Глава 17

Метрика на Бергман

За ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n$ да разгледаме Хилбертовото пространство

$$L^2_{\mathcal{O}}(D) = \{\varphi \in \mathcal{O}(D) \,|\, ||\varphi||^2_D = \int\limits_D |\varphi|^2 d\mathrm{vol} < \infty$$

със скаларно произведение

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_D \varphi\overline{\psi} d\mathrm{vol}.$$

Лема 17.1. *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област, а $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a, r^n) \subset D$ е полидиск със затворена обвивка $\overline{\mathcal{P}(a, r^n)} \subset D$. Тогава за произволна функция $\varphi \in L^2_{\mathcal{O}}(D)$ е в сила*

$$|\varphi(a)| \leq \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}} r^n} ||\varphi||_{\mathcal{P}}.$$

Доказателство: Без ограничение на общността можем да считаме, че $a = 0^n$. Развиваме φ в ред на Тейлър

$$\varphi(z) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} c_k z^k$$

за $\forall z \in \mathcal{P}$. Ако $z_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ за $\forall 1 \leq j \leq n$, то

$$||\varphi||^2_{\mathcal{P}} = \int\limits_{\mathcal{P}} \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \sum_{l \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} c_k \overline{c_l} z^k \overline{z}^l d\mathrm{vol} =$$

$$\sum_{k,l \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} c_k \overline{c_l} \left[\prod_{j=1}^n \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k_j - l_j)\theta_j} d\theta_j \int\limits_0^r \rho_j^{k_j + l_j + 1} d\rho_j \right] =$$

$$\sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} |c_k|^2 (2\pi)^n \prod_{j=1}^n \frac{r^{2(k_j+1)}}{2(k_j+1)}.$$

Вземайки предвид, че всички членове на този ред са неотрицателни, получаваме

$$||\varphi||^2_{\mathcal{P}} \geq |c_0|^2 \pi^n r^{2n} = |\varphi(0)|^2 \pi^n r^{2n},$$

Q.E.D.

Твърдение 17.2. *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област, $\zeta \in D$ е произволна точка, а*

$$E(\zeta) = \{\varphi \in L^2_{\mathcal{O}}(D) \,|\, \varphi(\zeta) = 1\}.$$

Тогава съществува единствена функция $\varphi_\zeta \in E(\zeta)$ с минимална норма

$$||\varphi_\zeta||_D = \inf_{\varphi \in E(\zeta)} ||\varphi||_D.$$

Доказателство: За съществуването на φ_ζ нека $A = \inf_{\varphi\in E(\zeta)} ||\varphi||_D^2$ и $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset E(\zeta)$ е редица с $\lim_{m\to\infty} ||\varphi_m||_D^2 = A$. По Лема 17.1 редицата $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ е локално равномерно ограничена. Това ни дава възможност да приложим Теорема 3.4 на Монтел и да получим подредица $\{\varphi_{m_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, която клони към $\varphi_o \in L^2_{\mathcal{O}}(D)$ равномерно върху всеки компакт $K \subset D$. Сега за всяка област $D_o \subset D$ с компактна затворена обвивка $\overline{D_o} \subset D$ е в сила

$$||\varphi_o||_{D_o}^2 = \lim_{k\to\infty} ||\varphi_{m_k}||_{D_o}^2 \le \lim_{k\to\infty} ||\varphi_{m_k}||_D^2 = A.$$

Освен това, $\varphi_o \in E(\zeta)$, така че $||\varphi_o||_D^2 = A$.
За единствеността на φ_o да допуснем, че $\psi_o \in E(\zeta)$ е функция с $||\psi||_D^2 = ||\varphi||_D^2 = A$. Тогава $\frac{\varphi_o+\psi_o}{2} \in E(\zeta)$, откъдето

$$\sqrt{A} \le \left|\left|\frac{\varphi_o+\psi_o}{2}\right|\right|_D.$$

От друга страна, неравенството на триъгълника гласи, че

$$\left|\left|\frac{\varphi_o+\psi_o}{2}\right|\right|_D \le \frac{||\varphi_o||_D}{2} + \frac{||\psi_o||_D}{2} = \frac{\sqrt{A}}{2} + \frac{\sqrt{A}}{2} = \sqrt{A}.$$

