \geq R(a) \quad \text{за } \forall a \in D.$$

Да отбележим, че съществуват $\zeta^{(m)} \in \partial D \cap L_n(z^{(m)})$ и $\zeta^{(a)} \in \partial D \cap L_n(a)$, така че $R(z^{(m)}) = \rho(z^{(m)}, \zeta^{(m)}) = |z_n^{(m)} - \zeta_n^{(m)}|$ за $\forall m \in \mathbb{N}$ и $R(a) = \rho(a, \zeta^{(a)}) = |a_n - \zeta^{(a)}|$. Когато $\lim\limits_{m\to\infty} z^{(m)} = a$, правите $L_n(z^{(m)})$ клонят към $L_n(a)$, откъдето $\lim\limits_{m\to\infty} (\partial D \cap L_n(z^{(m)})) = \partial D \cap L_n(a)$. Следователно всяка сходяща подредица на $\{\zeta^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \partial D \cap L_n(z^{(m)})$ клони към точка $\zeta \in \partial D \cap L_n(a)$ и $\rho(a, \zeta) \geq \rho(a, \zeta^{(a)}) = R(a)$. В резултат, $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(a, \zeta^{(m)}) \geq R(a)$. По неравенството на триъгълника,

$$\rho(a, \zeta^{(m)}) \leq \rho(a, z^{(m)}) + \rho(z^{(m)}, \zeta^{(m)}) = \rho(a, z^{(m)}) + R(z^{(m)}).$$

Следователно

$$R(a) \leq \liminf_{m\to\infty} \rho(a, \zeta^{(m)}) \leq \liminf_{m\to\infty} R(z^{(m)}),$$

възоснова на $\liminf\limits_{m\to\infty} \rho(a, z^{(m)}) = \lim\limits_{m\to\infty} \rho(a, z^{(m)}) = \rho(a, \lim\limits_{m\to\infty} z^{(m)}) = \rho(a, a) = 0$ поради непрекъснатостта на ρ. С това установихме, че R е полу-непрекъсната отдолу.

Понеже $\log$ е строго растяща, функцията $\log R$ е също полу-непрекъсната отдолу. Накрая, $-\log R$ е полу-непрекъсната отгоре, Q.E.D.

За произволна област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ с радиус на Хартогс $R : D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и за произволна точка $a \in D$, функцията $-\log R : D \cap L_n(a) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е субхармонична. Наистина, във всяка точка $(a', a_n + \zeta) \in D \cap L_n(a)$ имаме $R(a', a_n + \zeta) = \inf_{(a', a_n+\eta) \in \partial D} |\zeta - \eta|$, откъдето

$$-\log R(a', a_n + \zeta) = \sup_{(a', a_n+\eta)\in\partial D} [-\log|\zeta - \eta|] = \sup_{(a', a_n+\eta)\in\partial D} \log\left|\frac{1}{\zeta - \eta}\right|.$$

За $(a', a_n + \zeta) \in D$ множеството $M_\zeta = \{\eta \in \mathbb{C} \,|\, (a', a_n + \eta) \in \partial D\}$ не съдържа ζ и функцията $\frac{1}{\zeta-\eta}$ е холоморфна в M_ζ. Прилагайки Следствие 6.9 получаваме, че $\log\left|\frac{1}{\zeta-\eta}\right|$ е субхармонична за $\forall \eta \in M_\zeta$. В Лема 16.5 установихме, че $-\log R$ е полу-непрекъсната отгоре в D. В частност, $-\log R|_{D\cap L_n(a)}$ е полу-непрекъсната отгоре, а оттам и субхармонична съгласно Следствие 6.4.

Лема 16.6. *Ако областта $D \subset \mathbb{C}^n$ е псевдоизпъкнала във всяка гранична точка, а $R : D \to \mathbb{R}^{>0}$ е радиусът на Хартогс на D, то*

$$-\log(R(z)) : D \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

е плурисубхармонична функция.