В резултат получаваме равенството

$$\left|\left|\frac{\varphi_o+\psi_o}{2}\right|\right|_D = \frac{||\varphi_o||_D}{2} + \frac{||\psi_o||_D}{2} = \sqrt{A},$$

което може да е изпълнено само за $\psi_o = \lambda\varphi_o$ с $\lambda \in \mathbb{C}$. Сега $1 = \psi_o(\zeta) = \lambda\varphi_o(\zeta) = \lambda.1 = \lambda$ води до изовда, че $\psi_o \equiv \varphi_o$, Q.E.D.
Доказаното твърдение ни дава възможност да дадем следното

Определение 17.3. *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област, ζ е точка от D, $E(\zeta) = \{\varphi \in L^2_{\mathcal{O}}(D) \,|\, \varphi(\zeta) = 1\}$ и $\varphi_\zeta(z) \in E(\zeta)$ е функцията с минимална норма $||\varphi_\zeta||_D = \inf_{\varphi\in E(\zeta)} ||\varphi||_D$. Тогава функцията*

$$k_D(z,\zeta) = \frac{\varphi_\zeta(z)}{||\varphi_\zeta||_D^2}$$

се нарича ядро на Бергман на D.

Нека $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ е пълна ортонормирана система от функции $\varphi_m \in L^2_{\mathcal{O}}(D)$ в ограничена област D. По определението за пълнота на $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, всяка функция $f \in L^2_{\mathcal{O}}(D)$ се развива в ред

$$f(z) = \sum_{m=1}^\infty (f,\varphi_m)\varphi_m(z), \tag{17.1}$$

който е сходящ към $f(z)$ относно нормата, индуцирана от въведеното скаларно произведение. От Лема 17.1 следва, че редът (17.1) е равномерно сходящ във всяка подобласт $G \subset D$ с компактна затворена обвивка $\overline{G} \subset D$.
Да напомним също и равенството на Парсевал

$$\sum_{m=1}^\infty |(f,\varphi_m)|^2 = ||f||_D^2, \tag{17.2}$$

за пълната ортонормирана система $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset L^2_{\mathcal{O}}(D)$.

Лема 17.4. *Ако D е ограничена област, а $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset L^2_{\mathcal{O}}(D)$ е ортонормирана система, то редът $\sum_{m=1}^\infty |\varphi_m(a)|^2$ е сходящ във всяка точка $a \in D$.*

Доказателство: Нека $\mathcal{P}(a, r^n)$ е полидиск, съдържащ се в D заедно със затворената си обвивка $\overline{\mathcal{P}(a, r^n)} \subset D$. Съгласно ортонормираността на $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, за произволно естествено M е изпълнено

$$\sum_{m=1}^{M} |\varphi_m(a)|^2 = \int\limits_{D} \Big| \sum_{m=1}^{M} \overline{\varphi_m(a)}\varphi_m(z)|^2 dvol \geq \int\limits_{\mathcal{P}(a,r^n)} \left| \sum_{m=1}^{M} \overline{\varphi_m(a)}\varphi_m(z)\right|^2 dvol.$$

Но съгласно Лема 17.1,

$$\int\limits_{\mathcal{P}(a,r^n)} \left| \sum_{m=1}^{M} \overline{\varphi_m(a)}\varphi_m(z)\right|^2 dvol \geq \pi^n r^{2n} \left(\sum_{m=1}^{M} |\varphi_m(a)|^2\right)^2.$$

Следователно

$$\sum_{m=1}^{M} |\varphi_m(a)|^2 \geq \pi^n r^{2n} \left(\sum_{m=1}^{M} |\varphi_m(a)|^2\right)^2.$$

Съкращаваме на $\sum\limits_{m=1}^{M} |\varphi + m(a)|^2$ и след граничен преход $M \to \infty$ получаваме

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m(a)|^2 \leq \frac{1}{\pi^n r^{2n}} < \infty,$$

Q.E.D.