Доказателство: Да допуснем противното и да разгледаме права $L_w(a)$, така че $v(\zeta) := -\log R(a + \zeta w)$ не е субхармонична функция в околност на $\zeta = 0$. По определение това означава съществуване на диск

$$D(0, r) = \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta| = r\}$$

и хармонична функция $h : D(0, r) \to \mathbb{R}$ с непрекъснато продължение $h : \overline{D(0, r)} \to \mathbb{R}$, така че $v(\zeta) \leq h(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial D(0, r)$, но $v(\zeta_1) > h(\zeta_1)$ в някаква вътрешна точка $\zeta_1 \in D(0, r)$. Полунепрекъснатата отдолу функция $h - v : \overline{D(0, r)} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е ограничена отдолу върху компакта $\overline{D(0, r)}$ и достига минимума си в някаква точка $\zeta_o \in \overline{D(0, r)}$. Съгласно Лема-Определение 5.1 това следва от ограничеността отгоре на $v - h : \overline{D(0, r)} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ върху компакта $\overline{D(0, r)}$ и достигането на максимума на $v - h$ върху $\overline{D(0, r)}$ в точка $\zeta_o \in \overline{D(0, r)}$. От $h(\zeta) - v(\zeta) \geq 0 > h(\zeta_1) - v(\zeta_1)$ за $\forall \zeta \in \partial D(0, r)$ става ясно, че $\zeta_o \in D(0, r)$ е вътрешна точка. Нека

$$h(\zeta_o) - v(\zeta_o) = \inf_{\zeta \in \overline{D(0,r)}} [h(\zeta) - v(\zeta)] = -\varepsilon < 0,$$

така че $-h(\zeta_o) - \varepsilon = -v(\zeta_o)$. Разглеждаме функцията

$$g : \overline{D(0, r)} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$g(\zeta) = -h(\zeta) - \varepsilon \quad \text{ за } \forall \zeta \in \overline{D(0, r)}.$$

Ясно е, че:
(i) $g(\zeta)$ е хармонична в $D(0, r)$;
(ii) $g(\zeta)$ е непрекъсната в $\overline{D(0, r)}$;
(iii) $g(\zeta) \leq -v(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \overline{D(0, r)}$;
(iv) $g(\zeta) < -v(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial D(0, r)$;
(v) $g(\zeta_o) = -v(\zeta_o)$.
Съгласно Твърдение 4.5, ако $\xi = Re(\zeta)$, $\eta = Im(\zeta)$ и

$$*dg = -\frac{\partial g}{\partial \eta} d\xi + \frac{\partial g}{\partial \xi} d\eta$$

е спрегнатият диференциал на

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial g}{\partial \eta} d\eta,$$

то съществува хармонична функция

$$g_* : D(0,r) \longrightarrow \mathbb{C}$$

с $dg_* = *dg$, така че

$$G : D(0,r) \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$G(\zeta) = g(\zeta) + ig_*(\zeta) \quad \text{за } \forall \zeta \in D(0,r)$$

е холоморфна функция. Функцията g_* с изброените свойства е определена с точност до адитивна константа. По-точно, ако линейната функция

$$l(\zeta) = a + \zeta w = (l'(\zeta), \lambda(\zeta))$$

има компоненти

$$l'(\zeta) = a' + \zeta w', \quad \lambda(\zeta) = a_n + \zeta w_n,$$

то радиусът на Хартогс

$$R(l(\zeta_o)) = \rho(l(\zeta_o), \partial D \cap L_n(l(\zeta_o))) = \rho(l(\zeta_o), b)$$

се достига в точка $b = (l'(\zeta_o), b_n) \in \partial D \cap L_n(l(\zeta_o))$ и $R(l(\zeta_o)) = |\lambda(\zeta_o) - b_n|$. Следователно

$$g(\zeta_o) = -v(\zeta_o) = \log R(l(\zeta_o)) = \log |\lambda(\zeta_o) - b_n|.$$

Но за произволно комплексно число $r_o e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ е в сила

$$Re \log(r_o e^{i\theta}) = Re[\log(r_o) + i\theta] = \log(r_o) = \log |r_o e^{i\theta}|,$$

така че можем да представим

$$ReG(\zeta_o) = g(\zeta_o) = Re \log(\lambda(\zeta_o) - b_n).$$

Фиксираме някакъв клон на $\log(\lambda(\zeta) - b_n)$ и избираме адитивната константа на $g_*(\zeta)$ така, че

$$G(\zeta_o) = g(\zeta_o) + ig_*(\zeta_o) = \log(\lambda(\zeta_o) - b_n).$$

Разглеждаме фамилията от холоморфни дискове

$$D_t = \{(l'(\zeta), \lambda(\zeta) - te^{G(\zeta)}) \,|\, \zeta \in \overline{D(0,r)}\}$$

с $t \in [0,1]$. За $\forall z \in D_t$ е в сила

$$|z - \lambda(\zeta)| = te^{g(\zeta)} \leq te^{-v(\zeta)} = tR(l(\zeta)),$$

така че $D_t = \overline{D_t} \subset D$ за $\forall t \in [0,1)$. Съгласно $g(\zeta) < -v(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial D(0,r)$ имаме $\partial D_t \subset D$ за $\forall t \in [0,1]$. Ясно е, че $\lim_{t \to 1} D_t = D_1$ и $b = (l(\zeta_o), b_n) \in D_1$, защото $\zeta_o \in D(0,r)$ и $\lambda(\zeta_o) - e^{G(\zeta_o)} = \lambda(\zeta_o) - [\lambda(\zeta_o) - b_n] = b_n$. Това противоречи на псевдоизпъкналостта на D в $b \in \partial D$ относно вложени холоморфни дискове и доказва плурисубхармоничността на $-\log R(z)$, Q.E.D.

Теорема 34. *Ако C^2-гладка област $D \subsetneqq \mathbb{C}^n$ е локално псевдоизпъкнала във всяка своя гранична точка, то D е глобално псевдоизпъкнала.*

Доказателство: За $D \neq \mathbb{C}^n$ функцията $u(z) = -\log \rho(z, \partial D)$ е непрекъсната в D и клони към $+\infty$, когато z се приближава към границата. Остава да докажем плурисубхармоничността на u.
Нека $L_w(z) = \{z + w\zeta \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\}$ е правата през $z \in D$, успоредна на вектора $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$, а $R_w(z) = \rho(z, \partial D \cap L_w(z))$ е разстоянието от z до $\partial D \cap L_w(z)$. Ясно е, че $\rho(z, \partial D) = \inf_{w \in \partial B(0^n,1)} R_w(z)$ за $\forall z \in D$, където

$$\partial B(0^n, 1) = \{w \in \mathbb{C}^n \,|\, ||w|| = 1\}$$

е единичната сфера в $\mathbb{C}^n$.

Твърдим, че за всеки единичен вектор w функцията $-\log R_w(z)$ е плурисубхармонична в D. По-точно, преместваме началото на координатната система в z и избираме такава унитарна матрица U, че $Uw = e_n$. Тогава по определение

$$R_w(0^n) = \inf_{\zeta w \in \partial D} \rho(0^n, \zeta w) = \inf_{\zeta U^{-1}(e_n) \in \partial D} |\zeta|.$$

Непосредствено се вижда, че $\zeta U^{-1}(e_n) \in \partial D$ е еквивалентно на $\zeta e_n \in U(\partial D)$. От своя страна, $U(\partial D) = \partial U(D)$. По-точно, ако $D = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, \varphi(z) < 0\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, \varphi(z) = 0\}$, то $U(D) = \{x \in \mathbb{C}^n \,|\, \varphi U^{-1}(x) < 0\}$ и съответно $U(\partial D) = \{y \in \mathbb{C}^n \,|\, \varphi U^{-1}(y) = 0\}$, откъдето $\partial U(D) = U(\partial D)$. В резултат,

$$R_w(0^n) = \inf_{\zeta e_n \in \partial U(D)} |\zeta| = R^{U(D)}(0^n)$$

съвпада с радиуса на Хартогс на областта $U(D)$ в $U(0^n) = 0^n$. Съгласно трансформационната формула на формата на Леви под действие на бихоломорфизъм, областта $U(D)$ е пседвоизпъкнала във всяка своя гранична точка. Следователно по Лема 16.6, $-\log R^{U(D)}$ е плурисубхармонична в $U(D)$. Следователно $-\log R_w$ е плурисубхармонична в D. В резултат,

$$u(z) = -\log \rho(z, \partial D) = \sup_{w \in \partial B(0^n, 1)} [-\log R_w(z)]$$

е плурисубхармонична функция в D като непрекъснат супремум на плурисубхармоничните $-\log R_w(z)$, Q.E.D.