Теорема 37. *Ако $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област, а $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L^2_{\mathcal{O}}(D)$ е пълна ортонормирана система, то ядрото на Бергман*

$$k_D(z, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(z)\overline{\varphi_m(\zeta)}.$$

Доказателство: Редът $\sigma = \sum\limits_{m=1}^{\infty} |\varphi_m(\zeta)|^2$ е сходящ по Лема 17.4. За произволна функция

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_m)\varphi_m(z) \in E(\zeta)$$

да положим

$$\gamma_m = \sigma(\varphi, \varphi_m) - \overline{\varphi_m(\zeta)}.$$

Тогава от $1 = \varphi(\zeta) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_m)\varphi_m(\zeta)$ следва

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m\varphi_m(\zeta) = \sigma \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_m)\varphi_m(\zeta) - \sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m(\zeta)|^2 = 0.$$

В резултат, $(\varphi, \varphi_m) = \frac{1}{\sigma}\left[\overline{\varphi_m(\zeta)} + \gamma_m\right]$, откъдето

$$|(\varphi, \varphi_m)|^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left[|\varphi_m(\zeta)|^2 + |\gamma_m|^2 + \gamma_m\varphi_m(\zeta) + \overline{\gamma_m}\overline{\varphi_m(\zeta)}\right].$$

Следователно

$$\sum_{m=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_m)|^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sigma \sum_{m=1}^{\infty} |\gamma_m|^2\right] \geq \frac{1}{\sigma}.$$

Сега равенството на Парсевал (17.2) дава

$$||\varphi||_D^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_m)|^2 \geq \frac{1}{\sigma},$$

т.е. нормата на $\varphi \in E(\zeta)$ е ограничена тодолу от $\frac{1}{\sigma}$. Този минимум се достига когато всички $\gamma_m = 0$ и

$$\varphi_\zeta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_m)\varphi_m = \frac{1}{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\varphi_m(\zeta)}\varphi_m(z).$$

Замествайки $\frac{1}{\sigma} = ||\varphi||_D^2$ получаваме

$$k_D(z,\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\varphi_m(\zeta)}\varphi_m(z),$$

Q.E.D.

Следствие 17.5. *Ядрото на Бергман $k_D(z,\zeta)$ на ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n$ изпълнява следните свойства:*
(i) функцията $k_D(z,\zeta)$ е холоморфна относно променливата z и анти-холоморфна относно променливата ζ.
(ii) функцията $k_D(z,\zeta)$ е косо-симетрична,

$$k_D(\zeta, z) = \overline{k_D(z,\zeta)}.$$

(iii)(Възпроизвеждащо свойство) за произволна функция $\varphi \in L^2_{\mathcal{O}}(D)$ е в сила равенството

$$\varphi(z) = \int\limits_D \varphi(\zeta)k_D(z,\zeta)dvol(\zeta) \quad \text{ввв } \forall z \in D. \tag{17.3}$$

Доказателство Свойствата (i) и (ii) следват непосредствено от Теорема 37. За доказателството на (iii) да напомним неравенството на Коши-Буняковски

$$\sum_{m=1}^{\infty} |(f,\varphi_m)\varphi_m(z)| \le \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |(f,\varphi_m)|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m(z)|^2}.$$

То доказва абсолютната и равномерна сходимост на реда (17.1) върху произволен компакт $K \subset D$. Вземайки предвид ортонормираността на $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L^2_{\mathcal{O}}(D)$ получаваме

$$\int\limits_D \varphi(\zeta)k_D(z,\zeta)dvol(\zeta) =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi,\varphi_m)\varphi_n(z)\int\limits_D \varphi_m(\zeta)\overline{\varphi_n(\zeta)}dvol(\zeta) =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\varphi,\varphi_m)\varphi_m(z) = \varphi(z),$$

Q.E.D.
С помощта на Теоерма 37 ще пресметнем в явен вид ядрото на Бергман на полидиск и на кълбо.