ТЕОРЕМА 35. *Произволна C^2-гладка псевдоизпъкнала област $D \subset \mathbb{C}^n$ е псевдоизпъкнала във всяка своя гранична точка.*

Доказателство: Да допуснем противното и да изберем точка $a \in \partial D$, в която D не е псевдоизпъкнала. Тогава D не е псевдоизпъкнала в $a \in \partial D$ относно вложени дискове и съществува редица от холоморфни дискове D_m, клоняща към множество $D_o = \lim_{m \to \infty} D_m$, така че $\lim_{m \to \infty} \partial D_m = \partial D_o$, $a \in D_o$ и $\overline{D_m}, \partial D_o \subset D$. Съгласно псевдоизпъкналостта на D съществува плурисубхармонична функция $u(z) : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, клоняща към $+\infty$, когато z приближава границата на D. По принципа за максимума на плурисубхармоничните функции,

$$\sup_{D_m} u \leq \sup_{\partial D_m} u.$$

Съгласно $\partial D_o \subset D$ съществува достатъчно малко $\varepsilon > 0$, така че ε-раздуването $(\partial D_o)^\varepsilon \subset \overline{(\partial D_o)^\varepsilon} \subset D$. По определението за сходимост $\lim_{m \to \infty} \partial D_m = \partial D_o$ съществува $m_o \in \mathbb{N}$, така че $\partial D_m \subset (\partial D_o)^\varepsilon$ за $\forall m \geq m_o$. Подмножеството $(\partial D_o)^\varepsilon \subset D$ е компактно вложено, така че съществува константа C със $\sup_{(\partial D_o)^\varepsilon} u \leq C$. В резултат,

$$\sup_{D_m} u \leq C \quad \text{за } \forall m \geq m_o. \tag{16.1}$$

Но, от друга страна, съществува редица от точки $z^{(m)} \in D_m$, клоняща към $a \in \partial D$ и такава, че $\lim_{m \to \infty} u(z^{(m)}) = \infty$. Това противоречи на (16.1) и доказва локалната псевдоизпъкналост на D във всяка гранична точка, Q.E.D.

Теореми 34 и 35 установяват еквивалентността на понятията глобална псевдоизпъкналост на област D и псевдоизпъкналост на D във всяка гранична точка.

СЛЕДСТВИЕ 16.7. *Областта $D \subset \mathbb{C}^n$ е псевдоизпъкнала тогава и само тогава, когато функцията $-\log \rho(z, \partial D)$ е плурисубхармонична в D.*

Доказателство: Функцията $-\log \rho(z, \partial D)$ клони към $+\infty$ при приближаване на произволна точка $a \in \partial D$. Затова плурисубхармоничността на $-\log \rho(z, \partial D)$ гарантира глобалната псевдоизпъкналост на D. Обратно, ако D е псевдоизпъкнала област, то съгласно Теорема 35 областта D е псевдоизпъкнала във всяка своя гранична точка. Тогава по доказателството на Теорема 34, функцията $-\log \rho(z, \partial D)$ е плурисубхармонична в D, Q.E.D.
За области D с C^2-граница, глобалната псевдоизпъкналост може да се опише чрез определящата функция.

Определение 16.8. *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е област, а U е околност на границата ∂D на D. Функцията $\varphi : U \to \mathbb{R}$ се нарича глобална определяща функция на D, ако $\varphi \in C^2(U)$,*

$$D \cap U = \{z \in U \,|\, \varphi(z) < 0\} \qquad \text{и}$$

градиентът $\nabla_z \varphi \neq 0$ във всички точки $z \in \partial D$.