Твърдение 17.6. *Ядрото на Бергман на полидиска $\mathcal{P} = \mathcal{P}(0^n, 1^n) \subset \mathbb{C}^n$ е*

$$k_{\mathcal{P}}(z,\zeta) = \frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1 - z_j\bar{\zeta})}.$$

Доказателство: Твърдим, че мономите $\{z^k = z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}\}_{k\in(\mathbb{Z}^{\ge 0})^n}$ образуват пълна ортонормирана система функции от $L^2_{\mathcal{O}}(\mathcal{P})$. Пълнотата следва от това, че всяка функция $f \in \mathcal{O}(\mathcal{P})$ се разлага в ред на Тейлър с център $0^n \in \mathbb{C}^n$. За ортогоналността на мономите на $z_1,\dots,z_n$ в $L^2_{\mathcal{O}}(\mathcal{P})$ е достатъчно да проверим ортогоналността на мономите $\{z_1^{k_1}\}_{k_1=0}^{\infty} \subset L^2_{\mathcal{O}}(D(0,1))$. Ако $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ за $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in \mathbb{R}^{>0}$, $\theta_1 \in [0, 2\pi]$, то формата на обема в $\mathbb{C}$ е

$$dx_1 \wedge dy_1 = \frac{1}{2i} d\overline{z_1} \wedge dz_1 = \rho_1 d\rho_1 \wedge d\theta_1.$$

Следователно

$$\frac{1}{2i} \int\limits_{D(0,1)} z_1^k \overline{z_1}^l d\overline{z_1} \wedge dz_1 = \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^1 \rho_1^{k+l+1} d\rho_1 \right] e^{i(k-l)\theta_1} d\theta_1 =$$

$$\frac{1}{k+l+2} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta_1} d\theta_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{k+1} & \text{за } k = l; \\ 0 & \text{за } k \neq l. \end{cases}$$

Това доказва ортогоналността на $\{z^k\}_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \subset L^2_{\mathcal{O}}(\mathcal{P})$ и пресмята L^2-нормата

$$||z^k||^2_{\mathcal{P}} = \frac{\pi^n}{\prod\limits_{j=1}^n (k_j + 1)}.$$

Оттук следва, че

$$\varphi_k(z) = \frac{z^k}{||z^k||_{\mathcal{P}}} = \sqrt{\frac{\prod\limits_{j=1}^n (k_j+1)}{\pi^n}} z^k$$

образуват пълна ортонормирана система в $L^2_{\mathcal{O}}(\mathcal{P})$. Прилагайки Теорема 37 получаваме ядрото на Бергман

$$k_{\mathcal{P}}(z, \zeta) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \left[\frac{\prod\limits_{j=1}^n (k_j+1)}{\pi^n} \right] z^k \overline{\zeta}^k =$$

$$\frac{1}{\pi^n} \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \left[\prod_{j=1}^n (k_j + 1)(z_j \overline{\zeta_j})^{k_j} \right].$$

Полагайки $s_j = z_j \overline{\zeta}$ забелязваме, че

$$\prod_{j=1}^n (k_j + 1) s_j^{k_j} = \frac{\partial}{\partial s_1} \dots \frac{\partial}{\partial s_n} (s_1^{k_1+1} \dots s_n^{k_n+1}) = \frac{\partial s^{k+1}}{\partial s}.$$

Доколкото $|s_j| = |z_j||\overline{\zeta}| < 1$, можем да разменим сумирането на реда с диференцирането и да представим

$$k_{\mathcal{P}}(z, \zeta) = \frac{1}{\pi^n} \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \frac{\partial s^{k+1}}{\partial s} = \frac{1}{\pi^n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} s^{k+1} \right) =$$

$$\frac{1}{\pi^n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1-s} \right) = \frac{1}{\pi^n} \frac{1}{(1-s)^2}.$$

По-подробно,

$$k_{\mathcal{P}}(z, \zeta) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1 - z_j \overline{\zeta_j})^2},$$

Q.E.D.