Определение 16.9. *Областта $D \subset \mathbb{C}^n$ с C^2-граница е (глобално) псевдоизпъкнала спрямо определящата си, ако D има глобална определяща функция φ с форма на Леви $H_z(\varphi, w) \geq 0$ във всяка точка $z \in \partial D$ и всеки комплексен допирателен вектор $w \in T_z^{\mathbb{C}}(\partial D)$.*

Определение 16.10. *Ограничената област $D \subset \mathbb{C}^n$ с C^2-граница се нарича (голбално) строго псевдоизпъкнала спрямо определящата си, ако D има глобална определяща функция φ с форма на Леви $H_z(\varphi, w) > 0$ във всяка точка $z \in \partial D$ и всеки ненулев комплексен допирателен вектор $0^n \neq w \in T_z^{\mathbb{C}}(\partial D)$.*

Както във Въпрос 14, може да се докаже, че псевдоизпъкналостта чрез определяща функция φ и строгата псевдоизпъкналост чрез определяща функция φ не зависят от избора на φ със споменатите свойства. С помощта на Теоремата за неявната функция забелязваме, че глобалната определяща функция може да се избере във вида

$$\varphi(z) = \begin{cases} -\rho(z, \partial D) & \text{за } z \in U \cap D, \\ \rho(z, \partial D) & \text{за } z \in U \setminus \overline{D}. \end{cases} \tag{16.2}$$

Ясно е също, че областта D е (строго) псевдоизпъкнала чрез определящата си тогава и само тогава, когато D е (строго) псевдоизпъкнала във всяка своя гранична точка.

Теорема 36. *Областта $D \subset \mathbb{C}^n$ е строго псевдоизпъкнала спрямо определящата си тогава и само тогава, когато D има строго плурисубхармонична определяща функция.*

Доказателство: Достатъчността на условието е ясна. Необходимостта се установява по аналогия с доказателството на Теорема 26. По-точно, нека φ е глобална определяща функция на D от вида (16.2). За достатъчно тясна ивица U, функцията $\psi = \varphi + k\varphi^2$ е също глобална определяща на D за $\forall k \geq 0$. Тогава във всяка гарнична точка $z \in \partial D$ е изпълнено

$$H_z(\psi, w) = H_z(\varphi, w) + 2k|\partial\varphi(w)|^2. \tag{16.3}$$

По определение, строгата псевдоизпъкналост на D спрямо определящата изисква ограниченост на D, а оттам и компактност на границата ∂D. В резултат, произведението

$$E = \partial D \times \partial B(0^n, 1) = \{(z, w) \,|\, z \in \partial D,\, w \in \mathbb{C}^n,\, ||w|| = 1\}$$

е компактно. Достатъчно е да установим положителната дефинитност на формата на Леви $H_z(\psi, w)$ върху E. Нека

$$E_o = \{(z, w) \in E \,|\, H_z(\varphi, w) \leq 0\}.$$

Ако $E_o = \emptyset$ е празно, избираме $k = 0$. Ако $E_o \neq \emptyset$ не е празно, то съгласно компактността на E_o съществува константа $M \geq 0$, така че $H_z(\varphi, w) \geq -M$ за $\forall (z,w) \in E_o$.

По определението за строга псевдоизпъкналост чрез определящата, $H_z(\varphi, w) > 0$ за $\forall z \in \partial D$ и $\forall 0^n \neq w \in \mathbb{C}^n$ с $\partial\varphi(w) = 0$. (Да напомним, че w е комплексен допирателен вектор към ∂D в z точно когато $\partial\varphi(w)(z) = 0$.) Оттук следва, че $\partial\varphi(w)(z) \neq 0$ за $\forall (z,w) \in E_o$. Съгласно компактността на E_o, съществува константа $m > 0$, така че $|\partial\varphi(w)(z)| \geq m$ за $\forall (z,w) \in E_o$. Избираме $k > \frac{M}{2m^2}$ и комбинираме с (16.3), за да получим, че $H_z(\psi, w) \geq -M + 2km^2 > 0$ за $\forall (z,w) \in E_o$. Положителната дефинитност на $H_z(\psi, w)$ върху $E \setminus E_o$ е ясна, така че $H_z(\psi, w) > 0$ върху E. Още повече, по съображения за непрекъснатост, при достатъчно тясна околност U, формата на Леви $H_z(\psi, w) > 0$ е положително дефинитна за $\forall z \in U$ и $\forall w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$. По определение, това означава плурисубхармоничност на ψ, Q.E.D.