Твърдение 17.7. *Ядрото на Бергман на кълбото $B = B(0^n, 1)$ е*

$$k_B(z,\zeta) = \frac{n!}{\pi^n \left(1 - \sum\limits_{j=1}^{n} z_j \overline{\zeta_j}\right)^{n+1}}.$$

Доказателство: Както в доказателството на Твърдение 17.6, функциите $\left\{\varphi_k(z) = \frac{z^k}{||z^k||_B}\right\}_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n}$ образуват пълна ортонормирана система в $L^2_{\mathcal{O}}(B)$. Чрез въвеждане на сферични координати пресмятаме, че

$$||z^k||^2_B = \frac{k!\pi^n}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_j + n\right)!}.$$

Сега Теорема 37 дава

$$k_B(z,\zeta) = \frac{1}{\pi^n} \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_j + n\right)!}{k!} z^k \overline{\zeta}^k =$$

$$\frac{1}{\pi^n} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\dots(m+n) \sum_{|k| = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j = m} \frac{m!}{k!} z^k \overline{\zeta}^k.$$

Но вътрешната сума

$$\sum_{|k|=m} \frac{m!}{k_1! \dots k_n!} (z_1 \overline{\zeta_1})^{k_1} \dots (z_n \overline{\zeta_n})^{k_n} = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{\zeta_j}\right)^m.$$

Вземайки предвид, че

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\dots(m+n) t^m = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{1-t} = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}} \quad \text{за } \forall t \in D(0,1),$$

получаваме, че

$$k_B(z,\zeta) = \frac{n!}{\pi^n \left(1 - \sum\limits_{j=1}^{n} z_j \overline{\zeta_j}\right)^{n+1}},$$

полагайки $t = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j \overline{\zeta_j}$, Q.E.D.

За ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n$ с ядро на Бергман $k_D(z,\zeta)$ ще докажем съществуването на ермитова метрика върху D с логаритмичен потенциал $k_D(z,z) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} |\varphi_m(z)|^2 > 0$. Тази метрика носи името на Бергман.

Теорема 38. *Ако $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област с ядро на Бергман $k_D(z,\zeta)$, то диференциалната форма*

$$dd^c \log k_D(z,z) = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \log k_D(z,z)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} dz_i \wedge d\overline{z_j}$$

е инвариантна относно бихоломорфни изображения на D.

Доказателство: Нека $f : D \to G = f(D)$ е бихоломорфно изображение,

$$J_f = \det \frac{(\partial f_1, \dots, f_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix},$$

а $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L^2_{\mathcal{O}}(G)$ е ортонормирана система. Тогава твърдим, че $\varphi_m = (\psi_m \circ f)J_f$ образуват ортонормирана система в $L^2_{\mathcal{O}}(D)$. Наистина, елементът на обема $d\mathrm{vol}_G = |J_f|^2 d\mathrm{vol}_D$, откъдето

$$\int\limits_D \varphi_i \overline{\varphi_j} d\mathrm{vol}_D = \int\limits_D (\psi_i \circ f)\overline{(\psi_j \circ f)}|J_f|^2 d\mathrm{vol}_D = \int\limits_G \psi_i \overline{\psi_j} d\mathrm{vol}_G = \delta_{ij}$$

за Кронекеровата делта функция

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако } i = j, \\ 0 & \text{ако } i \neq j. \end{cases}$$