Да отбележим, че ψ може да се продължи в околността U на ∂D до отрицателна строго плурисубхармонична функция. По този начин имаме възможност да определим строго псевдоизпъкналите области спрямо определяща като множествата от точки с отрицателни стойности под действие на строго плурисубхармонична функция в околност на затворената обвивка на такава област.

Накратко, псевдоизпъкналите области $D \subseteq \mathbb{C}^n$ са области на холоморфност, защото върху тях всяка безкрайно $\mathbb{R}$-диференцируема и $\overline{\partial}$-затворена форма и $\overline{\partial}$-точна. Това дава възможност да приложим индукция относно комплексната размерност n и да докажем, че D има бариер във всяка гранична точка $a \in \partial D$. Да преместим началото в $a = 0^n$ и да разгледаме множеството

$$D'_n = \{z \in D \,|\, z_n = 0\}$$

като област в $\mathbb{C}^{n-1}$. Означаваме с $j : D'_n \to D$ естественото влагане и разглеждаме проекцията $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ върху първите $n-1$ компоненти. Трябва да проверим, че за всяка безкрайно $\mathbb{R}$-диференцируема форма $f \in \mathcal{A}^{(0,q+1)}(D'_n)$ с $\overline{\partial} f = 0$ съществува безкрайно $\mathbb{R}$-диференцируема форма $F \in \mathcal{A}^{(0,q+1)}(D)$ с $\overline{\partial} F = 0$, така че $f = j^* F$. Тогава съгласно псевдоизпъкналостта на D съществува $U \in \mathcal{A}^{(0,q)}(D)$, така че $\overline{\partial} U = F$. В резултат, $u = j^* U$ е решение на $\overline{\partial} u = j^* \overline{\partial} U = j^* F = f$ По индукционно предположение, оттук следва, че $D'_n \subset \mathbb{C}^{n-1}$ е област на холоморфност и съществува холоморфна функция $g : D'_n \to \mathbb{C}^{n-1}$, която е неограничена в $0^{n-1} \in \partial D'_{n-1}$. Произволно холоморфно продължение $G : D \to \mathbb{C}$ на $g : D'_n \to \mathbb{C}$ е неограничено в $0^n \in \partial D$ и D има бариер в $0^n \in \partial D$. Наличието на бариер във всяка гранична точка е достатъчно за това D да е област на холоморфност. Относно конструкцията на $F \in \mathcal{A}^{(0,q+1)}(D)$ с $\overline{\partial} F = 0$ и $f = j^* F$, означаваме

$$M_n = D \setminus \pi^{-1}(D'_n) = \{z = (z', z_n) \in D \, \pi(z) = (z', 0) \notin D'_n\}$$

и забелязваме, че M_n е относително затворено в D. Понеже D'_n е също относително затворено в D, съществува функция $\varphi \in C^\infty(D)$ със стойност 1 в околност на D'_n и стойност 0 в околност на M_n. Формата $\varphi(\pi^* f)$ е зададена върху $\pi^{-1} D'_n$ и се продължава до нулевата форма върху $\{z \in D \,|\, \varphi(z) = 0\}$. При това, $\varphi(\pi^* f) \in \mathcal{A}^{(0,q)}(D)$ и $j^*(\varphi(\pi^* f)) = (j^*\varphi)((\pi j)^* f) = f$. Търсим $v \in \mathcal{A}^{(0,q)}(D)$ така, че $F = \varphi(\pi^* f) - z_n v$ да изпълнява $\overline{\partial} F = 0$. Тогава $j^* F = f$ и F удовлетворява необходимите условия. От $\overline{\partial} v = \frac{1}{z_n}(\overline{\partial}\varphi) \wedge (\pi^* f) \in \mathcal{A}^{(0,q+1)}(D)$ и $\overline{\partial}(\pi^* f) = 0$ се вижда, че v съществува като решение на $\overline{\partial}$-задачата върху псевдоизпъкналата област D.