Още повече, ако $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L^2_{\mathcal{O}}(G)$ е пълна система, то и $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L^2_{\mathcal{O}}(D)$ е пълна система. Наистина, произволна функция $\varphi \in L^2_{\mathcal{O}}(D)$ може да се представи във вида $\varphi = (\psi \circ f)J_f$ чрез $\psi \in L^2_{\mathcal{O}}(G)$. По този начин, от разлагането $\psi = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\psi, \psi_m)\psi_m$ получаваме разлагането $\varphi = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_m)\varphi_m$. Съгласно Теорема 37, имаме

$$k_D(z,z) = \sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m(z)|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\psi_m \circ f(z)|^2 |J_f(z)|^2 = k_D(f(z), f(z))|J_f(z)|^2.$$

Логаритмувайки това тъждество получаваме

$$\log k_G(f(z), f(z)) = \log k_D(z,z) - \log J_f(z) - \overline{\log J_f(z)}.$$

Съгласно холоморфността на J_f е изпълнено $\overline{\partial} \log J_f = \partial \overline{\log J_f} = 0$. Вземайки предвид, че $dd^c = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}$, стигаме до извода, че

$$dd^c \log k_G(f(z), f(z)) = dd^c \log k_D(z,z).$$

Непосредствено,

$$dd^c \log k_D(z,z) = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \log k_D(z,z)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} dz_i \wedge d\overline{z_j},$$

Q.E.D.

Определение 17.8. *Ако $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област, а $k_D(z,\zeta)$ е ядрото на Бергман на D, то диференциалната форма*

$$ds_D^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \log k_D(z,z)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} dz_i \wedge d\overline{z_j}$$

се нарича Бергманова форма на D.

Теорема 39. *Бергмановата форма*

$$ds_D^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \log k_D(z,z)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} dz_i \wedge d\overline{z_j}$$

на ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n$ е ермитова и положително дефинитна.

Доказателство: Ако

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \log k_D(z,z)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \quad \text{за } 1 \leq i,j \leq n,$$

то непосредствено се проверява, че $g_{ji} = \overline{g_{ij}}$, така че формата $ds^2_D = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} g_{ij} dz_i d\overline{z_j}$ е ермитова. За да докажем положителната дефинитност на ds^2_D, да фиксираме точка $a \in D$ и да прекараме правата $L_w = \{l(\zeta) = a + \zeta w \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\}$ през a, успоредна на вектора $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$. По правилото за диференциране на суперпозиция получаваме

$$\frac{\partial^2 \log k_D(l(\zeta), l(\zeta))}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}|_{\zeta=0} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \log k_D(z,z)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}|_{z=a} w_i \overline{w_j}.$$

Достатъчно е да докажем, че

$$\frac{\partial^2 \log k_D(l(\zeta), l(\zeta))}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}|_{\zeta=0} > 0 \quad \text{за } \forall w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\},$$

за да получим положителната дефинитност на ds^2_D. Наистина, за произволна пълна ортонормирана система $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L^2_{\mathcal{O}}(D)$ знаем, че

$$k_D(l(\zeta), l(\zeta)) = \sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m(l(\zeta))|^2,$$

съгласно Теорема 37. Ако означим

$$\varphi'_m(a) = \frac{d}{d\zeta} \varphi_m(l(\zeta))|_{\zeta=0},$$

то

$$\frac{\partial^2 \log k_d(l(\zeta), l(\zeta))}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}|_{\zeta=0} =$$

$$\frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} |\varphi_m(a)|^2\right)\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} |\varphi'_m(a)|^2\right) - \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \varphi'_m(a)\overline{\varphi_m(a)}\right)\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \varphi_m(a)\overline{\varphi'_m(a)}\right)}{k^2_D(a,a)}. \tag{17.4}$$

Разглеждаме $\Phi = (\varphi_1(a), \ldots, \varphi_m(a), \ldots)$ и $\Phi' = (\varphi'_1(a), \ldots, \varphi'_m(a), \ldots)$ като точки от Хилбертовото пространство l^2 на L^2-редиците. Тогава (17.4) приема вида

$$\frac{\partial^2 \log k_D(l(\zeta), l(\zeta))}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}|_{\zeta=0} = \frac{||\Phi||^2 ||\Phi'||^2 - |(\Phi, \Phi')|^2}{k^2_D(a,a)}.$$

Съгласно неравенството на Коши-Буняковски,

$$||\Phi||^2 ||\Phi'||^2 \geq |(\Phi, \Phi')|^2$$

с равенство $||\Phi||^2 ||\Phi'||^2 = |(\Phi, \Phi')|^2$ тогава и само тогава, когато $\Phi = \lambda \Phi'$ за някакво комплексно число $\lambda \in \mathbb{C}$. Още повече, $||\Phi||^2 = k_D(a,a) \neq 0$ гарантира, че $\lambda \neq 0$. По този начин, произволна функция $\varphi \in L^2_{\mathcal{O}}(D)$ има стойност

$$\varphi(a) = \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_m) \varphi_m(a) = \lambda \left(\sum_{m=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_m) \varphi'_m(a) \right) = \lambda \frac{d\varphi(l(\zeta))}{d\zeta}|_{\zeta=0}.$$

В частност, за $\varphi_o(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{w_j}(z_j - a_j) \in L^2_{\mathcal{O}}(D)$ е изпълнено $\varphi_o(l(\zeta)) = ||w||^2 \zeta$, откъдето

$$\lambda ||w||^2 = \lambda \frac{d(||w||^2 \zeta)}{d\zeta}|_{\zeta=0} = \lambda \frac{d\varphi_o(l(\zeta))}{d\zeta}|_{\zeta=0} = \varphi_o(a) = 0.$$

Противоречието доказва, че Φ и Φ' не са пропорционални и

$$\frac{\partial^2 \log k_D(l(\zeta), l(\zeta))}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}|_{\zeta=0} > 0$$

е строго положително, Q.E.D.

Определение 17.9. *Ермитовата метрика* $\{g_{ij}\}_{i,j=1}^n$ *с*

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \log k_D(z, z)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}},$$

определена от положително дефинитната Бергманова форма

$$ds_D^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dz_i d\overline{z_j}$$

на ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n$*, се нарича Бергманова метрика на* D*.*

От Твърдение 17.6 непосредствено получаваме, че Бергмановата метрика на полидиска $\mathcal{P} = \mathcal{P}(0^n, 1^n)$ има фундаментална форма

$$ds_{\mathcal{P}}^2 = 2\sum_{j=1}^n \frac{dz_j d\overline{z_j}}{(1-|z_j|^2)^2}.$$

Аналогично, с помощта на Твърдение 17.7 получаваме, че Бергмановата форма на кълбото $\mathcal{B} = B(0^n, 1^n)$ е

$$ds_{\mathcal{B}}^2 = (n+1)\left\{\frac{|dz|^2}{1-||z||^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\overline{z_i} z_j dz_i d\overline{z_j}}{(1-||z||^2)^2}\right\},$$

където $|dz|^2 = \sum\limits_{j=1}^n dz_j d\overline{z_j}$.

Накрая да отбележим, че положителната дефинитност на Бергмановата форма ds_D^2 е еквивалентна на строгата плурисубхармоничност на функцията $\log k_D(z, z)$. Оттук следва плурисубхармоничността на $k_D(z, z)$.

Следствие 17.10. *Нека* $D \subset \mathbb{C}^n$ *е ограничена област с ядро на Бергман* k_D*. Ако за всяка редица от точки* $\{z^{(m)}\}_{m=1}^\infty \subset D$*, клоняща към гранична точка* $\lim\limits_{m\to\infty} z^{(m)} = z^{(0)} \in \partial D$*, числовата редица* $\{k_D(z^{(m)}, z^{(m)})\}_{m=1}^\infty$ *клони към* $\lim\limits_{m\to\infty} k_D(z^{(m)}, z^{(m)}) = \infty$*, то областта* D *е псевдоизпъкнала.*